Jean Saint Raymond

Fonctions séparément continues sur le produit de deux espaces polonais

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C2, p. C1-C3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A12_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communication n° 2, 3 p.
Décembre 1975

FONCTIONS SÉPARÉMENT CONTINUES SUR LE PRODUIT DE DEUX ESPACES POLONAIS

par Jean SAINT RAYMOND

Soient P et Q deux espaces polonais, et f une fonction numérique séparément continue sur $P \times Q$. On démontre ici qu'il existe un point x de P tel que f soit continue en chaque point de $\{x\} \times Q$.

LEMME 1. - <u>Soient</u> L <u>et</u> M <u>deux espaces métriques compacts, et</u> f <u>une fonction séparément continue sur</u> $L \times M$. <u>Il existe un point</u> a <u>de</u> L <u>où l'application</u> $x \longmapsto f(x\,,\,.)$ <u>de</u> L <u>dans</u> $\mathcal{C}(M)$ <u>est continue.</u>

Ce résultat est déjà connu. Soit $(\varphi_{i,n})_i$ une partition finie de l'unité sur M, subordonnée à un recouvrement par des ouverts de diamètre inférieur à 2^{-n}. Soient $y_{i,n}$ des points de M tels que $\varphi_{i,n}(y_{i,n}) > 0$. Il résulte de la continuité uniforme des fonctions $f(x\,,\,.)$ que, pour tout x, on a :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \| f(x\,,\,.) - \textstyle\sum_i f(x\,;\,y_{i,n})\varphi_{i,n}\| .$$

Soient g et g_n les applications de L dans $\mathcal{C}(M)$ définies par

$$\begin{cases} g(x) = f(x\,,\,.) \\ g_n(x) = \sum_i f(x\,;\,y_{i,n})\varphi_{i,n} . \end{cases}$$

On voit aisément que g_n est continue, puisque les fonctions $x \longmapsto f(x\,;\,y_{i,n})$ le sont, et que g est limite simple de la suite (g_n). Puisque $\mathcal{C}(M)$ est métrisable et séparable, la fonction de première classe g possède un point de continuité a, ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de ce qui précède et de la continuité de $f(a\,,\,.)$ que f est continue en chaque point de $\{a\} \times M$.

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> P <u>et</u> Q <u>deux espaces polonais, et</u> f <u>une application séparément continue de</u> $P \times Q$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$. <u>Alors il existe une partie</u> X <u>maigre de</u> P <u>telle que</u> f <u>soit continue en tout point de</u> $(P \setminus X) \times Q$.

Désignons par D l'ensemble des points de discontinuité de f, par D_ε l'ensemble des points de $P \times Q$ où l'oscillation de f est supérieure à 2ε. L'ensemble D_ε est fermé dans $P \times Q$, et D est la réunion des $D_{1/n}$. Nous noterons π_1 et π_2 les projections de $P \times Q$ sur P et Q respectivement. Nous désignerons encore par $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (resp. $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$) une base de la topologie de P (resp. Q), et nous munirons P et Q de distances pour lesquelles ils sont complets.

Puisque nous voulons montrer que $\pi_1(D)$ est maigre, il suffit de montrer que $\pi_1(D_\varepsilon)$ est maigre pour tout $\varepsilon > 0$. Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$\pi_1(D_\varepsilon)$ ne soit pas maigre. Pour tout $(i\ ,\ j) \in \underset{\sim}{N}^2$, $\pi_1[D_\varepsilon \cap (\omega_i \times W_j)]$ est analytique ; il existe donc un ouvert $U_{i,j}$ de P , et un F_σ maigre $R_{i,j}$ de P tels que :

$$U_{i,j} \setminus R_{i,j} \subset \pi_1[D_\varepsilon \cap (\omega_i \times W_j)] \subset U_{i,j} \cup R_{i,j} .$$

Nous posons $R = \bigcup_{i,j} R_{i,j}$ qui est un F_σ maigre et

$$P_1 = P \setminus R .$$

Nous construisons par récurrence sur la longueur $|s|$ de la suite finie s d'entiers $\geqslant 1$, des points $(x_s)_{s\in S}$ de P_1 , des points $(y_s)_{s\in S}$ et $(z_s)_{s\in S}$ de Q tels que

$$\begin{cases} \text{(a)} & (x_s\ ,\ y_s) \in D_\varepsilon \\ \text{(b)} & d(x_s\ ;\ x_{s,n}) \leqslant 2^{-\nu(s,n)} \\ \text{(c)} & d(y_s\ ;\ y_{s,n}) \leqslant 2^{-\nu(s,n)} \\ \text{(d)} & d(y_s\ ;\ z_{s,n}) \leqslant 2^{-\nu(s,n)} \\ \text{(e)} & |f(x_s\ ;\ z_{s,n}) - f(x_{s,n}\ ;\ z_{s,n})| > \frac{\varepsilon}{4} , \end{cases}$$

où l'on pose $\nu(s) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ quand s est la suite $(n_1\ ,\ n_2\ ,\ldots,\ n_k)$.

Puisque $\pi_1(D_\varepsilon)$ n'est pas maigre, il n'est pas contenu dans R . Il existe donc $x_\emptyset \in P_1 \cap \pi_1(D_\varepsilon)$. Il existe donc $y_\emptyset \in Q$ tel que $(x_\emptyset\ ,\ y_\emptyset) \in D_\varepsilon$, et on pose $z_\emptyset = y_\emptyset$.

Si x_s , y_s et z_s sont déterminés, il existe pour chaque $n \in \underset{\sim}{N}^*$ des voisinages ouverts ω_i et W_j de x_s et y_s tels que :

$$\begin{cases} \operatorname{diam} \omega_i \leqslant 2^{-\nu(s,n)} \\ \operatorname{diam} W_j \leqslant 2^{-\nu(s,n)} \\ \forall\ y \in W_j\ , \quad |f(x_s\ ,\ y) - f(x_s\ ,\ y_s)| < \frac{\varepsilon}{4} . \end{cases}$$

Puisque $x_s \in \pi[D_\varepsilon \cap (\omega_i \times W_j)]$ et $x_s \notin R_{i,j}$, on a $x_s \in U_{i,j}$. Par définition de D_ε , il existe $x'_{s,n} \in U_{i,j}$ et $z_{s,n} \in W_j$ tels que

$$|f(x'_{s,n}\ ;\ z_{s,n}) - f(x_s\ ,\ y_s)| > \frac{3\varepsilon}{4} .$$

L'ensemble $U_{i,j} \cap \{x\ ;\ |f(x\ ;\ z_{s,n}) - f(x'_{s,n}\ ;\ z_{s,n})| < \frac{\varepsilon}{4}\}$ est un voisinage de $x'_{s,n}$, non contenu dans R . Il existe donc $x_{s,n} \in U_{i,j} \cap P_1$ tel que $\frac{\varepsilon}{4} > |f(x_{s,n}\ ;\ z_{s,n}) - f(x'_{s,n}\ ;\ z_{s,n})|$. On en déduit que

$$|f(x_{s,n}\ ;\ z_{s,n}) - f(x_s\ ;\ z_{s,n})| > \frac{\varepsilon}{4} .$$

Et, puisque $x_{s,n} \in U_{i,j} \cap P_1 \subset U_{i,j} \setminus R_{i,j} \subset \pi_1[D_\varepsilon \cap (\omega_i \times W_j)]$, il existe $y_{s,n} \in W_j$ tel que $(x_{s,n}\ ;\ y_{s,n}) \in D_\varepsilon$.

On voit alors aisément que $x_{s,n}$, $y_{s,n}$ et $z_{s,n}$ satisfont aux conditions exigées.

Nous posons

$$L_k = \{x_s \ ; \ |s| \leq k\}$$
$$M_k = \{y_s \ ; \ |s| \leq k\} \cup \{z_s \ ; \ |s| \leq k\}$$

et nous démontrons par récurrence que L_k et M_k sont compacts. C'est immédiat pour $L_0 = \{x_\emptyset\}$. Si c'est vrai pour L_k, et si l'on désigne par L_k^η l'ensemble fermé $\{x \in P \ ; \ d(x , L_k) \leq \eta\}$, on a

$$L_{k+1} = \cap_{\eta>0}(L_k^\eta \cup (L_{k+1} \setminus L_k^\eta)) ,$$

et la condition (b) fait que $L_{k+1} \setminus L_k^\eta$ est fini, donc compact.

Il en résulte que, puisque L_k est compact, L_{k+1} est précompact et fermé donc compact, puisque P est complet. On démontre de même la compacité de M_k. Il résulte de (b), (c) et (d) que la distance de Hausdorff de L_k à L_{k+1} (resp. M_k à M_{k+1}) est majorée par 2^{-k-1}, donc que la suite (L_k) (resp. (M_k)) est une suite de Cauchy dans l'espace complet des compacts de P (resp. Q). On en déduit que $L = \overline{\bigcup_k L_k}$ est compact dans P et $M = \overline{\bigcup_k M_k}$ compact dans Q. La restriction à $L \times M$ de f est séparément continue ; donc, en vertu du lemme 1, il existe $a \in L$, et V voisinage de a tels que

$$\forall\, x \in V \cap L \ , \ \forall\, z \in M \ , \quad |f(x , z) - f(a , z)| < \frac{\varepsilon}{12}$$

donc

$$\forall\, x \in V \cap L \ , \ \forall\, x' \in V \cap L \ , \ \forall\, z \in M \ , \quad |f(x , z) - f(x' , z)| < \frac{\varepsilon}{6} .$$

On en conclut qu'il existe $s \in S$, $n \in \underset{\sim}{N}^*$ tels que $x_s \in V \cap L$; $x_{s,n} \in V \cap L$ donc

$$|f(x_s \ ; \ z_{s,n}) - f(x_{s,n} \ ; \ z_{s,n})| < \frac{\varepsilon}{6}$$

contrairement à la condition (e).

Cette contradiction prouve que $\pi_1(D_\varepsilon)$ est maigre, donc aussi que $\pi_1(D)$ est maigre, ce qu'on voulait démontrer.

COROLLAIRE 3. - <u>Soient</u> P <u>et</u> Q <u>deux espaces polonais, et</u> f <u>une application continue séparément de</u> $P \times Q$ <u>dans un espace métrique séparable</u> E. <u>Alors il existe un point</u> $a \in P$ <u>tel que</u> f <u>soit continue en tout point de</u> $\{a\} \times Q$.

Puisque E se plonge dans $[0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$, on est ramené au cas où $E = [0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$. Si p_n est la n-ième projection de E sur $[0 , 1]$, il existe, d'après le théorème 2, un ensemble maigre X_n tel que $p_n \circ f$ soit continue en tout point de $(P \setminus X_n) \times Q$. Puisque $\bigcup_n X_n$ est maigre, il existe $a \in P \setminus \bigcup X_n$, et f est continue en tout point de $\{a\} \times Q$.

(Texte reçu le 15 décembre 1975)

Jean SAINT RAYMOND
Mathématiques, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie [Univ. Paris-VI]
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05