Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gilles Godefroy

Espaces vectoriels de codimension finie ou dénombrable dans un espace de Banach

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº C4, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A14_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communication n° 4, 2 p.
Décembre 1975

ESPACES VECTORIELS DE CODIMENSION FINIE OU DÉNOMBRABLE DANS UN ESPACE DE BANACH

par Gilles GODEFROY

On va démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - *Soient* E *un espace de Banach,* H *un sous-espace vectoriel (s. e. v.) de* E *de codimension finie ou dénombrable. Alors* H *est tonnelé pour la topologie induite.*

Démonstration. - On peut supposer que $\overline{H} = E$. Soient X un tonneau de H, et $\overline{X}$ sa fermeture dans E. L'espace vectoriel engendré par $\overline{X}$ est

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n\overline{X}) .$$

C'est un sous-espace vectoriel de E, qui contient H. De plus, V est un $\mathfrak{F}_\sigma$. On a alors $V = E$. En effet, on a le résultat suivant.

LEMME 2. - *Soient* E *un espace de Banach,* V *un s. e. v. de* E*, borélien, et de codimension finie ou dénombrable. Alors* V *est fermé.*

Il suffit pour démontrer ce lemme de démontrer que, pour tout sous-espace fermé séparable F de E, l'espace $F \cap V$ est fermé. Or $F \cap V$ est un borélien de F, donc un analytique ; c'est de plus un sous-espace de codimension finie ou dénombrable. Or on déduit aisément du théorème du graphe analytique la proposition suivante (voir [1], p. 75) :

Soient E un Banach, F et G des s. e. v. analytiques tels que $E = F \oplus G$. Alors F et G sont fermés. Le lemme 2 s'ensuit immédiatement.

Puisque $V = E$, l'ensemble $\overline{X}$ est un tonneau de E. Par conséquent, $\overline{X}$ est un voisinage de 0 dans E ; et $\overline{X} \cap H = X$ est un voisinage de 0 dans H.

C. Q. F. D.

Remarque 3. - Ce résultat permet de voir que le théorème du graphe fermé ne peut se généraliser aux espaces tonnelés ; il suffit de considérer H un hyperplan non fermé d'un Banach E, une droite D supplémentaire, et l'espace $H \times D$ qui est tonnelé. L'application

$$\varphi : H \times D \longrightarrow E$$
$$(x, x') \longmapsto x + x'$$

est une bijection continue entre espaces tonnelés qui n'est pas bicontinue.

Remarque 4. - La question suivante reste posée :

Existe-t-il des hyperplans non fermés dans un Banach E qui ne soient pas des espaces de Baire ? Le résultat ci-dessus ne résoud pas la question, puisqu'il existe des espaces normés tonnelés qui ne sont pas de Baire (par exemple, dans $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$, l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des parties de $\underset{\sim}{N}$, voir [2], p. 198).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTENSEN (J.). - Topology and Borel structure. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 10 ; Notas de Matematica, 51).

[2] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. - Saõ Paulo, Sociedade de Matematica de Saõ Paulo, 1958.

(Texte reçu le 30 janvier 1976)

Gilles GODEFROY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05