Michel Talagrand

Sélection mesurable de mesures maximales

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº C3, p. C1-C4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A13_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communications n° 3, 4 p.
Décembre 1975

SÉLECTION MESURABLE DE MESURES MAXIMALES

par Michel TALAGRAND

Soit X un convexe compact d'un e. l. c. s. Pour chaque $x \in X$, notons M_x l'ensemble des mesures maximales (pour l'ordre de CHOQUET) qui représentent x, et M'_x l'ensemble des points extrémaux de M_x. Dans le cas où X est métrisable, l'existence d'une sélection borélienne $x \dashrightarrow m_x \in M_x$ (resp. M'_x) a été établie dans [1] par M. RAO (resp. dans [2] par W. SMITH).

Nous allons exposer une méthode très élémentaire qui permet d'améliorer ces résultats.

Notons $S(X)$ l'ensemble des fonctions convexes continues sur X. L'espace $M^1_+(X)$ des probabilités sur X sera toujours muni de la topologie faible. La résultante d'une mesure $\mu \in M^1_+(X)$ sera notée $r(\mu)$.

THÉORÈME 1. - <u>Supposons X métrisable. Il existe alors une sélection borélienne $x \dashrightarrow m_x \in M_x$, de première classe de Baire.</u>

<u>Démonstration</u>. - $S(X)$ est séparable. Soit $(f_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une partie totale de $S(X)$ formée de fonctions de norme $\leqslant 1$.

Soit h l'application $\mu \dashrightarrow (r(\mu)\ ,\ (\mu(f_n))_n)$ de $M^1_+(X)$ dans $E \times \underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}}$. Elle est affine continue. Son image est donc un convexe compact K, qui est contenu dans $X \times [-1\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$, puisque $\|f_n\| \leqslant 1$ pour tout n. Cette application est injective, puisque $S(X)$ étant total dans $\mathcal{C}(X)$, la famille $(f_n)_n$ est aussi totale dans $\mathcal{C}(X)$.

Désignons par π (resp. π_n) la projection canonique de $E \times \underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}}$ sur E (resp. de $\underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}}$ sur le n-ième facteur de $\underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}}$).

Soit ξ la fonction numérique continue $(y_n) \dashrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}(1 - y_i)^2$, définie sur $[-1\ ,\ 1]^{\underset{\sim}{N}}$. Pour $x \in X = \pi(K)$, définissons

$$K(x) = \{y \in [-1,1]^{\underset{\sim}{N}}\ ,\ (x,y) \in K\}\ ,\ \text{et}\quad \varphi(x) = \inf\{\xi(y)\ ;\ y \in K(x)\}\ .$$

La compacité de K implique aisément que φ est s. c. i. La convexité de $K(x)$, et le fait que $\xi((y + y')/2) < \xi(y)$ si $\xi(y) = \xi(y')$ et $y \neq y'$, impliquent l'existence d'un unique point $\theta(x)$ de $K(x)$ tel que $\xi(\theta(x)) = \varphi(x)$.

Prouvons que, pour tout n, l'application $x \dashrightarrow \pi_n(\theta(x))$ est de 1re classe de Baire. Soit F un intervalle fermé de $\underset{\sim}{R}$, et soit $K' = \pi_n^{-1}(F) \cap K$, C' est un convexe compact. Définissons φ' et θ' relativement à K' comme nous avons défini φ et θ relativement à K. Montrons tout d'abord que

$$\pi_n(\theta(x)) \in F \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi'(x)\ .$$

En effet, si $\pi_n(\theta(x)) \in F$, alors $\theta(x) \in K'$, d'où

$$\varphi(x) = \xi(\theta(x)) \geqslant \varphi'(x) \geqslant \varphi(x) .$$

Réciproquement, si $\varphi(x) = \varphi'(x)$, on a

$$\xi(\theta'(x)) = \varphi'(x) = \varphi(x) = \inf \{\xi(y) \; ; \; y \in K(x)\} ,$$

ce qui montre que $\theta(x) = \theta'(x)$ d'après l'unicité, d'où enfin $\pi_n(\theta(x)) \in F$.

Puisque φ et φ' sont de 1re classe $(\pi_n \circ \theta)^{-1}(F)$ est un G_δ . Il en résulte que $(\pi_n \circ \theta)^{-1}(I)$ est un F_σ si I est une demi-droite ouverte, donc aussi si I est un intervalle ouvert, et enfin aussi si I est un ouvert quelconque.

Définissons $m_x = h^{-1}((x , \theta(x)))$. On a donc $r(m_x) = x$. La mesure m_x est maximale. Soit en effet $\mu \succ m_x$. Pour chaque n , on a donc

$$\mu(f_n) \geqslant m_x(f_n) = \pi_n(\theta(x)) .$$

Par définition de ξ , ceci implique que $\xi((\mu(f_n))_n) \leqslant \xi(\theta(x))$. Puisque l'on a $r(\mu) = r(m_x) = x$, donc que $(\mu(f_n))_n \in K(x)$, la définition de $\theta(x)$ montre que $(\mu(f_n))_n = \theta(x) = (m_x(f_n))_n$, donc, enfin, $\mu = m_x$ puisque la famille $(f_n)_n$ est totale.

Pour chaque n la fonction $x \longrightarrow m_x(f_n) = \pi_n \circ \theta(x)$ est de première classe de Baire. Puisque toute fonction f continue sur X est limite uniforme de combinaisons linéaires des f_n , la fonction $x \longrightarrow m_x(f)$ est de première classe. Tout ouvert de $M^1_+(X)$ étant réunion dénombrable d'intersections finies d'ouverts de la forme $\{\mu \; ; \; |(\mu(f) - \alpha)| < \varepsilon\}$, il en résulte que l'application $x \longrightarrow m_x$ est de première classe de Baire.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u>. - Soit $x_1 , \ldots , x_n$ des points de X , et

$$A = \{(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \; ; \; t_i \geqslant 0 , \; \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\} .$$

Il est aisé de montrer que l'application $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \longrightarrow m_{\sum_{i=0}^{n} t_i x_i}$ est <u>continue</u> sur A .

Supposons maintenant que X ne soit pas nécessairement métrisable. La tribu des boréliens de Baire de $M^1_+(X)$ (tribu engendrée par les compacts G_δ) est la moins fine rendant mesurables les fonctions continues sur $M^1_+(X)$. Le sous-espace vectoriel $\{\mu \longrightarrow \mu(f) \; ; \; f \in \mathcal{C}(X)\}$ de $\mathcal{C}(M^1_+(X))$ sépare les points. Il engendre donc une sous-algèbre dense de $\mathcal{C}(M^1_+(X))$. Il en résulte que la tribu des boréliens de Baire de $M^1_+(X)$ est la moins fine rendant mesurables les fonctions $\mu \longrightarrow \mu(f)$ $(f \in \mathcal{C}(X))$. La mesurabilité d'une application $x \longrightarrow m_x$ de X dans $M^1_+(X)$ équivaut à celle de $x \longrightarrow m_x(f)$ pour toute f de $\mathcal{C}(X)$. Lorsque X est métrisable la tribu des boréliens de Baire coïncide avec la tribu borélienne.

THÉORÈME 2. - <u>Supposons que</u> X <u>possède une base d'ouverts de cardinal</u> $\leqslant \aleph_1$. <u>Il</u>

<u>existe alors une sélection</u> $x \longrightarrow m_x \in M'_x$ <u>de</u> X <u>dans</u> $M_1^+(X)$, <u>mesurable lorsque</u> X <u>est muni de sa tribu borélienne et</u> $M_1^+(X)$ <u>de la tribu des boréliens de Baire</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il est classique que la condition sur X de l'énoncé implique que $\mathcal{C}(X)$, donc aussi $S(X)$, possède une partie totale de cardinal $\leq \aleph_1$. Soit $(f_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ une telle partie (Ω désignant le premier ordinal non dénombrable).

Désignons par h l'application $\mu \longrightarrow (r(\mu)\ ,\ (\mu(f_\alpha))_\alpha)$ de $M_1^+(X)$ dans $E \times \mathbb{R}^{[0,\Omega[}$. Elle est affine, continue et injective. Son image est un convexe compact K .

Désignons par π la projection canonique de $E \times \mathbb{R}^{[0,\Omega[}$ sur E , par π_α celle sur $E \times \mathbb{R}^{[0,\alpha[}$.

Construisons par induction une famille u_α de fonctions numériques définies sur X , vérifiant les conditions suivantes (où l'on pose $v_\alpha(x) = (x\ ,\ (u_\beta(x))_{\beta<\alpha})$)

(1) u_α est borélienne ;

(2) $v_\alpha(x) \in \pi_\alpha(K)$, $\forall\, x \in X$;

(3) $u_\alpha(x) = \sup\,\{t\ ;\ (v_\alpha(x)\ ,\ t) \in \pi_{\alpha+1}(K)\}$.

Supposons cette construction effectuée pour tout $\beta < \alpha$. Si α est de la forme $\gamma + 1$, la condition (2) est vérifiée puisque (3) l'est au rang γ . Si α est limite, pour $\beta < \gamma$, le compact $K \cap \pi_\beta^{-1}(v_\beta(x))$ est non vide par hypothèse. Cette famille de compacts est filtrante décroissante, donc son intersection, qui n'est autre que $K \cap {}_\alpha^{-1}(v_\alpha(x))$, est non vide, ce qui montre que la condition (2) est encore vérifiée.

Il est donc possible de définir u_α à l'aide de (3), puisque pour tout z de $\pi_\alpha(K)$ il existe un t tel que $(z\ ,\ t) \in \pi_{\alpha+1}(K)$.

Pour terminer la construction, il suffit de prouver que u_α est borélienne. L'application $z \longrightarrow \sup\,\{t\ ;\ (z\ ,\ t) \in \pi_{\alpha+1}(K)\}$ de $\pi_\alpha(K)$ dans $\mathbb{R}$ est s. c. i. d'après la compacité de $\pi_{\alpha+1}(K)$. D'autre part, l'application $x \longrightarrow v_\alpha(x)$ est borélienne. Pour le voir il suffit de remarquer que tout ouvert de $X \times \mathbb{R}^{[0,\alpha[}$ est de réunion dénombrable de produits $V \times \prod_{\beta<\alpha} O_\beta$, où V est un ouvert de X et O_β un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, à extrémités rationnelles, égal à $\mathbb{R}$ sauf pour un nombre fini d'indices, et que l'image réciproque d'un tel ouvert par v_α est borélienne, ce qui termine la construction.

Définissons $m_x = h^{-1}(V_\Omega(x))$. On a déjà $r(m_x) = \pi(V_\Omega(x)) = x$. Montrons que m_x est maximale. Soit $\mu > m_x$. Pour tout α , on a $\mu(f_\alpha) \geq m_x(f_\alpha)$. Supposons $\mu \neq m_x$. La famille (f_α) étant totale, il existe des indices tels que $\mu(f_\alpha) \neq m_x(f_\alpha)$. Soit γ le plus petit d'entre eux. Puisque $\alpha < \gamma \Longrightarrow \mu(f_\alpha) = m_x(f_\alpha) = u_\alpha(x)$, on a $\pi_\gamma(h(\mu)) = v_\gamma(x)$. Ainsi $(v_\gamma(x)\ ,\ \mu(f_\gamma)) \in \pi_{\gamma+1}(K)$, ce qui d'après (3) prouve que $m_x(f_\gamma) < \mu(f_\gamma) \leq m_x(f_\gamma)$. Cette absurdité établit que $\mu = m_x$, donc que m_x est maximale. L'extrémalité de m_x se prouve de façon très similaire.

Pour tout α la fonction $x \longrightarrow m_x(f_\alpha)$ est borélienne. Il en est donc de même de la fonction $x \longrightarrow m_x(f)$ où $f \in \mathcal{C}(X)$ puisque la famille des f_α est totale, ce qui termine tout.

C. Q. F. D.

Remarque. - En général, il n'existe pas de sélection $x \longrightarrow m_x$ qui soit mesurable quand $M_+^1(X)$ est muni de sa tribu borélienne.

En effet, l'ensemble des mesures de Dirac est fermé dans $M_+^1(X)$, et son image réciproque est exactement $\mathcal{E}(X)$, qui peut ne pas être borélien.

THÉORÈME 3. - Supposons X métrisable. Alors il existe une sélection borélienne $x \longrightarrow m_x \in M_x'$ de classe ω .

Démonstration. - Elle est très semblable à la précédente, en remplaçant la famille (f_α) par une suite dense de $S(X)$, en remplaçant l'induction transfinie par une induction dénombrable, et en prouvant par récurrence que u_n est de classe de Baire $\leqslant n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] RAO (M.). - Measurable selection of representing measures, Quaterly J. of Math., Series 2, t. 22, 1971, p. 571-572.

[2] SMITH (W.). - Measurable selection of simplicial maximal measures, J. London math. Soc., Series 2, t. 7, 1973, p. 427-428.

(Texte reçu le 20 décembre 1975)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05