Gilles Godefroy

Sur un théorème de Christensen

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C5, p. C1-C5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A15_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communication n° 5, 5 p.

Décembre 1975

SUR UN THÉORÈME DE CHRISTENSEN

par Gilles GODEFROY

J'ai cherché dans ce travail à donner une démonstration nouvelle d'un résultat de CHRISTENSEN (voir [1], pages 76 à 80). Mon but serait d'étendre ce type de résultats à une classe plus vaste d'espaces de Banach. C'est pourquoi j'ai essayé de me passer de certains outils employés dans [1], au profit de techniques d'espaces vectoriels topologiques.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> φ <u>une forme linéaire sur</u> ℓ^∞ .
<u>Si</u> φ <u>est</u> $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$<u>- borélienne,</u> φ <u>est</u> $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$<u>-continue.</u>

<u>Démonstration.</u> - φ , étant $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$-borélienne, est $\| \|_\infty$-borélienne, donc continue. Pour plus de commodité, on considérera φ comme une mesure de Radon sur $\beta\mathbb{N}$. On peut supposer que $\operatorname{Support}(\varphi)$ est inclus dans $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Il faut alors montrer que $\varphi = 0$. On considère la décomposition de Riesz de φ . On peut écrire $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, où $\varphi^+ , \varphi^- \geq 0$. Si $f \in (\ell^\infty)^+$, on a

$$\varphi^+(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} \varphi(g) .$$

On considère l'espace $M = [0 , 1]^{\mathbb{N}}$, inclus dans ℓ^∞ . Notons que la topologie produit s'identifie avec la topologie induite par $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$. On appellera ensemble BP-mesurable un sous-ensemble de M ayant la propriété de Baire faible.

LEMME 2. - <u>L'application</u> $\varphi^+{}_{|M}$ <u>est</u> BP-<u>mesurable.</u>

Il suffit de démontrer que, pour tout α , $(\varphi^+{}_{|M})^{-1}(]\alpha , +\infty[)$ est BP-mesurable. Considérons alors la relation R définie sur M par

$$fRg \Longleftrightarrow f \geq g .$$

Le graphe $\mathcal{G}$ de R est un fermé de $M \times M$. Soient π_1 et π_2 les projections canoniques de $M \times M$ sur les espaces facteurs. Soit $f \in M$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi^+(f) > \alpha &\Longleftrightarrow \exists\, g \in M ,\ g \leq f ,\ \text{tel que}\ \varphi(g) > \alpha , \\
&\Longleftrightarrow \exists\, g \in M \cap \varphi^{-1}(]\alpha , +\infty[) ,\ \text{tel que}\ g \leq f , \\
&\Longleftrightarrow \exists\, g \in M \cap \varphi^{-1}(]\alpha , +\infty[) ,\ \text{tel que}\ (f , g) \in \mathcal{G} .
\end{aligned}$$

Posons $A = M \cap \varphi^{-1}(]\alpha , +\infty[)$. On a donc

$$(\varphi^+{}_{|M})^{-1}(]\alpha , +\infty[) = \pi_1(\pi_2^{-1}(A) \cap \mathcal{G})$$

ce qui montre que $(\varphi^+{}_{|M})^{-1}(]\alpha , +\infty[)$ est analytique, donc BP-mesurable.

C. Q. F. D.

LEMME 3. - *Soit* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'espaces polonais, et* $M = \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$. *Pour* $x , y \in M$, *on pose*

$$x \sim y \iff \{n \ ; \ x(n) \neq y(n)\} \text{ est fini.}$$

Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ BP-*mesurable telle que*

$$x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y) \ .$$

Alors f *est constante sur un* $\mathcal{G}_\delta$ *résiduel*.

Pour une démonstration de ce lemme, voir [1] (cf. aussi la proposition 10). D'après les lemmes 2 et 3, l'application $\varphi^+_{|M}$ est constante sur un résiduel Ω de M . On considère alors ψ , un homéomorphisme croissant de $[0 , 1]$ tel que, pour tout $x \in]0 , 1[$, on ait $\psi(x) < x$. On pose $\psi^* = \prod_{n\in\mathbb{N}}(\psi)_n$. L'application ψ^* est un homéomorphisme de M . Soit $\Omega' = \Omega \cap \psi^*(\Omega)$. L'ensemble Ω' est un résiduel de M . D'après la positivité de $\varphi^+_{|M}$ et les propriétés de ψ^* , on a :

$$x \in \Omega' \Longrightarrow \forall\, \mathcal{U} \in \text{Support}(\varphi^+) \ , \ \lim_{\mathcal{U}} x \in \{0 , 1\} \ .$$

Or ceci est impossible si $\text{Support}(\varphi^+) \neq \emptyset$. En effet, on a le lemme suivant.

LEMME 4. - *Soient* X *et* Y *des polonais,* $\Omega \subset X \times Y$ *un résiduel. Alors*

$$\{x \in X \ \text{tel que} \ \Omega \cap \{x\} \times Y \ \text{soit un résiduel de} \ \{x\} \times Y\}$$

est un résiduel de X .

Soit alors $\mathcal{U}$ ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. On veut démontrer que

$$U = \{x \in M \ ; \ \lim_{\mathcal{U}} x \in \{0 , 1\}\}$$

ne peut être un résiduel de M . Raisonnons par l'absurde. On vérifie alors aisément que

$$U' = \{(x , y) \in M \times M \ ; \ x \in U \ , \ y \in U \ , \ \tfrac{1}{2}(x + y) \in U\}$$

est un résiduel de $M \times M$. Soit alors (lemme 4) $x_0 \in U$ tel que $U' \cap \{x_0\} \times M$ soit un résiduel de $\{x_0\} \times M$. Supposons par exemple que $\lim_{\mathcal{U}} x_0 = 0$. D'après le choix de x_0 ,

$$\{y \in M \ ; \ \tfrac{1}{2}(x_0 + y) \in U \ , \ y \in U\}$$

est un résiduel de M , donc $\{y \in M \ ; \ \lim_{\mathcal{U}} y = 0\}$ est un résiduel de M , ce qui est absurde (considérer l'homéomorphisme $x \longmapsto u - x$, où $u = (1 , 1 , 1 , \ldots)$). Par conséquent, Support $(\varphi^+) = \emptyset$, d'où $\varphi^+ = 0$. Le même raisonnement montre que $\varphi^- = 0$, donc que $\varphi = 0$.

C. Q. F. D.

La démonstration faite montre qu'on peut énoncer le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. - *Soit* φ *une forme linéaire positive sur* ℓ^∞ , *telle que la restriction de* φ *à* M *soit* BP-*mesurable. Alors* φ *est continue pour* $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$.

Il suffit en effet de reprendre la démonstration précédente, en la commençant au lemme 3. Ce résultat est une petite extension, dans un cas évidemment bien particulier, du résultat de CHRISTENSEN [1]. Un raisonnement, cette fois tout à fait analogue à celui de CHRISTENSEN [1], permet d'obtenir le corollaire.

COROLLAIRE 6. - <u>Soit</u> $(S , \mathcal{T} , \mu)$ <u>un espace mesuré, où</u> μ <u>est une mesure positive</u> σ-<u>finie. Toute forme linéaire sur</u> $L^\infty(S , \mathcal{T}, \mu)$, $\sigma(L^\infty , L^1)$-<u>borélienne est continue pour</u> $\sigma(L^\infty , L^1)$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\varphi : L^\infty \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On pose, pour $A \in \mathcal{T}$

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A)$$

où χ_A est la fonction caractéristique de A . Soit $(A_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ disjoints. On définit $\varphi^* : \ell^\infty \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ par

$$(\lambda_n) \in \ell^\infty , \quad \varphi^*(\lambda_n) = \varphi(\Sigma_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \chi_{A_n}) .$$

On voit aisément que l'hypothèse faite sur φ entraîne que φ^* est $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$-borélienne. φ^* est donc induite par un élément de ℓ^1 . On a donc

$$\varphi^*((\lambda_n)) = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi(\chi_{A_n}) .$$

D'où, en particulier,

$$\nu(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \varphi(\Sigma_{n=0}^{+\infty} \chi_{A_n}) = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \varphi(\chi_{A_n}) = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n) .$$

ν est donc σ-additive. De plus, on a $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$. Le théorème de Radon-Nikodym permet d'affirmer qu'il existe $f \in L^1$ telle que

$$\varphi(\chi_A) = \int_A f.d\mu , \quad \forall A \in \mathcal{T} .$$

Les fonctions en escalier étant denses dans $(L^\infty , \| \|_\infty)$, et φ étant continue pour la norme, on en déduit que φ est induite par un élément de L^1 .

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u> 7 : On démontre aisément qu'un morphisme d'un groupe topologique métrisable de Baire dans un groupe topologique est continu s'il est borélien. L'intérêt du corollaire 6 est que l'espace $(L^\infty , \sigma(L^\infty , L^1))$ est un groupe topologique maigre.

Disons qu'une dualité (E,E') , où E est un Banach, possède la propriété (M) si toute forme linéaire sur E' , $\sigma(E' , E)$-borélienne, est induite par un élément de E . On pourrait chercher quels sont les couples (E , E') qui vérifient cette propriété. Ceci appelle quelques remarques.

<u>Remarque</u> 8 : Il semblerait intéressant, dans l'optique où l'on essaye d'adapter la démonstration de la proposition 1, de supposer que E est facteur direct dans

son bidual E''. D'autre part, pour que la dualité (E, E') possède la propriété (M), il est nécessaire que E soit $\sigma(E, E')$ séquentiellement complet, donc (dans l'hypothèse : E non réflexif) que E' ne soit pas séparable.

Remarque 9 : On peut remarquer que le lemme 2 s'étend, mutatis mutandis, à certains espaces réticulés. Quant au lemme 3, on peut le déduire, dans le cas où $M_n = M_0$ pour tout n, de la proposition suivante.

PROPOSITION 10. - *Soit M un espace topologique de Baire à base dénombrable d'ouverts. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'homéomorphismes de M telle que, pour tout ouvert O de M, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(O) = M$. Soit A un résiduel de M. Alors il existe $x \in A$ tel que $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}^{\sim} \cap A$ soit dense dans A.*

Démonstration. - Soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de la topologie de M. On pose

$$\Omega_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(O_n) \right) .$$

Ω_1 est un résiduel. On pose de plus $A_n = f_n^{-1}(A)$. A_n est aussi un résiduel, pour tout n. Soit

$$x \in \Omega_1 \cap A \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) .$$

On a $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, et de plus $\overline{\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}} = M$, car $x \in \Omega_1$. Par conséquent x convient.

C. Q. F. D.

Le lemme 3, dans le cas où $M_n = M_0$ pour tout n, se déduit immédiatement de cette proposition en considérant les homéomorphismes (φ_n) qui permutent un nombre fini de coordonnées, et le résiduel A tel que $f_{|A}$ soit continue.

Quant au lemme 4 et à la fin de la démonstration, une simplification serait apportée par une réponse à la question suivante.

Question 11. - Soient E un Banach non réflexif, et $B_1(E')$ la boule unité de E' munie de $\sigma(E', E)$. Soit $\varphi \in E'' \setminus E$. Est-ce que $\operatorname{Ker} \varphi \cap B_1(E')$ peut être un résiduel de $B_1(E')$?

Une réponse négative, qui semble probable, permettrait peut-être de généraliser la démonstration de la proposition 1 à d'autres dualités ; il serait naturel de considérer par exemple les couples (U, U_1) où U_1 est une algèbre de von Neumann, et U son prédual. Terminons par une question :

Question 12. - Si E est un Banach faiblement séquentiellement complet, la dualité (E, E') possède-t-elle la propriété (M) ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTENSEN (J.). - Topology and Borel structure. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 10 ; Notas de Matematica, 51).

(Texte reçu le 30 janvier 1976)

Gilles GODEFROY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05