Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

RICHARD BECKER

Mesures coniques et intégrale de Daniell

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº 24, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, n° 24, 14 p.

20 mai 1976

MESURES CONIQUES ET INTÉGRALE DE DANIELL

par Richard BECKER

Partie I : Préliminaires.

1. Notations et rappels. — L'expression " E espace faible" signifie que E est un espace vectoriel muni d'une topologie faible séparée ; E' désigne le dual de E pour cette topologie ; quelquefois, il pourra arriver qu'un même espace vectoriel E soit mis en dualité avec plus d'un s. e. v. de E^* (dual algébrique de E) : cela sera alors explicitement précisé.

On dit qu'un cône convexe, contenu dans un espace faible E , est dans la classe $\mathcal{C}$ lorsque ce cône est une partie complète de E ; $\mathcal{S}$ désigne la classe des éléments saillants de $\mathcal{C}$.

Rappelons que, si V est un expace vectoriel ordonné, V^+ désigne le cône des éléments $\geqslant 0$ de V , et V^*_b le s. e. v. de V^* engendré par $(V^*)^+$.

Soit E espace faible ; on note $h(E)$ l'espace vectoriel réticulé (e. v. r.) de fonctions définies sur E engendré par E' , et $S(E)$ la famille des éléments convexes de $h(E)$.

On pose $M(E) = h(E)^*_b$; les éléments de $M(E)$ sont appelés mesures coniques sur E . On dit que $\mu \in M^+(E)$ est portée par un cône $X \subset E$ lorsque ($f \in h(E)$ et $f|_X \geqslant 0$) entraîne ($\mu(f) \geqslant 0$) ; $\mu(f)$ ne dépend alors que de $f|_X$. On dit que $\mu \in M(E)$ est portée par X si, et seulement si, μ^+ et μ^- sont portées par X.

Soient E espace faible, et $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$; $\forall \mu \in M^+(E)$, lorsque μ est portée par X , il existe un élément $r(\mu) \in X$ tel que, $\forall \ell \in E'$, $\mu(\ell) = \ell(r(\mu))$ ([4], 30.7 proposition) ; on dit que $r(\mu)$ est la résultante de μ . On pose

$$K\mu = (r(\lambda) \ ; \ \lambda \in M^+(E) \ \text{avec} \ \lambda \leq \mu) \ ;$$

c'est une partie convexe et compacte de X ([4], 38.2 proposition).

Il existe un plus petit élément de $\mathcal{C}$ qui porte μ , à savoir $(\overline{\cup nK\mu})$ ([4], 38.5 corollaire).

Soient E espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et λ , $\mu \in M^+(E)$, λ et μ étant portées par X . On dit que λ est plus concentrée que μ , et on note $\lambda < \mu$ lorsque, $\forall f \in S(E)$, $\lambda(f) \leqslant \mu(f)$ (ordre de Choquet) ([4] 30.11). On appelle mesure maximale sur X toute mesure maximale pour cet ordre ([4] 30.13). Il est évident que s'il existe une mesure maximale sur X , alors $X \in \mathcal{S}$.

2. Introduction. - G. CHOQUET ([4] 38.13) a démontré qu'un mesure conique $\mu \geqslant 0$ sur un espace E faiblement complet (i. e. $E \in \mathcal{C}$) était une intégrale de Daniell

(i. e. $\forall (f_n) \in h(E)$, avec $f_n \downarrow 0$ sur E , on a $\mu(f_n) \to 0$).

Mais μ n'est pas nécessairement une intégrale de Daniell pour la convergence sur un cône $X \in \mathcal{C}$ qui porte μ (cf. n° 8). Le problème se pose alors de tenter d'édifier une théorie de l'intégration pour une mesure conique $\geqslant 0$ portée par un cône donné de la classe $\mathcal{C}$, et de comparer cette théorie avec la théorie classique de Daniell.

3. Plan. - Après ces quelques préliminaires (partie I), et étant donné un espace faible E , et $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, nous montrerons, dans la partie II, que, pour ainsi dire, la notion de mesure conique portée par X ne change pas lorsque l'oh renforce la topologie de E en rajoutant à E' des éléments de E^* dont la restriction à X est continue.

Soient E espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et $\mu \in M^+(E)$ portée par X .

Nous définirons alors (partie III) l'analogue de l'intégrale supérieure de la théorie classique, pour des fonctions sous-linéaires et s. c. i., définies sur X (n° 12) ; nous prouverons une propriété de continuité pour l'intégrale supérieure (n° 17), grâce à un "lemme de Fatou conique" (n° 9).

Nous introduirons un espace vectoriel réticulé $\Lambda^1(\mu)$ (n° 18) de fonctions sur K_μ contenant $h(E)$, sur lequel un prolongement de μ est défini grâce à l'intégrale supérieure, et nous comparerons $\Lambda^1(\mu)$ avec l'espace $L^1(\mu)$ déduit de μ et de $h(E)$ à l'aide de la théorie classique de Daniell (n° 21 et 23). Le cas où $X \in \mathcal{S}$ et où μ est maximale est particulièrement intéressant (n° 19).

Enfin dans la partie IV, nous prolongerons μ aux fonctions sous-linéaires définies sur X (n° 25) ; on prouvera une propriété de continuité séquentielle de ce prolongement (n° 29), et on introduira un certain espace de fonctions affines sur X (n° 31).

Partie II : Une remarque concernant la définition des mesures coniques.

Soit X un cône convexe contenu dans un espace vectoriel ; on pose $E = X - X$, et on suppose que $X \in \mathcal{C}$ lorsque E est mis en dualité avec un certain espace vectoriel $F \subset E^*$. Il est bien connu ([2] chap. II, §3, p. 7) que $X \in \mathcal{C}$ lorsque E est mis en dualité avec l'espace vectoriel $\tilde{F}$ des éléments de E^* dont la restriction à X est continue, X étant muni de la trace de $\sigma(E , F)$.

A priori, les notions de mesure conique sur E portée par X lorsque E est muni de $\sigma(E , F)$, et lorsque E est muni de $\sigma(E , \tilde{F})$, sont différentes ; nous allons voir qu'en fait il n'en est rien grâce aux propositions 4 et 5.

Nous noterons (E , F) ou $(E , \tilde{F})$ pour indiquer que E est muni de $\sigma(E , F)$ ou de $\sigma(E , \tilde{F})$; remarquons que tout élément de $M(E , \tilde{F})$ induit par restriction un élément de $M(E , F)$.

4. PROPOSITION. - *Tout élément de* $M(E, \tilde{F})$ *porté par* X *est bien déterminé par sa restriction à* $h(E, F)$.

5. PROPOSITION. - *Tout élément* $\mu \in M(E, f)$ *porté par* X *se prolonge univoquement en un élément* $\tilde{\mu} \in M(E, F)$ *porté par* X . *L'application* $\mu \to \tilde{\mu}$ *est bijective linéaire, et positive.*

Ces deux propositions résultent du lemme suivant.

6. LEMME. - *Soit* $\mu \in M^+(E, F)$ *portée par* X ; *pour toute* $f \in h(E, \tilde{F})$, $\forall \varepsilon > 0$, *il existe* $u, v \in h(E, f)$ *tels que* $u \leqslant f \leqslant v$ *sur* X *et* $\mu(v - u) \leqslant \varepsilon$.

Preuve. - Il suffit de prouver le lemme avec f convexe.

Si $f = \sup(f_i)$, $f_i \in \tilde{F}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, prenons $\forall\, i$, u_i , $v_i \in F$ tels que $\forall\, i$, $u_i \leqslant f_i \leqslant v_i$ sur X , et $v_i(r(\mu)) - u_i(r(\mu)) \leqslant \varepsilon/n$ (de tels u_i , v_i existent, à cause du théorème de séparation de Hahn-Banach, appliqué dans l'espace $E \times R$ au convexe fermé $((x, k) ; x \in X , k \geqslant f_i(x))$ et au point

$$(r(\mu) , f_i(r(\mu)) - \varepsilon/2n) ,$$

puis au convexe fermé $((x, k) ; x \in X , k \leqslant f_i(x))$ et au point

$$(r(\mu) , f_i(r(\mu)) + \varepsilon/2n) ;$$

$$u = \sup(u_i) \quad \text{et} \quad v = \sup(v_i) , \quad 1 \leqslant i \leqslant n ,$$

répondent à la question puisque l'on a, sur X ,

$$v - u \leqslant \Sigma_1^n (v_i - u_i) .$$

7. Remarques.

1° Il résulte alors des deux propositions précédentes que les e. v. r. constitués par les éléments de $M(E, F)$ (resp. $M(E, \tilde{F})$) portés par X sont canoniquement isomorphes, ce qui justifie la notation $M(X)$. Pour exprimer ce fait nous dirons que, si $X \in \mathcal{C}$, $M(X)$ ne dépend que du cône X et de sa topologie.

2° Notons également que la notion d'ordre de Choquet sur $M^+(X)$, associée à $S(E, E)$, est la même que celle associée à $S(E, \tilde{F})$: étant donnés $f \in S(E, \tilde{F})$ et $\lambda , \mu \in M^+(X)$ avec $\lambda(g) \leqslant \mu(g)$, $\forall\, g \in S(E, F)$, il existe grâce à 6 une suite (f_n) de $S(E, F)$ avec $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ et $\mu(f_n) \to \mu(f)$. La notion d'ordre de Choquet, et donc aussi de mesure maximale, sur $M^+(X)$ ne dépend donc que du cône $X \in \mathcal{C}$ et de sa topologie ; on notera $\max(X)$ l'ensemble des éléments maximaux de $M^+(X)$ pour cet ordre.

Partie III : L'intégrale supérieure des fonctions sous-linéaires et s. c. i.

8. Exemples.

1° Soit $E = L^\infty$ (classes de fonctions mesurables bornées sur $[0, 1]$ muni de dx), muni de la topologie faible telle que $E' = L^1$, $X = E^+$, et μ la mesure maximale sur X qui représente la constante $1 \in X$. μ n'est pas de Daniell sur $h(E)|_X$:

$\forall$ k et n entiers avec $1 \leq k \leq 2^n$, soit $e(k, n)$ le segment

$$[(k-1)/2^n , k/2^n] \text{ de } [0 , 1] ;$$

soit $h_n \in h(E)$, définie par

$$\forall f \in L^\infty , \quad h_n(f) = \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left(\int_{e(k,n)} f dx\right) ;$$

on a $h_n|_X \to 0$ en décroissant, et $\mu(h_n) = 1$, $\forall$ n.

2° Le disque unité D, considéré comme partie de R^2 et le cercle unité U muni de la mesure de Haar, permettent de construire une mesure conique λ sur R^3, portée par un élément $X \in \mathcal{S}$, telle que λ ne soit pas de Daniell sur $h(R^3)|_{K_\lambda}$:

Soit $X \subset R^3$ le cône de $\mathcal{S}$ admettant $D \times 1$ pour base ; on a $R^+ . K_\lambda \setminus 0 = \mathring{X}$ (intérieur de X) ; noter qu'il existe une suite (f_n) de fonctions continues définies sur D telle que $f_n = 1$ sur U, et (f_n) décroit vers 0 sur

$$\mathring{D} = D \setminus U .$$

Soit $\mu \in M^+(X)$ avec $X \in \mathcal{C}$; nous allons chercher à prolonger μ à des fonctions définies sur X et positivement homogènes, mais non nécessairement continues. Pour cela, le lemme suivant, du genre Fatou, est fondamental :

9. LEMME. - <u>Soient</u> E <u>un espace faible</u>, $X \in \mathcal{C}$ <u>avec</u> $X \subset E$, $\mu \in M^+(X)$, <u>et</u> $f \in h(E)$. <u>Pour tout filtre</u> $\mathcal{F}$ <u>sur</u> $S(E)$ <u>tel que, en tout point de</u> K_μ,

$$f \leq \lim\inf (\mathcal{F}) ,$$

<u>on a</u>

$$\mu(f) \leq \lim\inf(\mu(\mathcal{F})) .$$

<u>Preuve</u>. - Soit X_i, $1 \leq i \leq n$, une famille de cônes polyédraux ([4], 30.1 définition) recouvrant X, telle que, $\forall$ i, $\exists$ $\tilde{f}_i \in E'$ avec $f|_{X_i} = (\tilde{f}_i)|_{X_i}$; une telle famille existe ([4], 30.2 proposition).

$\forall$ i, $\exists$ $\mu_i \in M^+(X_i)$, $1 \leq i \leq n$, avec $\mu = \sum \mu_i$; soit $x_i = r(\mu_i)$; on a

$$x_i \in X_i \cap K_\mu .$$

$\forall$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $F_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tel que $g(x_i) \geq f(x_i) - \varepsilon/n$ pour tout i, et $\forall$ $g \in F_\varepsilon$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, $\forall$ $h \in S(E)$, on a :

$$\mu(h) = \sum \mu_i(h) \geq \sum h(x_i) ,$$

et $\forall$ $g \in F_\varepsilon$

$$\mu(g) \geq \sum f(x_i) - \varepsilon = \mu(f) - \varepsilon ;$$

d'où le lemme.

10. <u>Notation</u>. - Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$; on note $C_i(X)$ la famille des fonctions sous-linéaires et s. c. i., définies sur X et à valeurs dans $R \cup (+\infty)$.

Cette famille est stable par sup quelconque et par multiplication par $\lambda \geq 0$. Remarquons que $C_i(X)$ ne dépend que du cône X et de sa topologie.

Nous aurons également besoin de la remarque suivante.

11. PROPOSITION. - <u>Soit</u> E <u>un espace faible</u>, $X \in \mathcal{C}$ <u>avec</u> $X \subset E$; <u>toute</u>

$$f \in C_i(X)$$

<u>est limite filtrante croissante sur</u> X <u>d'éléments de</u> $S(E)$.

<u>Preuve</u>. - Remarquons que, dans l'espace produit $E \times R$, le sur-graphe G de f ($G = ((x, \lambda)$; $x \in X$ et $\lambda \geq f(x))$) est un cône convexe fermé.

Si $x \in X$ est tel que $f(x) < +\infty$, il suffit de séparer strictement G et $(x, f(x) - \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, par un hyperplan fermé, à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

Si $f(x) = +\infty$, on séparera strictement G et le segment ayant pour extrémités $(0, -1)$ et (x, k) pour tout $k \in R$.

12. <u>Définition</u>. - Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et $\mu \in M^+(X)$; pour toute $f \in C_i(X)$, on pose

$$\mu^*(f) = \sup(\mu(g) \; ; \; g \in S(E) \text{ et } g \leq f \text{ sur } X) .$$

On a $\mu^*(\lambda f) = \lambda\mu^*(f)$, $\forall \lambda > 0$. Notons que $\mu^*(f) \in R \cup (+\infty)$.

Grâce à la proposition suivante, qui résulte du lemme 9, l'application μ^* ne dépend que du cône X et de sa topologie.

13. PROPOSITION. - <u>Soient</u> E <u>un espace faible</u>, $X \in \mathcal{C}$ <u>avec</u> $X \subset E$, et

$$\mu \in M^+(X) .$$

<u>Pour toute</u> $f \in C_i(X)$ <u>et tout filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>sur</u> $S(E)$, <u>admettant une partie formée d'éléments</u> $\leq f$ <u>sur</u> K_μ, <u>et tel que</u> $\mathfrak{F} \to f$ <u>sur</u> K_μ, <u>on a</u>

$$\mu^*(f) = \lim(\mu(\mathfrak{F})) .$$

14. COROLLAIRE. - $\forall f, g \in C_i(X)$, <u>on a</u>

$$(f \leq g \text{ sur } K_\mu) \Longrightarrow (\mu^*(f) \leq \mu^*(g)) .$$

$\forall f, g \in C_i(X)$, <u>on a</u>

$$\mu^*(f + g) = \mu^*(f) + \mu^*(g) .$$

$\forall \mu, \nu \in M^+(X)$, <u>on a</u>

$$(\mu + \nu)(\overset{*}{f}) = \mu(\overset{*}{f}) + \nu(\overset{*}{f}) , \quad \forall f \in C_i(X) .$$

<u>Pour toute famille</u> f_i <u>d'éléments</u> ≥ 0 <u>de</u> $C_i(X)$, <u>on a</u> $\mu^*(\sum f_i) = \sum \mu^*(f_i)$.

15. <u>Notations</u>. - Soient E un espace faible, et $\mu \in M^+(E)$; on note $C_i(\mu)$ la famille des fonctions sous-linéaires et s. c. i., définies sur $R^+.K_\mu$, à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, minorées par un élément (non fixé) de E' . Comme $\forall X \in \mathcal{C}$, tel que $X \subset E$ et $\mu \in M^+(X)$, tout élément de $C_i(\mu)$ est la restriction à $R^+.K_\mu$ d'un élément de $C_i(X)$, on peut donc parler, $\forall f \in C_i(\mu)$, par abus de langage, de $\mu^*(f)$.

Soit $C_i^1(\mu) = (f \;;\; f \in C_i(\mu)$ et $\mu^*(f) < \infty)$.

16. PROPOSITION. - <u>Soit</u> $f \in C_i^1(\mu)$; $\forall x \in K_\mu$, <u>on a</u> $f(x) \leq \mu^*(f)$.

<u>Preuve</u>. - C'est une conséquence immédiate de la proposition 13.

17. PROPOSITION. - <u>Soient</u> E <u>un espace faible</u>, $X \in \mathcal{C}$ <u>avec</u> $X \subset E$ et

$$\mu \in M^+(X) \;;$$

<u>soient</u> $f \in C_i(\mu)$ <u>et</u> $f_1 \in C_i^1(\mu)$; <u>pour tout filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>sur</u> $C_i(\mu)$ <u>tel que, en tout point de</u> K_μ , $f - f_1 \leq \liminf(\mathfrak{F})$, <u>on a</u>

$$\mu^*(f) - \mu^*(f_1) \leq \liminf(\mu^*(\mathfrak{F})) .$$

<u>Preuve</u>. - En raisonnant sur f et sur le filtre $(\mathfrak{F} + f_1) = (F \;;\; \exists \tilde{F} \in \mathfrak{F}$ avec $F = \tilde{F} + f_1)$, on voit, grâce au corollaire 14, qu'il suffit de démontrer le résultat de l'énoncé avec $f_1 = 0$; de plus, d'après la définition 12, il suffit d'envisager le cas où $f \in h(E)$.

Cela étant, la démonstration s'effectue exactement comme au lemme 9, en tenant compte du corollaire 14 et de la proposition 16 :

Soit (μ_i) , $1 \leq i \leq n$, une famille finie d'éléments de $M^+(E)$ telle que, en posant $x_i = r(\mu_i)$, $1 \leq i \leq n$, on ait

$$\mu = \sum \mu_i \quad \text{et} \quad \mu_i(f) = f(x_i) \;,\quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{cf. n}^\circ\ 9) \;;$$

$\forall g \in C_i(\mu)$, on a (cf. n° 14) $\mu^*(g) = \sum_i \mu^*(g)$, d'où

$$\mu^*(g) \geq \sum g(x_i) \quad (\text{cf. n}^\circ\ 16) .$$

$\forall \varepsilon > 0$ donné, $\exists F_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ tel que $\forall g \in F_\varepsilon$, $g(x_i) \geq f(x_i) - \varepsilon/n$, $1 \leq i \leq n$, d'où $\mu^*(g) \geq \mu(f) - \varepsilon$.

18. <u>Définition</u>. - Soient E un espace faible, et $\mu \in M^+(E)$; on pose

$$\Lambda^1(\mu) = C_i^1(\mu) - C_i^1(\mu) \;;$$

c'est un e. v. r. de fonctions sur $R^+.K_\mu$; l'application μ^* se prolonge canoniquement, grâce au corollaire 14, en un élément ≥ 0 de $\Lambda^1(\mu)^*$, noté encore μ^* . On munit $\Lambda^1(\mu)$ de la semi-norme $p(f) = \mu^*(|f|)$. Notons que $p(|f|) = p(f)$ et que, $\forall f , g \geq 0$ dans $\Lambda^1(\mu)$, on a $p(f + g) = p(f) + p(g)$.

19. PROPOSITION. - <u>Soient</u> $X \in \mathcal{C}$ <u>et</u> $\mu \in \max(X)$; <u>alors</u> $\Lambda^1(\mu)$ <u>muni de</u> $p(f)$ <u>est un espace complet</u>.

(La réciproque est fausse : prendre une somme finie de mesures coniques ponctuelles.)

<u>Preuve</u>. - Comme $h(E)$ est partout dense dans $\Lambda^1(\mu)$, il suffit de prouver que, pour toute suite (h_n) de $h(E)$ avec $p(h_n) \leqslant 1/2^n$, $\forall\, n$, la série Σh_n converge : soit $h_n = h_n^+ - h_n^-$; prouvons la convergence de Σh_n^+ : μ étant maximale, on a $p(h_n^+ - \check{h}_n^+) = 0$ (Si $f \in h(E)$, $\check{f}$ désigne le plus grand élément de $C_i(X)$ tel que $f \leqslant f_{|X}$) ; or $\Sigma \check{h}_n^+ \in C_i(X)$; de plus (cf. n° 14)

$$\mu^*(\Sigma \check{h}_n^+) = \Sigma \mu^*(\check{h}_n^+) = \Sigma \mu^*(h_n^+) \leqslant \Sigma 1/2^n ,$$

d'où $\Sigma \check{h}_n^+ \in C_i^1(\mu)$; $\forall\, k$ entier, on a

$$p(\Sigma \check{h}_n^+ - \Sigma_1^k \check{h}_n^+) = \mu^*(\Sigma_{k+1}^{\infty} \check{h}_n^+) \leqslant 1/2^k ;$$

il y a donc convergence de Σh_n^+ vers $\Sigma \check{h}_n^+$ au sens de p.

20. <u>Remarque</u>. - Munissons $\Lambda^1(\mu)$ de la semi-norme N, définie par

$N(f) = \inf(\mu^*(f_1) + \mu^*(f_2)$; $f_1, f_2 \in C_i^1(\mu)$, $f_1, f_2 \geqslant 0$ et $f = f_1 - f_2)$;

on démontrerait que $\Lambda^1(\mu)$, muni de N, est un Banach.

Soient E un espace faiblement complet, $X \subset E$ avec $X \in \mathcal{C}$, et $\mu \in M^+(X)$; μ étant de Daniell sur $h(E)$ ([4] 38.13), on peut développer la théorie de l'intégrale de Daniell ([1] et [5] § 61), et chercher à comparer cette théorie avec ce qui précède.

Notons que la fonction φ_X, définie sur E, valant 0 sur X et $+\infty$ ailleurs, est dans $C_i(E)$, et que $\mu^*(\varphi_{X|X}) = 0$.

21. PROPOSITION. - <u>Lorsque</u> φ_X <u>est</u> μ<u>-intégrable pour la théorie de Daniell, alors</u> μ <u>est de Daniell sur</u> $h(E)_{|X}$. <u>De plus, lorsque</u> $X \in \mathcal{S}$, E <u>est isomorphe à</u> R^N.

<u>Preuve</u>. - Lorsque φ_X est μ-intégrable pour la théorie de Daniell, alors l'ensemble $(E \setminus X)$, où $\varphi_X = \infty$, est μ-négligeable au sens de ([1] 6, et [5] § 61) ; on a donc ([1] 7, et [5] § 61) pour toute suite (f_n) de $h(E)$ qui $\to 0$ en décroissant, sauf peut-être sur $(E \setminus X)$, $\mu(f_n) \to 0$, ce qui est le résultat cherché.

Toute fonction μ-intégrable pour la théorie de Daniell est nulle sur un s. e. v. de E de codimension dénombrable, et donc au moins sur une droite de E lorsque E n'est pas isomorphe à R^N ; dans ce cas, φ_X ne peut pas être μ-intégrable si $X \in \mathcal{S}$, car alors X contiendrait une droite sur laquelle φ_X serait nulle.

Nous allons voir que $\Lambda^1(\mu)$ peut être regardé comme un sous-espace vectoriel-réticulé de $L^1(\mu)$ (espace classique déduit de $h(E)$ et de μ à l'aide de la théorie de Daniell, où deux éléments f et g tels que $\mu(|f - g|) = 0$ sont identifiés). Nous dirons que $f, g \in \Lambda^1(\mu)$ sont <u>μ-équivalents</u> lorsque

$$\mu^*(|f - g|) = 0 .$$

22. PROPOSITION. - $\forall f \in C_i^1(\mu)$ <u>la famille des fonctions de</u> $C_i^1(\mu)$, <u>μ-équivalentes à</u> f, <u>admet un plus grand élément pour l'ordre usuel des fonctions</u>.

<u>Preuve</u>. — D'après la proposition 17, il suffit de prouver que

$(u, v \in C_i^1(\mu)$ avec u, v μ-équivalentes à $f) \Longrightarrow (\sup(u,v)$ μ-équivalente à $f)$.

Or on a

$$u + v = \sup(u , v) + \inf(u , v) \geqslant \sup(u , v) + w ,$$

où w est l'élément de $C_i^1(\mu)$ ainsi obtenu : on se place dans $E \times R$; soit $\Gamma_\mu = (R^+ . K_\mu) \times R$ et Γ_f le sur-graphe de f ;

$$\Gamma_f = ((x , \lambda) ; \ x \in R^+ . K_\mu \ \text{ et } \ \lambda \geqslant f(x)) ;$$

Γ_u, Γ_v et Γ_f sont trois sous-cônes convexes, fermés, relatifs de Γ_μ, et on a $\Gamma_u + \Gamma_v \subset \Gamma_f$; w sera caractérisé par

$$\Gamma_w = (\overline{\Gamma_u + \Gamma_v}) \cap \Gamma_\mu ;$$

comme $f \in C_i^1(\mu)$, on a $f \leqslant w$ puisque $\Gamma_w \subset \Gamma_f$, et on a $f \in C_i^1(\mu)$; comme aussi $w \leqslant u$ et $w \leqslant v$, on a $\mu^*(w) = \mu^*(f)$.

On a donc $\mu^*(u) + \mu^*(v) \geqslant \mu^*(\sup(u , v)) + \mu^*(w)$; d'où

$$2\mu^*(f) \geqslant \mu^*(\sup(u , v)) + \mu^*(f) ,$$

soit $\mu^*(\sup(u , v)) = \mu^*(f)$ puisque $\sup(u , v) \geqslant f$.

La proposition suivante explicite la comparaison de $\Lambda^1(\mu)$ et de $L^1(\mu)$.

23. PROPOSITION. <u>Il existe une injection canonique de</u> $\Lambda^1(\mu)$, <u>modulo la μ-équivalence, dans</u> $L^1(\mu)$. <u>Plus précisément</u> :

1° <u>Soit</u> $f = C - C'$ <u>avec</u> $C , C' \in C_i^1(\mu)$; <u>soient</u> (C_n) <u>et</u> (C'_n) <u>deux suites croissantes de</u> $S(E)$ <u>telles que</u> $C_n \leqslant C$, $C'_n \leqslant C'$ <u>sur</u> K_μ, <u>et</u>

$$\mu(C_n) \to \mu^*(C) , \quad \mu(C'_n) \to \mu^*(C') .$$

<u>A la classe de</u> f <u>dans</u> $\Lambda^1(\mu)$ <u>correspond la classe de</u> $\lim(C_n) - \lim(C'_n)$ <u>dans</u> $L^1(\mu)$.

2° <u>Réciproquement, soient</u> (C_n) <u>et</u> (C'_n) <u>deux suites croissantes de</u> $S(E)$ <u>telles que</u> $\lim(C_n) < \infty$ <u>et</u> $\lim(C'_n) < \infty$. <u>Soit</u> g <u>une fonction sur</u> E <u>telle que</u> $g = \lim(C_n) - \lim(C'_n)$ <u>en tout point où ces limites sont</u> $< \infty$. <u>La classe de</u> g <u>(qui est dans</u> $L^1(\mu)$ <u>) est l'image de la classe dahs</u> $\Lambda^1(\mu)$ <u>de la restriction de</u> g <u>à</u> $R^+ . K_\mu$.

Preuve. - On utilisera l'abréviation L pour "limite", dans les formules.

Pour le 1°, il faut vérifier que $\forall$ S, $S' \in C_i^1(\mu)$ et $\forall$ (S_n), (S'_n), suites croissantes de $S(E)$ telles que $S_n \leqslant S$, $S'_n \leqslant S'$ sur K_μ, et

$$\mu(S_n) \to \mu^*(S), \quad \mu(S'_n) \to \mu^*(S'),$$

on a

$$(f \text{ et } S - S' \text{ sont } \mu\text{-équivalentes dans } \Lambda^1(\mu))$$

$$\Rightarrow (L(C_n) - L(C'_n) \text{ et } L(S_n) - L(S'_n) \text{ sont égales dans } L^1(\mu)).$$

Par abus de langage, on notera encore μ le prolongement canonique de μ à $L^1(\mu)$; on a alors

$$\begin{aligned}
&\mu(|(L(C_n) - L(C'_n)) - (L(S_n) - L(S'_n))|) \\
&\quad = 2\mu(\sup(L(C_n) + L(S'_n), L(C'_n) + L(S_n))) - \mu(L(C_n) + L(S'_n) + L(C'_n) + L(S_n)) \\
&\quad = \lim(2\mu(\sup(C_n + S'_n, C'_n + S_n)) - \mu(C_n + S'_n + C'_n + S_n)) \\
&\quad = 2\mu^*(\sup(L(C_n) + L(S'_n), L(C'_n) + L(S_n))|_{R^+ . K_\mu}) - \\
&\qquad\qquad - \mu^*((L(C_n) + L(S'_n) + L(C'_n) + L(S_n))|_{R^+ . K_\mu}).
\end{aligned}$$

Pour prouver que la première partie de l'expression précédente vaut

$$2\mu^*(\sup(C + S', C' + S)),$$

il suffit d'utiliser la proposition 13 et la remarque suivante :
$\forall$ A, B, a, $b \in C_i^1(\mu)$ avec $a \leqslant A$, $b \leqslant B$ et $\mu^*(a) = \mu^*(A)$, $\mu^*(b) = \mu^*(B)$, on a,

$$\mu^*(\sup(A, B)) = \mu^*(\sup(a, b)),$$

car $\sup(A, B) - \sup(a, b) \leqslant (A - a) + (B - b)$.

Pour achever de prouver ce 1°, il suffit de remarquer que l'on a

$$0 = \mu^*(|(C - C') - (S - S')|) = 2\mu^*(\sup(C + S', C' + S)) - \mu^*(C + S' + C' + S).$$

Le 2° est évident, une fois prouvé 1°.

Partie IV : L'intégrale supérieure des fonctions sous-linéaires.

24. Notations. - Soient E un espace faiblement complet, $\mu \in M^+(E)$, $X \subset E$ tel que $X \in \mathcal{C}$, et $\mu \in M^+(X)$. Dans tout ce qui suit, Y désignera un cône convexe de E tel que :

1° $K_\mu \subset Y \subset X$.

2° Y est une partie héréditaire de X pour le préordre induit par X. C_Y désignera la famille des fonctions sous-linéaires, définies sur Y, à valeurs dans

$R \cup (+\infty)$, minorées par un élément (non fixé) de E' .

25. <u>Définition</u>. – $\forall f \in C_Y$, on pose

$$\mu_Y^*(f) = \inf(\mu^*(g) \; ; \; g \in C_i(X) \text{ et } f \leq g \text{ sur } Y) .$$

Cette définition a toujours un sens, car la fonction valant $+\infty$ sur $X \setminus O$, et 0 en O , est dans $C_i(X)$ et majore tous les éléments de C_Y ; on a

$$\mu_Y^*(f) \in R \cup (+\infty) ,$$

car f est minoré par un élément de E' sur Y .

μ_Y^* ne dépend que du cône X et de sa topologie, μ et Y étant fixés, mais μ_Y^* ne dépend pas du cône X , E , E' , μ et Y étant fixés, vérifiant les conditions de 24.

26. <u>Exemples</u> (éclairant la définition 25).

1° (Notations de 8, 2°) Soit f une fonction affine, définie sur $R^+ . K_\lambda$, telle que $f \geq 1$ sur $\mathring{D} \times 1$; on a $\lambda_X^*(f) > 0$. Or, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une suite (f_n) de $-S(R^3)$, ≥ 0 et croissant vers f sur K_λ , telle que $\lambda(f_n) \leq \varepsilon$, $\forall n$.

Il suffit de construire les restrictions des f_n à $D \times 1$: soit φ une fonction affine > 0 sur D ; $\forall \varepsilon > 0$, construisons une suite croissante (φ_n) de fonctions de $-S(R^2)$ telle que $0 \leq \varphi_n \leq \varepsilon$ sur U et $\varphi_n \to \varphi$ sur $\mathring{D} = D \setminus U$. Soit (g_n) une suite auxiliaire de fonctions concaves continues sur D telle que (g_n) soit croissante, $g_n < \varphi$ partout sur D , $g_n = 0$ sur U , et $g_n \to \varphi$ sur $\mathring{D}$; on prendra $\varphi_1 \in -S(R^2)$ telle que $g_1 \leq \varphi_1 < \varphi$ sur D , et $\varphi_1 \leq \varepsilon/2$ sur U ; soit $\hat{g}_2$ la plus petite fonction concave et s. c. s. définie sur D , telle que $\hat{g}_2 \geq g_2$, et φ_1 ; on a $\hat{g}_2 < \varphi$ sur D , et $\hat{g}_2 = \varphi_1$ sur U , car dans $D \times R^+$, le sous-graphe de $\hat{g}_2$, $((x , t) \; ; \; x \in D \text{ et } 0 \leq t \leq \hat{g}_2(x))$, est l'enveloppe convexe des sous-graphes de g_2 et φ_1 ; comme $\hat{g}_2|_U = \varphi_1|_U$ est continue, $\exists \varphi_2 \in -S(R^2)$ telle que $\hat{g}_2 \leq \varphi_2 < \varphi$ sur D , et $\varphi_2 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4$ sur U .

Supposons construits les $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in -S(R^2)$ tels que $\varphi_i \leq \varphi_j$, pour $1 \leq i \leq j \leq n$ et, pour $1 \leq i \leq n$, $\varphi > \varphi_i \geq g_i$ sur D , et $0 \leq \varphi_i \leq \varepsilon/2 + \dots + \varepsilon/2^i$ sur U: construisons φ_{n+1} : soit $\hat{g}_{n+1}$ la plus petite fonction concave et s. c. s. sur D telle que $\hat{g}_{n+1} \geq g_{n+1}$ et φ_n ; on a, comme pour $\hat{g}_2$, $\hat{g}_{n+1} < \varphi$ sur D , et $\hat{g}_{n+1} = \varphi_n$ sur U ; donc $\exists \varphi_{n+1} \in -S(R^2)$ telle que $\hat{g}_{n+1} \leq \varphi_{n+1} < \varphi$ sur D , et $\varphi_{n+1} \leq \varepsilon/2 + \dots + \varepsilon/2^{n+1}$ sur U . Il est clair que (φ_n) , ainsi construite, va être une suite de $-S(R^2)$ telle que $0 \leq \varphi_n \leq \varepsilon$ sur U , et (φ_n) croît vers φ sur $\mathring{D}$.

2° Il existe un convexe compact métrisable X , que l'on considèrera comme la base d'un cône localement compact, une fonction f convexe et borélienne définie sur X , une mesure de Radon $\mu \geq 0$ dont le support contient $\mathcal{E}(X)$ (ensemble des points extrémaux de X), de sorte que $\mu(f) < \inf(\mu(g) \; ; \; g \geq f$, g convexe

s. c. i. sur X) : on prendra pour X l'ensemble des mesures de Radon $\geqslant 0$ et de masse 1 sur $[0 , 1]$, pour μ la mesure maximale sur X représentant l'élément $(dx) \in X$, et pour f l'application définie par $\forall\, m \in X$, $f(m) = m_d(1)$ (m_d : partie diffuse de m) , on a $\mu(f) = 0$, et $f(r(\mu)) = 1$; on voit que f est borélienne en notant que, $\forall\, k \in R$,

$$(m\ ;\ m \in X \text{ et } 1 - f(m) > k)$$

$$= \cup_{p\in N, q\in N}(m\ ;\ \exists\, x_1 , \dots , x_p \in [0 , 1] \text{ et } \exists\, \alpha_1 , \dots , \alpha_p \geqslant 0 \text{ tels que } m \geqslant \Sigma_1^p \alpha_i \delta_{x_i} \text{ et } \Sigma_1^q \alpha_i \geqslant k + 1/q) = \cup_{p\in N, q\in N} K_{p,q} ,$$

car chaque $K_{p,q}$ est une partie compacte de X .

f convient grâce à la proposition 16.

27. PROPOSITION.

$\forall\, f , g \in C_Y$, $(f \leqslant g) \Longrightarrow \mu_Y^*(f) \leqslant \mu_Y^*(g)$.

$\forall\, f , g \in C_Y$, on a $\mu_Y^*(f + g) \leqslant \mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(g)$.

$\forall\, f \in C_Y$ et $\forall\, \lambda > 0$, on a $\mu^*(\lambda f) = \lambda \mu_Y^*(f)$.

28. PROPOSITION. - Soient $\lambda , \mu \in M^+(X)$ avec $X \in \mathbb{S}$, et $(K_\lambda \cup K_\mu) \subset Y$; on a $(\lambda + \mu)_Y^* = \lambda_Y^* + \mu_Y^*$.

Preuve. - Il est évident que $(\lambda + \mu)_Y^* \geqslant \lambda_Y^* + \mu_Y^*$ à cause du corollaire 14. Soit $f \in C_Y$; il suffit d'envisager le cas où $\lambda_Y^*(f) + \mu_Y^*(f) < \infty$;

$$\forall\, \varepsilon > 0 ,\quad \exists\, u , v \in C_i(X)$$

avec $f \leqslant u$ et v sur Y , et avec $\lambda^*(u) \leqslant \lambda_Y^*(f) + \varepsilon$, $\mu^*(v) \leqslant \mu_Y^*(f) + \varepsilon$. Il suffit alors de trouver $w \in C_i(X)$ avec $f \leqslant w \leqslant u$ et v sur Y ; déterminons w à l'aide de son sur-graphe Γ_w dans $X \times R$: rappelons que le sur-graphe Γ_u de u dans $X \times R$ est défini par $((x , k)\ ;\ x \in X \text{ et } f(x) \leqslant k)$; on a Γ_u et $\Gamma_v \in \mathbb{S}$; Γ_u et Γ_v sont contenus dans un même cône de $\mathbb{S}$ ([3] chap. II, § 6 n° 8, lemme 1 et prop. 11) ; w sera caractérisée par $\Gamma_w = \Gamma_u + \Gamma_v$; on a donc $\Gamma_w \in \mathbb{S}$ ([3] chap. II, § 6 n° 8, prop. 11) et $w \in C_i(X)$; de plus, comme Y est une partie héréditaire de X pour le préordre défini par X , la fonction w est $\geqslant f$ sur Y . w est bien l'élément cherché.

Comme nous ne considérerons plus qu'une seule mesure conique μ , on peut supposer que $X = \overline{(R^+ . K_\mu)}$, car alors $X \in \mathcal{C}$, et X porte μ ([4] 38.5).

29. LEMME. - Lorsque $X \in \mathbb{S}$, pour toute suite croissante (f_n) d'éléments de C_Y , on a

$$\mu_Y^*(\lim(f_n)) = \lim(\mu_Y^*(f_m)) .$$

Preuve. - Il est clair que $\mu_Y^*(\lim(f_n)) \geqslant \lim(\mu_Y^*(f_n))$; de plus si $\lim(\mu_Y^*(f_n))=+\infty$, le résultat est évident. Supposons donc $\lim(\mu_Y^*(f_n)) < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$; $\forall\, n \geqslant 1$, $\exists\, h_n \in C_i(X)$ telle que $f_n \leqslant h_n$ sur Y, et $\mu^*(h_n) \leqslant \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon/2^n$; posons $g_n = \sup(h_1, h_2, \dots, h_n)$; on a $g_n \in C_i(X)$, $f_n \leqslant g_n$ sur Y, et (g_n) est une suite croissante ; montrons que $\forall\, n \geqslant 1$,

$$\mu^*(g_n) \leqslant \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n) .$$

Une fois prouvée cette inégalité, on en déduit que, $\forall\, n \geqslant 1$,

$$\mu^*(g_n) \leqslant \lim(\mu_Y^*(f_n)) + \varepsilon ,$$

et en posant $g_0 = \lim(g_n)$, on a, comme (g_n) est une suite croissante et grâce à la proposition 17,

$$\mu^*(g_0) \leqslant \lim(\mu_Y^*(f_n)) + \varepsilon ;$$

d'où le lemme, car on a, sur Y, $g_0 \geqslant \lim(f_n)$ et $g_0 \in C_i(X)$.

Pour prouver que, $\forall\, n \geqslant 1$, $\mu^*(g_n) \leqslant \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n)$, on procède par récurrence ; le cas $n = 1$ étant évident, supposons l'inégalité établie pour l'entier n ; on a

$$g_{n+1} = \sup(g_n , h_{n+1}) ;$$

soit φ l'élément de $C_i(X)$ dont le sur-graphe Γ_φ est l'enveloppe convexe des sur-graphes Γ_g et Γ_h de g_n et de h_{n+1} (φ existe grâce à des arguments déjà invoqués en 28 : Γ_g et Γ_h sont contenus dans un même cône de $\mathcal{S}$, et $\Gamma_\varphi = \Gamma_g + \Gamma_h \in \mathcal{S}$). Comme Y est une partie héréditaire de X, pour le préordre défini par X, on a $\varphi \geqslant f_n$ sur Y, et $g_{n+1} + \varphi \leqslant g_n + h_{n+1}$; d'où :

$$\mu^*(\varphi) + \mu^*(g_{n+1}) \leqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1})$$

et

$$\mu_Y^*(f_n) + \mu^*(g_{n+1}) \leqslant \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - (1/2^n)) + \mu_Y^*(f_{n+1}) + \varepsilon/2^{n+1} ;$$

ce qui est l'inégalité visée.

30. COROLLAIRE. - <u>On suppose</u> $X \in \mathcal{S}$. <u>Les deux parties suivantes de</u> C_Y <u>sont des cônes convexes stables par limites séquentielles croissantes</u> :

1° $\gamma_1 = (f ;\ f \in C_Y ,\ \mu_Y^*(f) = \sup(\mu(g) ;\ g \in S(E) ,\ g \leqslant f$ <u>sur</u> $Y))$.

2° $\gamma_2 = (f ;\ f \in C_Y ,\ \mu_Y^*(f) = \sup(\mu(g) ;\ g \in h(E) ,\ g \leqslant f$ <u>sur</u> $Y))$.

<u>La seconde de ces deux familles contient la première.</u>

<u>Preuve</u>. - Soient $f , g \in \gamma_1$; on a $\mu_Y^*(f + g) \leqslant \mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(g)$; de plus, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, u , v \in S(E)$ avec $u \leqslant f$ sur Y, $v \leqslant g$ sur Y, et $\mu(u) \geqslant \mu_Y^*(f) - \varepsilon$, $\mu(v) \geqslant \mu_Y^*(g) - \varepsilon$; d'où

$$\mu(u + v) \geqslant \mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(g) - 2\varepsilon \geqslant \mu_Y^*(f + g) - 2\varepsilon ;$$

γ_1 est donc un cône convexe.

γ_1 est stable par limite séquentielle à cause du lemme 29 et du fait que la fonctionnelle ψ, définie sur C_Y par

$$f \mapsto \psi(f) = \sup(\mu(g) \; ; \; g \in S(E) \, , \, g \leqslant f \text{ sur } Y) \, ,$$

vérifie

$$((f_n) \in C_Y \text{ avec } (f_n) \text{ croissante}) \Longrightarrow (\psi(\lim(f_n)) \geqslant \lim(\psi(f_n))) \, .$$

Même démonstration pour γ_2 ; on a $\gamma_1 \subset \gamma_2$, car $S(E) \subset h(E)$.

31. <u>Définition</u>. - Soit $\mathfrak{a}_Y = (f \; ; \; f \in C_Y \cap (-C_Y)$ et $\mu_Y^*(f) = -\mu_Y^*(-f))$; c'est un espace vectoriel qui contient $(E')_{|Y}$.

32. PROPOSITION. - <u>La restriction à</u> K_μ <u>de tout élément</u> f <u>de</u> $\mathfrak{a}_Y$ <u>est continue sur</u> K_μ. <u>De plus</u>, $\mu_Y^*(f) = f(r(\mu))$.

<u>Preuve</u>. - Soit $f \in \mathfrak{a}_Y$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_1 \in C_i^1(\mu)$ et $f_2 \in -C_i^1(\mu)$ avec, sur Y, $f_2 \leqslant f \leqslant f_1$ et $\mu^*(f_1 - f_2) \leqslant \varepsilon$. On a donc, $\forall x \in K_\mu$, d'après la proposition 16, $f_1(x) - f_2(x) \leqslant \varepsilon$; comme f_1 est s. c. i., et f_2 s. c. s., on en déduit la continuité de $f_{|K_\mu}$.

Comme $f_1(r(\mu)) - f_2(r(\mu)) \leqslant \varepsilon$, on a $\mu_Y^*(f) = f(r(\mu))$.

33. PROPOSITION. - <u>Lorsque</u> $X \in \mathbb{S}$, <u>la limite de toute suite croissante d'éléments de</u> $\mathfrak{a}_Y$, <u>majorée par un élément de</u> $\mathfrak{a}_Y$, <u>est dans</u> $\mathfrak{a}_Y$.

<u>Preuve</u>. - Soient (f_n) une suite croissante de $\mathfrak{a}_Y$ majorée par un élément de $\mathfrak{a}_Y$, et $f = \lim(f_n)$; on a $f \in C_Y \cap (-C_Y)$. Il reste à montrer que

$$\mu_Y^*(f) = -\mu_Y^*(-f) \, .$$

Or, d'après le lemme 29, $\mu_Y^*(f) = \lim(\mu_Y^*(f_n))$; comme $(-f_n)$ est une suite décroissante, on a $\mu_Y^*(-f) \leqslant \lim(\mu_Y^*(-f_n))$; d'où $\mu_Y^*(f) \leqslant -\mu_Y^*(-f)$. Comme $f + (-f) = 0$, on a toujours $\mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(-f) \geqslant 0$, et donc $\mu_Y^*(f) = -\mu_Y^*(-f)$.

34. <u>Remarque</u>. - Dans 28, 29, 30, on peut éviter de supposer que $X \in \mathbb{S}$, mais il faut alors supposer que les adhérences des graphes des fonctions considérées ne contiennent pas de droite : cela permet en effet d'utiliser, dans les preuves, des sur-graphes de fonctions qui sont des cônes de $\mathbb{S}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BECKER (R.). - Mesures coniques et intégrale de Daniell, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283, 1976, p. 611-614.

[2] BOURBAKI (N.). - Topologie générale, Chap. 1 et 4, Nouvelle édition. - Paris, Hermann, 1971.

[3] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1 et 2, 2e édition. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1189 a ; Bourbaki, 15).

[4] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis, vol. 1-3. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[5] RIESZ (F.) et NAGY (B. Sz.-). - Leçons d'analyse fonctionnelle, 5e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1968.

(Texte reçu le 29 novembre 1976)

Richard BECKER
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

Référence ajoutée lors de la correction des épreuves (janvier 1977) :

BECKER (R.). - Quelques remarques concernant l'intégrale de Daniell (à paraître).