PETER SJÖGREN

Noyaux singuliers positifs et ensembles exceptionnels

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº 8, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 8, 23 p.

19 décembre 1974

NOYAUX SINGULIERS POSITIFS ET ENSEMBLES EXCEPTIONNELS

par Peter SJÖGREN

1. Introduction.

Nous allons donner quelques généralisations des résultats de l'auteur [2]. On se place dans un groupe abélien G, où on suppose donné un noyau positif K. Le réarrangement décroissant d'une fonction f dans G sera noté f^*. L'inégalité $f^* \leqslant \text{Cte}\, K^*$ définit alors l'espace Λ_K des fonctions qui deviennent dominées par Cte K, après un réarrangement. Si μ est une mesure positive bornée dans G, la convolution $K \star \mu$ existe $\leqslant \infty$, mais n'appartient pas toujours à Λ_K. Le problème étudié dans cet article consiste à caractériser les ensembles F tels que $K \star \mu \in \Lambda_K$ dès que μ est portée par F. Nous montrerons dans la section 2 qu'on peut, sans restriction, supposer F fermé. Comme nous le verrons, le problème est non trivial seulement quand $K^*(t)$ est voisin de Cte t^{-1}, ce qui est précisément le cas pour le noyau $|x|^{-n}$ dans $\underset{\sim}{R}^n$ considéré dans [2].

Les conditions de régularité imposées sur K sont données dans la section 3. Pour formuler la solution du problème, nous introduisons ensuite une propriété des ensembles F, "trous proportionnels", qui signifie que F doit être contenu dans un ensemble à la Cantor, défini en termes des ensembles de niveau de K. La section 5 contient un lemme fondamental, dont la démonstration est une adaptation, et une simplification, des techniques de [2]. Comme on verra dans les sections 6 et 7, la propriété des trous proportionnels donne la caractérisation cherchée dans beaucoup de cas non triviaux, et ceci pour F compact ou non. Pour certains autres noyaux, il faut pourtant ajouter une autre condition, exprimant que F n'est pas trop grand, pour trouver la caractérisation lorsque F est compact. Dans ce dernier cas, il n'y a pas de fermés non compacts qui ont la propriété étudiée.

Le présent texte contient le détail des démonstrations, qui ont été seulement esquissées lors de l'exposé oral.

2. Définitions.

Soit G un groupe localement compact abélien, avec une mesure de Haar notée $|.|$ ou dx. Si $f : \Omega \longrightarrow \overline{\underset{\sim}{R}}$ est définie dans une partie mesurable $\Omega \subset G$, alors sa fonction-distribution est donnée par

$$\lambda_f(\alpha) = |\{x \in \Omega \ ; \ \ |f(x)| > \alpha\}| \ , \quad \alpha > 0 \ ,$$

et

$$f^*(t) = \inf \{\alpha \ ; \ \ \lambda_f(\alpha) \leq t\} \ , \quad 0 < t < |\Omega| \ ,$$

est son réarrangement décroissant. Ces notions sont traitées par exemple dans STEIN-

WEISS [3] (Sect. V. 3). Grosso modo, f^* est la fonction inverse de λ_f.

Définition. - Soit $K \geq 0$ une fonction dans G, mesurable par rapport à la tribu de Baire, et dont la fonction-distribution $\lambda = \lambda_K$ n'est ni identiquement nulle, ni identiquement infinie. Si, en outre, il existe une constante A telle que

$$(2.1) \qquad \lambda(\alpha/2) \leq A\lambda(\alpha) \ , \quad \alpha > 0 \ ,$$

et

$$(2.2) \qquad K^*(t/2) \leq AK^*(t) \ , \quad 0 < t < |G| \ ,$$

alors K sera dit un noyau admissible.

On voit facilement que (2.1-2) sont respectivement équivalentes à

$$(2.1') \qquad K^*(t/A) \geq 2K^*(t) \ , \quad 0 < t < |G| \ ,$$

et

$$(2.2') \qquad \lambda(\alpha/A) \geq \min(2\lambda(\alpha) \ , |G|) \ , \quad \alpha > 0 \ ,$$

Si G est compact, ceci entraîne $\mathrm{ess}_G \inf K > 0$. Quitte à multiplier K par une constante positive, nous pouvons dorénavant supposer $\mathrm{ess}_G \inf K < 1$ dans ce cas, ce qui ne restreindra pas la généralité de nos démonstrations. Si $\Omega \subset G$ est mesurable avec $|\Omega| > 0$, nous allons associer à tout noyau admissible un espace de fonctions dans Ω.

Définition. - Soit $\Lambda_K(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pour lesquelles il existe une constante C telle que $f^*(t) \leq CK^*(t)$ pour $0 < t < |\Omega|$.

Si $f \in \Lambda_K(\Omega)$, on note $\|f\|_\Omega$ la plus petite des C qui conviennent dans cette définition. A partir de (2.2) et de l'inégalité bien connue

$$(f + g)^* (t) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2) \ ,$$

on montre que

$$\|f + g\|_\Omega \leq A(\|f\|_\Omega + \|g\|_\Omega) \ .$$

Puisque $\|\cdot\|_\Omega$ est positivement homogène, c'est donc une quasi-norme. Avec la topologie associée, $\Lambda_K(\Omega)$ est un quasi-Banach, car le fait qu'il soit complet se déduit sans difficulté. L'inégalité $f^* \leq CK^*$ est équivalente à $\lambda_f \leq C' \lambda_K$, avec une autre constante C'. On montre aussi qu'un ensemble $M \subset \Lambda_K(\Omega)$ est borné (par rapport à $\|\cdot\|_\Omega$) si, et seulement si, il existe une constante C' telle que $\lambda_f \leq C' \lambda_K$ pour tout $f \in M$. Quand une fonction f est définie dans G, nous écrirons souvent $f \in \Lambda_K(\Omega)$ au lieu de $f|\Omega \in \Lambda_K(\Omega)$.

Si μ est une mesure positive bornée dans G, la convolution $U^\mu = K * \mu$ est partout définie dans G, à valeurs dans $[0, \infty]$. Dans la suite, toute mesure $\mu, \nu, \ldots$ dans G sera positive et bornée.

Définition. - Un sous-ensemble relativement fermé F de Ω sera dit de convolution dans Ω si $U^\mu \in \Lambda_K(\Omega)$ pour toute mesure μ portée par F.

Il est clair qu'un ensemble fini est toujours de convolution. Nous étudierons surtout les ensembles de convolution dans G , compacts ou non.

Le simple lemme suivant se démontre comme le lemme 1 dans [2].

LEMME 1. - *Si* F *est de convolution dans* Ω , *alors il existe une constante* C *telle que* $\|U^{\mu}\|_{\Omega} \leq C\|\mu\|$ *pour toute mesure* μ *portée par* F .

Si F est de convolution, on note $C_{\Omega}(F)$ la plus petite des constantes qui conviennent dans ce lemme ; sinon, on met $C_{\Omega}(F) = +\infty$. Alors C_{Ω} est une fonction d'ensemble non décroissante vérifiant $C_{\Omega}(F_1 \cup F_2) \leq \mathrm{Cte}(C_{\Omega}(F_1) + C_{\Omega}(F_2))$. A cause de la proposition suivante, il suffit de considérer des F fermés. Dans [2] (p. 3), on a vu qu'il n'y a aucun résultat analogue pour les familles décroissantes.

PROPOSITION 1. - *Si* $(F_i)_{i\in I}$ *est une famille filtrante croissante de parties relativement fermées de* Ω , *et si* F *est la fermeture dans* Ω *de* $\bigcup_{i\in I} F_i$, *alors*

$$C_{\Omega}(F) = \sup_{i\in I} C_{\Omega}(F_i) .$$

Démonstration. - Il suffit de montrer que $C_{\Omega}(F) \leq \sup C_{\Omega}(F_i)$. Soit μ une mesure portée par F . Prenons une suite croissante $K_j \nearrow K$ avec $K_j \in L^1(G)$. Alors $K_j * \mu \nearrow K * \mu$, et, d'après le lemme 3.5 de [3] (chap. V, p. 190), on a

$$(K_j * \mu)^* (t) \longrightarrow (K * \mu)^* (t) \quad \text{pour} \quad 0 < t < |\Omega| ,$$

et donc

$$\|K_j * \mu\|_{\Omega} \longrightarrow \|K * \mu\|_{\Omega} .$$

(Les réarrangements décroissants sont pris dans Ω .) Il est clair que $K_j * \mu$ peut être approchée dans $L^1(\Omega)$, et a fortiori en mesure, par des convolutions $K_j * \nu$, où $\|\mu\| = \|\nu\|$, et ν est portée par un ensemble fini, contenu dans un F_i . En utilisant la proposition suivante, on peut alors, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver une telle ν avec $\|K_j * \nu\|_{\Omega} > \|K_j * \mu\|_{\Omega} - \varepsilon$. On peut donc aussi avoir

$$\|K * \nu\|_{\Omega} > \|K * \mu\|_{\Omega} - \varepsilon ,$$

d'où la proposition 1, puisque μ est arbitraire.

PROPOSITION 2. - *Si* f *et* $f_i \in \Lambda_K(\Omega)$, $i = 1 , 2 , \dots$, *et si* $f_i \longrightarrow f$ *en mesure, alors*

$$\underline{\lim} \|f_i\|_{\Omega} \geq \|f\|_{\Omega} .$$

Démonstration. - Soit $a < \|f\|_{\Omega}$. Alors il existe un t_0 avec $0 < t_0 < |\Omega|$ et $f^*(t) > aK^*(t_0)$ pour $t = t_0$. Cette inégalité a lieu aussi si $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$, pour un $\varepsilon > 0$, car f^* est continue à droite. On peut donc trouver un $\delta > 0$ tel que $f > aK^*(t_0) + \delta$ sur un ensemble E de mesure $t_0 + \varepsilon$. Par conséquent, $f_i > aK^*(t_0)$ sur E , à l'exception éventuelle d'une partie de E de mesure $< \varepsilon$, si i est suffisamment grand. Il en découle que $f_i^*(t_0) > aK^*(t_0)$ pour ces i , ce qui prouve la proposition 2.

3. Propriétés de régularité des noyaux.

Posons $E(\alpha) = \{x \in G \; ; \; K(x) > \alpha\}$ pour $\alpha \geq 0$, et $E(\infty) = \bigcap_{\alpha>0} E(\alpha)$.

Définition. - Un noyau admissible K sera dit régulier s'il existe une constante A telle que

(i) $- E(\alpha) \subset E(\alpha/A)$, $\alpha > 0$,

(ii) $E(\alpha) + E(\alpha) \subset E(\alpha/A)$, $\alpha > 0$,

(iii) il existe un η avec $0 \leq \eta < 1$ tel que pour $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ et $x \in G$, on ait

$$|(E(\alpha_1) + E(\alpha_3)) \cap \complement E(\alpha_1) \cap (x + E(\alpha_2))| \leq A|E(\alpha_2)|^{\eta} \; |E(\alpha_3)|^{1-\eta}$$

et

$$|(\complement E(\alpha_1) + E(\alpha_3)) \cap E(\alpha_1) \cap (x + E(\alpha_2))| \leq A|E(\alpha_2)|^{\eta} \; |E(\alpha_3)|^{1-\eta} .$$

En modifiant éventuellement sa valeur, on peut supposer que la constante A est la même que dans (2.1-2). On notera toujours de la même façon A , toute (grande) constante qui ne dépend que de K . Observons que (i) signifie que

$$A^{-1} \leq K(- x)/K(x) \leq A .$$

La propriété (ii) est équivalente à $K(x + y) \geq A^{-1} \min(K(x) , K(y))$, et à cause de (i), on peut supposer cette inégalité valable pour toutes les combinaisons $K(\pm x \pm y)$, en augmentant éventuellement la valeur de A . Une conséquence facile en est que $K(y) > AK(x)$ entraîne $A^{-1} \leq K(\pm x \pm y)/K(x) \leq A$. Notons que (iii) est une condition de régularité pour la frontière de $E(\alpha)$. On voit facilement qu'elle est vérifiée dans le cas important où $G = \underset{\sim}{R}^n$ et les $E(\alpha)$ sont des boules, centrées à l'origine. Comme autres exemples de noyaux réguliers on peut citer

$$K(x) = (\Sigma_1^n |x_i|^{\alpha_i})^{-1} \quad \text{dans } \underset{\sim}{R}^n \text{ , avec } \alpha_i > 0 .$$

Nous allons déduire quelques propriétés simples des noyaux réguliers qui seront importantes dans toute la suite. D'abord, $E(\alpha)$ est un voisinage de 0 relativement compact si $0 < \alpha < \infty$. Car si χ est la fonction caractéristique de $E(A\alpha)$, la convolution $g = \chi(x) * \chi(- x)$ est continue et positive à l'origine et donc dans un voisinage V de 0 . Alors

$$V \subset \{g \neq 0\} \subset E(A\alpha) - E(A\alpha) \subset E(\alpha) ,$$

à cause de (ii), et il reste à montrer seulement que $E(\alpha)$ est relativement compact. Prenons pour cela un compact $B \subset G$ tel que

$$|B \cap E(\alpha)| > |E(\alpha)|/2 \quad \text{et} \quad |B \cap E(\alpha/A)| > |E(\alpha/A)| - |E(\alpha)|/2 .$$

Alors $E(\alpha)$ est contenu dans le compact $B - B$, car s'il y avait un $x \in E(\alpha)$ avec $x \notin B - B$, l'ensemble $x + B \cap E(\alpha)$ serait disjoint de B mais contenu dans $E(\alpha/A)$. Mais ceci est impossible à cause de la construction de B . Dans la suite, nous utiliserons souvent (i) et (ii), ainsi que (2. 1-2), sans mention expresse.

Notons que $E(0)$ est un sous-groupe ouvert et $E(\infty)$ un sous-groupe compact. On pourrait se ramener au cas d'une singularité ponctuelle en passant au groupe quotient $G/E(\infty)$, mais cela ne semble pas simplifier beaucoup le problème.

Prenons maintenant $0 < \alpha < \beta$. Si $x_i \in E(\alpha)$ pour $i = 1 , \dots , N$ et si les translatés $x_i + E(\beta)$ sont disjoints deux à deux, alors

$$\cup_i (x_i + E(\beta)) \subset E(\alpha) + E(\beta) \subset E(\alpha/A) .$$

La mesure (de Haar) de cette réunion est donc majorée par $\lambda(\alpha/A) \leqslant C\lambda(\alpha)$. Ici, et dans la suite, C est une constante générique, non nécessairement la même chaque fois. Quand c'est nécessaire, nous indiquerons les variables dont C dépend. Cette fois nous avons $C = C(A)$. Il découle que $N \leqslant C\lambda(\alpha)/\lambda(\beta)$, et les valeurs possibles de N sont donc bornées. Supposons maintenant de plus que N prend sa valeur maximale. Alors $E(\alpha) \subset \cup_i (x_i + E(\beta/A))$, car si $x \in E(\alpha)$, le translaté $x + E(\beta)$ doit rencontrer un $x_i + E(\beta)$ par maximalité, d'où

$$x \in x_i + E(\beta) - E(\beta) \subset x_i + E(\beta/A) .$$

On a donc $N \geqslant \lambda(\alpha)/\lambda(\beta/A)$ et par conséquent $N \sim \lambda(\alpha)/\lambda(\beta)$. (La relation $f \sim g$ signifie $C^{-1} \leqslant f/g \leqslant C$.) Un tel ensemble maximal de translatés sera appelé un pavage dans $E(\alpha)$ de translatés de $E(\beta)$. Notons aussi qu'un point $x \in E(\alpha)$ peut être contenu dans au plus C des $x_i + E(\beta/A)$. Car $x \in x_i + E(\beta/A)$ entraîne $x_i + E(\beta) \subset x + E(\beta/A^2)$, et $E(\beta/A^2)$ peut contenir au plus C translatés de $E(\beta)$ mutuellement disjoints, par comparaison de mesure de Haar. Des pavages analogues peuvent aussi être placés dans des ensembles autres que $E(\alpha)$. On appellera x le centre du translaté $x + E(\alpha)$, et on parlera également de translatés concentriques.

A cause de la condition (i), la classe des noyaux réguliers ne contient pas le noyau simple défini dans $\underset{\sim}{R}^n$, et $= |x|^{-\gamma}$ si $x_n > 0$, et $= 0$ sinon, $\gamma > 0$. Dans ce cas, on peut pourtant placer dans chaque $E(\alpha)$ une boule dont le volume est proportionnel à $\lambda(\alpha)$, et ce noyau appartient à une classe plus large, que nous allons maintenant introduire.

<u>Définition</u>. - Un noyau admissible sera dit semi-régulier s'il existe une famille décroissante $(E'(\alpha))_{\alpha>0}$ de parties mesurables de G vérifiant (i), (ii) et (iii) et telle que pour tout $\alpha > 0$

(a) il existe $z_\alpha \in G$ tel que

$$z_\alpha + E'(\alpha) \subset E(\alpha) \subset z_\alpha + E'(\alpha/A) ,$$

(b) $0 \in \overline{E(\alpha)}$.

Ici la condition (b) peut être obtenue par une translation, si les autres sont vérifiées. A partir de (a) et (b), on déduit

$$z_\alpha \in -\overline{E'(\alpha/A)} \subset -E'(\alpha/A^2) \subset E'(\alpha/A^3)$$

et

$$E(\alpha) \subset -E'(\alpha/A^2) + E'(\alpha/A) \subset \pm E'(\alpha/A^3) .$$

On a aussi $|E'(\alpha)| \sim |E(\alpha)|$. Ces relations seront utiles dans la suite. Un exemple d'un noyau semi-régulier dans le plan est donné par

$$K(x_1 , x_2) = |x_1|^{-\gamma} \text{ si } |x_2| < x_1^2 \text{ et } x_1 > 0 \text{ , et } K = 0 \text{ sinon.}$$

Ici $\gamma > 0$, et comme $E'(\alpha)$ on peut prendre un rectangle convenable.

LEMME 2. - Soit K un noyau semi-régulier. Un compact $F \subset G$ est de convolution dans G si, et seulement si, $F \cap (x + E(1))$ est de convolution dans $x + E(1)$ pour tout $x \in G$.

Démonstration. - La condition étant évidemment nécessaire, nous allons montrer qu'elle est suffisante. Supposons que F vérifie la condition, et soit μ une mesure de probabilité portée par F . Puisque $E'(A)$ est un voisinage de 0 , on peut recouvrir F par un nombre fini de translatés $x_j + z_1 + E'(A)$, $j=1,\dots,N$, où z_1 est introduit dans la définition des noyaux semi-réguliers. Soit μ_j la restriction de μ à $x_j + z_1 + E'(A)$. Comme $x_j + z_1 + E'(A) \subset x_j + E(1)$, on a $U^{\mu_j} \in \Lambda_K(x_j + E(1))$ d'après l'hypothèse, et puisque $U^\mu \leqslant \sum U^{\mu_j}$, il suffit d'estimer U^{μ_j} dans le complémentaire de $x_j + E(1)$. Si $U^{\mu_j}(x) > \alpha > 0$ pour un $x \notin x_j + E(1)$, alors il existe $y \in x_j + z_1 + E'(A)$ avec $x - y \in E(\alpha)$, car $\|\mu_j\| \leqslant 1$. Les propriétés des noyaux semi-réguliers entraînent alors

$$x \in y + E(\alpha) \subset x_j + z_1 + E'(A) + E(\alpha) \subset x_j + z_1 + E'(A) + E'(\alpha/A^3) .$$

Si $\alpha \geqslant A^4$, on a $x \in x_j + z_1 + E'(1) \subset x_j + E(1)$, ce qui est impossible, et si $\alpha < A^4$, on a $x \in x_j + z_1 + E'(\alpha/A^4)$. Par conséquent,

$$|\{U^{\mu_j} > \alpha\}| \leqslant |E'(\alpha/A^4)| \leqslant C\lambda(\alpha) ,$$

d'où $U^{\mu_j} \in \Lambda_K$. La démonstration est complète.

Notre problème est trivial dans certains cas. D'abord, si K est localement intégrable et si

$$\int_{E(\alpha)} K(x)\, dx \leqslant C\alpha\lambda(\alpha) \tag{3.1}$$

pour tout $\alpha > 0$, alors $\Lambda_K(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout Ω . Car (3.1) est équivalent à

$$K^{**}(t) = t^{-1} \int_0^t K^*(s)\, ds \leqslant CK^*(t) ,$$

où l'égalité définit K^{**} . Alors $\Lambda_K(\Omega)$ peut être caractérisé par l'inégalité $f^{**} \leqslant CK^*$. Comme $f \longrightarrow f^{**}$ est une application sous-additive, on obtient un espace normé (cf. [3], p. 203-204). HAAKER [1] a montré que la condition (3.1) est nécessaire et suffisante pour que $\Lambda_K(G)$ soit un Banach. Dans ce cas, tout fermé est de convolution. Comme exemple on peut citer tout noyau vérifiant $\lambda(\alpha) = C\alpha^{-p}$, $p > 1$. Au contraire, si

$$(3.2) \qquad \overline{\lim}_{N\to\infty}\ \overline{\lim}_{\alpha\to\infty} \frac{N\lambda(\alpha)}{\lambda(\alpha/N)} = +\infty ,$$

par exemple quand $\lambda(\alpha) = C\alpha^{-p}$, $p < 1$, il y a peu de fermés de convolution. Notamment, si K est semi-régulier et si $E'(\infty) = \bigcap_{\alpha>0} E'(\alpha) = \{0\}$, alors tout fermé de convolution dans G est fini. Car si $F \subset G$ est infini, on peut, pour tout N, trouver N points $x_j \in F$ et un $\alpha > 0$ tels que les translatés $x_j + E(\alpha)$ sont disjoints deux à deux. Si la mesure μ se compose d'une masse ponctuelle $1/N$ en chaque x_j, on a $U^\mu > \alpha/N$ dans l'ensemble $\bigcup_j (x_j + E(\alpha))$, dont la mesure est $N\lambda(\alpha)$. A cause du lemme 1 et de (3.2), on peut voir que F n'est pas de convolution.

4. Trous proportionnels.

Pour traiter les noyaux pour lesquels $\lambda(\alpha)$ est voisin de $C\alpha^{-1}$, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition. - On dira qu'un ensemble $F \subset G$ a des trous proportionnels s'il existe $N > 1$ tel que, pour tout $\alpha > 0$ et tout translaté $x + E(\alpha)$, il existe un translaté

$$y + E(N\alpha) \subset x + E(\alpha) \quad \text{avec} \quad (y + E(N\alpha)) \cap F = \emptyset .$$

Si K est semi-régulier, on voit facilement qu'on peut remplacer les $E(\alpha)$ par les $E'(\alpha)$ dans cette définition, sans la changer. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de Cantor classique est un exemple typique d'un ensemble possédant cette propriété, quand les $E(\alpha)$ sont des intervalles et K est admissible. Plus généralement, tout ensemble ayant des trous proportionnels est contenu dans un ensemble à la Cantor, si K est régulier, comme nous allons maintenant voir.

Soient K un noyau régulier, et F un sous-ensemble relativement fermé de $E(1)$, ayant des trous proportionnels. Le nombre M sera précisé plus tard ; il vérifiera $M > A^3 N$, où N est le facteur dans la définition ci-dessus. On place d'abord dans l'ensemble $B = E(1) \setminus (\complement E(1) + E(M/A^2))$ un pavage de translatés de $E(M)$, c'est-à-dire, un nombre maximal de translatés $x_j + E(M)$ disjoints deux à deux, avec $x_j \in B$. Comme nous avons vu, les ensembles $x_j + E(M/A)$ recouvrent alors B. On a $E(A) \subset B$, et par définition il existe un translaté $y + E(NA)$, contenu dans $E(A)$ et disjoint de F. Alors y appartient à un $x_i + E(M/A)$, d'où

$$x_i + E(M) \subset y - E(M/A) + E(M) \subset y + E(M/A^2) \subset y + E(NA) ,$$

puisque $M > A^3 N$. En particulier, $T^1 = x_i + E(M)$ ne rencontre pas F, et on appellera T^1 un trou d'ordre 1. Les autres translatés $x_j + E(M)$, $j \neq i$, seront des cellules d'ordre 1. Notons que $x_j + E(M/A) \subset E(1)$ pour tout j.

Plaçons maintenant un pavage de translatés de $E(M^2)$ dans

$$E(1) \setminus ((\complement E(1) \cup T^1) + E(M^2/A^2)) ,$$

c'est-à-dire, grosso modo, dans l'ensemble $E(1) \setminus T^1$ mais non pas trop près de sa frontière. Comme ci-dessus, on peut trouver dans chaque cellule d'ordre 1 un translaté $x + E(M^2)$, appartenant à ce pavage et disjoint de F . On appelle alors $x + E(M^2)$ un trou d'ordre 2 . Les autres translatés de $E(M^2)$ du pavage seront des cellules d'ordre 2 . Pour chaque trou ou cellule d'ordre 2 , soit $y + E(M^2)$, on a

$$y + E(M^2/A) \subset E(1) \setminus T^1 .$$

On appelle T^2 la réunion des trous d'ordre 2 .

De façon analogue, on place un pavage de translatés de $E(M^3)$ dans

$$E(1) \setminus ((\complement E(1) \cup T^1 \cup T^2) + E(M^3/A^2)) ,$$

et toute cellule d'ordre 2 contient un translaté appartenant à ce pavage et disjoint de F , qui sera appelé un trou d'ordre 3 . Les autres translatés du pavage seront des cellules d'ordre 3 , et T^3 est la réunion des trous d'ordre 3 .

On continue ce procédé, obtenant des trous et des cellules de tous les ordres $n \geq 1$, qui sont des translatés de $E(M^n)$ dont les centres appartiennent à l'ensemble

$$E(1) \setminus ((\complement E(1) \cup T^1 \cup \ldots \cup T^{n-1}) + E(M^n/A^2)) .$$

Ici T^j est la réunion des trous d'ordre j . Si T_1 et $T_2 = x + E(M^n)$ sont deux trous d'ordre m et n , respectivement, avec $m \leq n$, alors on voit que $T_1 + E(M^n)$ ne rencontre pas $x + E(M^n/A)$. Notons aussi que

$$x + E(M^n/A) \supset T_2 + E(M^n) .$$

Examinons cette structure plus en détail. Avec $x \in G$ quelconque on met $D = x + E(M^q)$, où $q \geq 0$ est entier. Alors D rencontre au plus $C = C(A)$ trous d'ordre $\leq q$. Pour le voir, prenons pour chaque trou d'ordre $\leq q$ qui rencontre D un point x_j dans son intersection avec D . Alors les ensembles $x_j + E(M^q)$ sont disjoints deux à deux à cause des propriétés des trous, et ils sont tous contenus dans $x + E(M^q/A)$. Le nombre des x_j est donc au plus

$$\lambda(M^q/A)/\lambda(M^q) \leq C .$$

LEMME 3. - <u>Pour un</u> $M_0 = M_0(A , \eta , N)$ <u>et tout</u> $M \geq M_0$ <u>il existe des nombres</u>

$$\varepsilon = \varepsilon(A , \eta , M) > 0 \quad \underline{\text{et}} \quad C = C(A , \eta)$$

<u>tels que</u>

$$|(D \cap E(1)) \setminus \textstyle\bigcup_{i<n} T^i| \leq C(1 - \varepsilon)^{n-q} |D| , \qquad n > q .$$

Dans le cas d'un noyau radiel dans $\underset{\sim}{R}^m$, on utilise des pavages cubiques comme dans [2], et le lemme devient trivial, avec $\varepsilon = M^{-m}$. Evidemment $|D| = \lambda(M^q)$.

Pour $D = E(1)$ le lemme entraîne

$$|E(1) \setminus \bigcup_{i>0} T^i| = 0 \quad \text{et donc} \quad |F| = 0 ,$$

puisque F est disjoint des trous.

<u>Démonstration du lemme</u>. - Mettons pour $n = q+1, q+2, \ldots$

$$V_n = (D \cap E(1)) \setminus ((\complement D + E(M^n/A^3)) \cup \bigcup_{i<n} T^i) .$$

Alors tout point de $V_{n-1} \setminus V_n$ est contenu dans un trou $x_0 + E(M^{n-1})$ (d'ordre $n-1$) qui rencontre V_{n-1}. Ce trou est suffisamment éloigné de $\complement D$ pour que $x_0 + E(M^{n-1}/A)$ soit disjoint de $\complement D + E(M^n/A^3)$, comme on le vérifie facilement. Par conséquent, $(x_0 + E(M^{n-1}/A)) \setminus (x_0 + E(M^{n-1}))$ est contenu dans V_n. Comme $|x_0 + E(M^{n-1})| = \lambda(M^{n-1})$ est majorée par la mesure de cette différence d'après (2.2'), on obtient, en sommant sur les différentes parties de $V_{n-1} \setminus V_n$, que $|V_{n-1} \setminus V_n| \leqslant |V_n|$, d'où

$$|V_{n-1}| \leqslant 2|V_n| . \tag{4.1}$$

Cette inégalité est la raison pour laquelle on soustrait les points voisins de $\complement D$ en définissant V_n.

Considérons maintenant les trous et cellules d'ordre n qui sont contenus dans V_n. Les translatés de $E(M^n/A)$ concentriques à ces trous et cellules recouvrent $V_n \setminus (\complement V_n + E(M^n/A^2))$, à cause des propriétés des pavages. Comme une cellule d'ordre n contient un trou d'ordre $n+1$, il s'ensuit que la mesure totale m des trous d'ordre n et $n+1$ contenus dans V_n vérifie

$$m \geqslant (\lambda(M^{n+1})/\lambda(M^n)) \, |V_n \setminus (\complement V_n + E(M^n/A^2))|/C . \tag{4.2}$$

Les constantes C sont comme dans l'énoncé du lemme. En vue d'estimer par en-dessous le membre droit de (4.2), on va considérer $|V_n \cap (\complement V_n + E(M^n/A^2))|$. L'ensemble $\complement V_n$ est composé de plusieurs parties, dont chacune donne une contribution à $|V_n \cap (\complement V_n + E(M^n/A^2))|$, et il faut estimer ces contributions. D'abord, à cause de (iii) dans la définition des noyaux réguliers, la mesure de

$$V_n \cap (\complement E(1) + E(M^n/A^2))$$

ne dépasse pas $C(\lambda(M^q))^{\eta} (\lambda(M^n))^{1-\eta}$. La contribution de $\complement D + E(M^n/A^3)$ est dominée par la même expression, et également celles des trous d'ordre $\leqslant q$ qui rencontrent D. Finalement, supposons qu'un trou d'ordre j avec $q < j < n$ rencontre D. Alors de deux choses l'une : ou bien ce trou est situé loin de $\complement D$, et par conséquent il est contenu dans V_j, ou bien il est contenu dans $\complement D + E(M^j/A^4)$. La mesure totale des trous d'ordre j rencontrant D est donc majorée par $|V_j| + C(\lambda(M^q))^{\eta} (\lambda(M^j))^{1-\eta}$, et le nombre de tels trous par

$$|V_j|(\lambda(M^j))^{-1} + C(\lambda(M^q)/\lambda(M^j))^{\eta} .$$

Ceci donne une contribution à $|V_n \cap (\complement V_n + E(M^n/A^2))|$ qui est au plus

$$C|V_j|(\lambda(M^j))^{-1+\eta} (\lambda(M^n))^{1-\eta} + C(\lambda(M^q))^{\eta} (\lambda(M^n))^{1-\eta} ,$$

où on a de nouveau utilisé la propriété (iii) des noyaux réguliers.

En sommant sur $q < j < n$, et en ajoutant toutes les contributions, on obtient

$$|V_n \cap (\complement V_n + E(M^n/A^2))| \leqslant C(\lambda(M^q))^\eta (\lambda(M^n))^{1-\eta}$$
$$+ C \sum_j |V_j| (\lambda(M^n)/\lambda(M^j))^{1-\eta} + C(n-q)(\lambda(M^q))^\eta (\lambda(M^n))^{1-\eta} .$$

Au membre droit de cette inégalité, le premier terme est absorbé par le troisième. En appliquant (4.1) au deuxième terme, on voit qu'on peut estimer le membre gauche par

(4.3) $$C \sum_j 2^{n-j} |V_n| (\lambda(M^n)/\lambda(M^j))^{1-\eta} + C(n-q)\, \lambda(M^q)(\lambda(M^n)/\lambda(M^q))^{1-\eta} .$$

Ici C ne dépend que de A . Puisque K est admissible, on peut faire

$$\lambda(M^j)/\lambda(M^{j-1})$$

aussi petit qu'on veut, indépendamment de j , en prenant M suffisamment grand. En estimant la somme dans (4.3) par une série géométrique, et en choisissant $\varepsilon < 1/2$, on peut obtenir

$$|V_n \cap (\complement V_n + E(M^n/A^2))| \leqslant \frac{1}{4} |V_n| + \frac{1}{4} \lambda(M^q)(1-\varepsilon)^{n-q} ,$$

si M est grand. Sous l'hypothèse

(4.4) $$|V_n| > \lambda(M^q)(1-\varepsilon)^{n-q} ,$$

ceci entraîne

$$|V_n \setminus (\complement V_n + E(M^n/A^2))| \geqslant \frac{1}{2} |V_n| .$$

A cause de (4.2), il en découle que $m \geqslant \delta |V_n|$, où $\delta > 0$. Puisque

$$\lambda(M^j)/\lambda(M^{j-1}) > M^{-C} ,$$

on peut avoir

(4.5) $$\delta > M^{-C} .$$

Alors la définition de V_n implique

$$|V_{n+2}| \leqslant (1-\delta)|V_n| + C(\lambda(M^q))^\eta (\lambda(M^n))^{1-\eta} .$$

En utilisant (4.4), on voit que le dernier terme de cette expression est majoré par

$$R \equiv C|V_n| (\lambda(M^n)/\lambda(M^q))^{1-\eta} (1-\varepsilon)^{q-n} .$$

Pour estimer R , notons qu'il existe un $c = c(A) > 0$ tel que

$$\lambda(M^j)/\lambda(M^{j-1}) < CM^{-c} .$$

Avec $\varepsilon < 1/2$ et M assez grand, (4.5) entraîne que $R < \delta |V_n|/2$ pour $n-q \geqslant n_0$, où $n_0 = n_0(A , \eta)$.

La conclusion suivante en résulte : si (4.4) est vérifiée, et si $n \geqslant q + n_0$ et M majore un M_0 convenable, alors

$$|V_{n+2}| \leqslant (1-\delta/2)|V_n| ,$$

avec $\delta = \delta(A , \eta , M)$. Par récurrence, on obtient alors

$$(4.6) \qquad |V_n| \leqslant C(1-\varepsilon)^{n-q}\,\lambda(M^q)$$

pour $n = q + n_0$, $q + n_0 + 2$, $q + n_0 + 4$, ... , avec $C = C(A , \eta)$ et $\varepsilon = \varepsilon(A , \eta , M) > 0$, car (4.6) est trivial pour $n = q + n_0$, avec une constante C convenable. Avec une autre C , (4.6) est alors vérifiée pour tout $n > q$. Le lemme résulte maintenant de (4.6) et d'une simple estimation de $|D \cap (\complement D + E(M^n/A^3))|$, quantité soustraite dans la définition de V_n . La démonstration est terminée.

Dans la même situation, on va recouvrir chaque trou dans $E(1)$ de translatés de $E(\alpha)$, avec α variable et grand près de la frontière du trou. Soit T un trou d'ordre p , et mettons

$$B_j = (\complement T + E(M^j)) \setminus (\complement T + E(M^{j+1})) \text{ , pour } j = p , p+1 , \dots ,$$

où la première parenthèse doit être remplacée par T pour $j = p$. Alors $B_j \subset T$, et B_j est l'ensemble des points dont la distance à $\complement T$, mesurée à l'aide de K , correspond à $M^j < K \leqslant M^{j+1}$. Plaçons un pavage de translatés de $E(AM^{j+2})$ dans B_j , soit $(x_\nu + E(AM^{j+2}))$. Alors les translatés concentriques $(x_\nu + E(M^{j+2}))$ recouvrent B_j , et ils seront appelés des morceaux d'ordre $j + 2$. On vérifie facilement qu'un tel morceau est disjoint de B_{j-2} et de B_{j+2} . Un morceau d'ordre j est donc contenu dans

$$(\complement T + E(M^{j-3})) \setminus (\complement T + E(M^j)) ,$$

et tout point de T appartient à au moins 1 et au plus $C = C(A)$ morceaux de tous les ordres. La mesure totale des morceaux d'ordre j dans T est majorée par $C(\lambda(M^p))^\eta\,(\lambda(M^j))^{1-\eta}$, où $C = C(M)$, ce qui sera important dans la section 6.

Plus tard, nous aurons besoin d'une estimation de la mesure de l'ensemble $V = (F + E(M^n)) \cap E(1)$, $n = 1 , 2 , \dots$ On va considérer les intersections de V avec les trous, puisque le reste de V est de mesure nulle, d'après le lemme 3. Ce lemme entraîne aussi qu'il y a au plus $C\lambda(1)(1-\varepsilon)^i\,(\lambda(M^i))^{-1}$ trous d'ordre i , et pour $i < n$ nous avons une estimation pour l'intersection de V avec un tel trou, à cause de (iii) dans la définition des noyaux réguliers. Le lemme 3 donne une estimation de la mesure de tous les trous d'ordre $\geqslant n$, et en sommant on obtient

$$|V| \leqslant C\lambda(1) \textstyle\sum_{i<n} (1-\varepsilon)^i\,(\lambda(M^i))^{-1+\eta}\,(\lambda(M^n))^{1-\eta} + C\lambda(1)(1-\varepsilon)^n .$$

Puisque $(\lambda(M^i))^{-1+\eta} \leqslant 3^{i-n}(\lambda(M^n))^{-1+\eta}$ pour $M > M_0 = M_0(A , \eta)$, et $\varepsilon < 1/2$, on en déduit à l'aide de séries géométriques

$$(4.7) \qquad |(F + E(M^n)) \cap E(1)| \leqslant C\lambda(1)(1-\varepsilon)^n .$$

On voit également que la même estimation est aussi valable pour $|F + E(M^n)|$, car $F \subset E(1)$.

Finalement, nous donnerons une version de l'inégalité de Harnack. Si $x \in \complement T$, et si y et y' appartiennent au même morceau d'ordre j dans le trou T , alors

$K(y-x)$, $K(y'-x) \leqslant M^j$. Puisque $K(y-y') \geqslant M^j/A$, on a

$$(4.8) \qquad K(y-x) \sim K(y'-x).$$

5. Le lemme-clé.

LEMME 4. - Soit K un noyau régulier vérifiant

$$A^{-1}\alpha^{-1} \leqslant \lambda(\alpha) \leqslant A\alpha^{-1} , \quad \alpha > 0 .$$

Si un ensemble $F \subset E(1)$ relativement fermé a des trous proportionnels, avec le facteur N , alors F est de convolution dans $E(1)$, et

$$C_{E(1)}(F) \leqslant C(A , \eta , N) .$$

Démonstration. - Soit μ une mesure de probabilité portée par F , et prenons $\alpha > 0$. Fixons un M pour lequel les résultats de la section 4 sont valables, $M = M(A , \eta , N)$. Soit $(R_j)_1^\infty$ une énumération de tous les morceaux dans $E(1)$, telle que l'ordre $\bar{j}$ de R_j soit non décroissant en j , et appelons x_j le centre de R_j . On va construire par récurrence une suite $(\lambda_k)_0^\infty$ de mesures et une autre $(I_k)_0^\infty$ de sous-ensembles de $E(1)$, et on commence en posant $\lambda_0 = 0$ et $I_0 = \emptyset$. Supposons la construction faite pour $k < j$. Si R_j rencontre $\{U^\mu > \alpha\}$ et, simultanément, R_j n'est pas contenu dans $\bigcup_{k<j} I_k$, alors on définit λ_j comme la restriction de la mesure de Haar à R_j , et I_j comme la réunion de ceux des R_i , $i > j$, qui rencontrent $x_j + E(M^p/A^3)$. Ici $p = \bar{j} - \varkappa(\bar{i} - \bar{j})$ (p dépend donc de i), et $\varkappa > 0$ sera précisé plus tard. Dans tous les autres cas, on met $\lambda_j = 0$ et $I_j = \emptyset$. Avec $\nu = \sum_k \lambda_k$, on va montrer que

(1) $|\{U^\mu > \alpha\} \cap E(1)| \leqslant C\|\nu\|$,

(2) $U^\mu > \alpha/C$ sur $\operatorname{Supp} \nu$,

(3) $U^\nu \leqslant C$ sur F .

Ici, et dans la suite de cette démonstration, $C = C(A , \eta , M)$. Ces trois inégalités entraînent

$$(5.1) \qquad |\{U^\mu > \alpha\} \cap E(1)| \leqslant C\|\nu\| \leqslant C\alpha^{-1} \int U^\mu \, d\nu = C\alpha^{-1} \int U^\nu \, d\mu \leqslant C\alpha^{-1}\|\mu\| ,$$

à cause du théorème de Fubini. Ceci terminerait la démonstration du lemme, à cause des remarques faites après la définition de Λ_K .

Avant de prouver ces inégalités, on va décrire l'idée de la démonstration (cf. la technique utilisée dans [2]). Soit ν' la restriction de la mesure de Haar à l'ensemble dont on veut estimer la mesure, c'est-à-dire, à $\{U^\mu > \alpha\} \cap E(1)$. Alors l'inégalité

$$(5.2) \qquad U^{\nu'} \leqslant C \quad \text{sur } F$$

entraînerait le lemme, suivant la méthode (5.1), comme on le vérifie facilement. Pourtant, (5.2) est fausse en général, d'où l'idée de construire une modification

ν de ν', vérifiant (5.2) et pour laquelle (5.1) reste valable. Ceci veut dire précisément que ν doit vérifier (1), (2) et (3).

Grossièrement, (5.2) n'est pas vraie puisque les masses de ν' sont situées là où U^{μ} est grand, c'est-à-dire près de F. Les morceaux de la section 4 servent à discrétiser le problème. Dans la construction récurrente ci-dessus, on commence par les grands morceaux, qui sont loin de F, et, ignorant un instant les I_k, on procède comme suit. Si un morceau rencontre $\{U^{\mu} > \alpha\}$, on place une mesure de densité 1 dans ce morceau, et ensuite on ajoute ces mesures. (Placer la masse dans tout le morceau, ou seulement dans son intersection avec $\{U^{\mu} > \alpha\}$, n'a pas d'importance, à cause de (2).) Faite de cette façon, la construction donnerait une approximation de ν' qui ne vérifierait toujours pas (5.2), mais chacune des mesures ainsi ajoutées a un potentiel borné sur F. Il faut donc éviter de placer de la masse dans des morceaux situés trop près l'un de l'autre, et les I_j sont en effet des régions "interdites" autour des R_j, où aucune masse ne peut être placée après qu'une mesure ait été placée dans R_j. Le fait qu'un morceau soit ainsi interdit par R_j, ou non, ne dépend pas seulement de sa distance à R_j, mais aussi de sa taille. Les petits morceaux, qui sont situés près de F, sont interdits plus souvent que les grands morceaux.

En fait, les λ_k s'annulent à partir d'un certain k_0, mais ceci ne semble pas simplifier la démonstration, car on n'a pas d'estimation de k_0.

Démonstration de (2). – A cause de (4.8), on a $U^{\mu} > \alpha/C$ dans la fermeture de tout morceau qui rencontre $\{U^{\mu} > \alpha\}$, ce qui entraîne (2).

Démonstration de (1). – Un morceau R_j rencontrant $\{U^{\mu} > \alpha\}$ est ou bien le porteur de $\lambda_j \neq 0$, ou bien contenu dans $\bigcup_{k<j} I_k$. Comme les morceaux recouvrent $E(1)$ à un ensemble de mesure nulle près, on a

$$|\{U^{\mu} > \alpha\} \cap E(1)| \leq \sum \|\lambda_j\| + \sum |I_j| .$$

Evidemment $\sum \|\lambda_j\| = \|\nu\|$, et puisque $\|\lambda_j\| = \lambda(M^{\bar{j}}) \sim M^{-\bar{j}}$ si $I_j \neq \emptyset$, il suffit de montrer que

$$|I_j| \leq CM^{-\bar{j}} . \tag{5.3}$$

Avec $s \geq \bar{j}$ fixe, on va estimer la mesure (de Haar) des morceaux d'ordre s dans I_j. Par construction, un tel morceau est contenu dans

$$x_j + E(M^p/A^3) + E(M^s/A) \subset x_j + E(M^p/A^4) \subset x_j + E(M^{p-1}) ,$$

où $p = \bar{j} - \varkappa(s - \bar{j})$, car on peut sans restriction supposer $M \geq A^4$. Comme on a vu dans la section 4, $x_j + E(M^{p-1})$ rencontre au plus C trous d'ordre $\leq p - 1$, et la mesure totale des morceau d'ordre s contenus dans ces intersections est donc majorée par $A_s = CM^{-\eta(p-1)} M^{-(1-\eta)s}$. Chacun des autres morceaux d'ordre s dans I_j est contenu dans un trou d'ordre q avec $p - 1 < q \leq s - 2$, et ce trou est contenu dans $x_j + E(M^{p-1}/A)$. A cause du lemme 3, ces trous d'ordre q ont une mesure totale dominée par $CM^{-p}(1 - \varepsilon)^{q-p}$, d'où une estimation de leur nombre, qui entraîne que la mesure totale des morceaux d'ordre s qu'ils contiennent est au plus $CM^{-p}(1-\varepsilon)^{q-p}\, M^{(1-\eta)q}\, M^{-(1-\eta)s}$. Sommant sur q, on obtient au plus $CM^{-p}(1-\varepsilon)^{s-p}$, et cette expression l'emportera sur la quantité A_s correspondant à $q \leqslant p-1$ et déduite ci-dessus. En utilisant la définition de p, on trouve alors

$$|I_j| \leqslant C \sum_{s \geqslant \bar{j}} M^{-\bar{j}}\, M^{\varkappa(s-\bar{j})}\, (1-\varepsilon)^{(1+\varkappa)(s-\bar{j})} .$$

Si $\varkappa = \varkappa(A, \eta, M) > 0$ est pris suffisamment petit, cette série géométrique va converger et donner l'estimation (5.3), et donc (1).

<u>Démonstration de</u> (3). – Prenons $z \in F$, et mettons $\nu_j = \sum \lambda_i$, où on somme sur les i pour lesquels $\bar{i} = j$. Ici $j \geqslant 3$, puisqu'il n'y a pas de plus grands trous, et évidemment $U^{\nu} = \sum_3^{\infty} U^{\nu_j}$. Si j et n sont entiers avec $n \leqslant j \geqslant 3$, on appelle $A_{j,n}$ la somme des λ_i avec $\bar{i} = j$ pour lesquelles R_i est disjoint de $z + E(M^n)$. Nous allons estimer le potentiel de $A_{j,n}$ au point z. Pour $q < n$, on trouve, comme dans la démonstration de (1), que les morceaux d'ordre j contenus dans $z + E(M^q)$ ont une mesure totale d'au plus $CM^{-q}(1-\varepsilon)^{j-q}$. Si un morceau R_i avec $\bar{i} = j$ est contenu dans $z + E(M^q)$, mais non pas dans $z+E(M^{q+1})$, et si R_i est disjoint de $z + E(M^n)$, alors on voit sans difficulté que

$$U^{\lambda_i}(z) \leqslant CM^q \|\lambda_i\| .$$

En sommant sur ces morceaux et ensuite sur q, on obtient

$$U^{A_{j,n}}(z) \leqslant C \sum_{q<n} (1-\varepsilon)^{j-q} = C_1 (1-\varepsilon)^{j-n} , \tag{5.4}$$

avec $C_1 = C_1(A, \eta, M)$. Si C_1 est bien choisi, (5.4) sera valable même pour n non entier, $n \leqslant j$. A cause de la construction des morceaux, on a $A_{j,j} = \nu_j$. L'inégalité (3) va maintenant résulter du lemme suivant.

LEMME 5. – <u>Pour</u> $j = 3, 4, \ldots$, <u>la somme</u> $\sum_3^j U^{\nu_k}(z)$ <u>devient dominée terme à terme par</u> $\sum_0^{j-3} C_1(1-\varepsilon)^{\varkappa k}$, <u>après un réarrangement convenable</u>.

<u>Démonstration</u>. – Le cas $j = 3$ est immédiat d'après (5.4), avec $j = n = 3$. Supposons l'énoncé vrai pour $j - 1$. Soit B_k la réunion des morceaux d'ordre k qui portent ν_k. En gros, la récurrence se fait de la façon suivante. Si le terme $U^{\nu_j}(z)$ est grand, alors z est situé près de B_j, qui, lui, est éloigné des B_k, $k < j$, à cause de la construction des I_k. Le point z ne peut donc pas être trop près de B_k, d'où une estimation des termes $U^{\nu_k}(z)$, $k < j$.

Passons aux détails. Soit m l'entier pour lequel

$$C_1(1-\varepsilon)^{m+1} < U^{\nu_j}(z) \leqslant C_1(1-\varepsilon)^m . \tag{5.5}$$

(Si $U^{\nu_j}(z) = 0$, il n'y a pas de problème.)

L'ensemble B_j rencontre nécessairement $z + E(M^{j-m-1})$, car sinon (5.4) contredirait l'inégalité gauche de (5.5) ; soit x un point d'intersection. Montrons que

$$z \notin B_k + E(M^p/A) \quad \text{pour } 3 \leqslant k \leqslant j-m-1 \text{, où } p = k - \varkappa(j-k) . \tag{5.6}$$

Dans le cas contraire, on aurait $z \in x_i + E(M^k) + E(M^p/A)$ pour un morceau $x_i + E(M^k)$ avec $\lambda_i \neq 0$ et $3 \leqslant k \leqslant j - m - 1$. Cela entraînerait

$$x \in x_i + E(M^k) + E(M^p/A) + E(M^{j-m-1}) \subset x_i + E(M^p/A^3) ,$$

puisque $p \leqslant k \leqslant j - m - 1$. Mais ceci est impossible, car $x_i + E(M^p/A^3)$ ne rencontre pas B_j, d'après la construction de I_k. On a donc bien (5.6), et par conséquent $z + E(M^p)$ est disjoint de B_k, si $3 \leqslant k \leqslant j - m - 1$. Mais alors (5.4) entraîne

$$\overset{\vee}{U}{}^{k}(z) \leqslant C_1(1 - \varepsilon)^{k-p} = C_1(1 - \varepsilon)^{\varkappa(j-k)}$$

pour $k = 3, 4, \ldots, j - m - 1$. Nous avons ici les derniers termes de la série géométrique du lemme. L'hypothèse de récurrence implique que

$$\Sigma_{j-m}^{j-1} \overset{\vee}{U}{}^{k}(z) \leqslant C_1 \Sigma_0^{m-1}(1 - \varepsilon)^{\varkappa k} .$$

Pour terminer la récurrence, il suffit maintenant d'utiliser l'inégalité droite de (5.5), qui implique évidemment $\overset{\vee}{U}{}^{j}(z) \leqslant C_1(1 - \varepsilon)^{\varkappa m}$.

Le lemme 5 est démontré, et donc aussi le lemme 4.

6. Résultats locaux.

Le lemme 4 nous permet de prouver deux théorèmes locaux. Là où Ω n'est pas mentionné, on sous-entendra dès maintenant que $\Omega = G$. On met $\lambda(\alpha) = f(\alpha)\, \alpha^{-1}$, ici et dans la suite.

THÉORÈME 1. - *Soit K un noyau semi-régulier vérifiant*

(6.1) $$\lim_{N\to\infty} \underline{\lim}_{\alpha\to\infty} \frac{1}{f(\alpha)} \int_{E(\alpha)\setminus E(N\alpha)} K(x)\, dx = +\infty$$

et

(6.2) $$f(\beta) \leqslant Af(\alpha) \quad \text{pour} \quad 1 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha^2 .$$

Alors un compact $F \subset G$ est de convolution si, et seulement si, F a des trous proportionnels.

La limite dans (6.1) existe par monotonie. Cette condition sert à exclure le cas (3.1) (les petits noyaux). On peut construire un exemple dans $\underset{\sim}{R}$ qui montre que $\underline{\lim}$ ne peut pas être remplacé par $\overline{\lim}$ dans (6.1). De même, (6.2) empêche K d'être trop grand près de la singularité (cf. (3.2)). On pourrait ici remplacer α^2 par une puissance quelconque α^p, $p > 1$, sans changer la condition. Le théorème 1 s'applique aux cas $\lambda(\alpha) \sim \alpha^{-1}(\log \alpha)^a$, $\alpha \to \infty$, avec $a \in \underset{\sim}{R}$, et

$$\lambda(\alpha) \sim \alpha^{-1} \exp(- C(\log \alpha)^b) , \text{ avec } C > 0 \text{ et } 0 < b < 1 .$$

Démonstration. - La condition est *nécessaire*. Supposons qu'un ensemble $z+E'(\alpha)$, $\alpha > 0$, ne contient aucun translaté de $E'(N\alpha)$ disjoint de F, et que $N > A^7$. On peut supposer $z = 0$. Recouvrons $E'(A\alpha)$ par un nombre fini de translatés $x_j + E'(N\alpha)$, qui seront alors contenus dans $E'(\alpha)$. Ils rencontrent donc F, et on peut prendre des points $y_j \in F \cap (x_j + E'(N\alpha))$. Les ensembles $x_j + E'(N\alpha)$ ne sont pas disjoints, mais on peut choisir une famille (B_j) d'ensembles mesurables disjoints deux à deux, tels que $B_j \subset x_j + E'(N\alpha)$ et $\bigcup_j B_j = \bigcup_j (x_j+E'(N\alpha)) \supset E'(A\alpha)$. Notons $d\nu$ la restriction de dx à $\bigcup_j B_j$. Alors $\mu = \sum_j |B_j| \, \delta y_j$ (masses $|B_j|$ aux points y_j) est une approximation de ν , obtenue en concentrant la masse dans les B_j aux points y_j correspondants. La masse est donc déplacée seulement à l'intérieur de chaque $x_j + E'(N\alpha)$, et on a $\|\mu\| = \|\nu\| \sim \lambda(\alpha)$.

Prenons $\beta \geq A^5 \alpha$ et $x_0 \in E'(A^2 \alpha)$. Les propriétés des noyaux semi-réguliers entraînent

$$x_0-z_\beta-E'(A\beta) \subset E'(A^2 \alpha)+E'(\beta/A^2)-E'(A\beta) \subset E'(A^2 \alpha)+E'(\beta/A^3) \subset E'(A\alpha) .$$

On a donc $d\nu \geq dx|(x_0 - U)$, où $U = \bigcup_{\beta \geq A^5 \alpha} (z_\beta + E'(A\beta))$ et $|$ signifie restriction, d'où

$$\int K(x_0 - y)\, d\nu(y) \geq \int_U K(z)\, dz . \tag{6.3}$$

Mais $z_\beta + E'(A\beta) \subset E(\beta)$, et comme $|E'(A\beta)| \sim |E(\beta)|$, la quantité $|E'(A\beta)|$ est plus rapidement décroissante qu'une puissance de β^{-1} . Les ensembles $z_\beta+E'(A\beta)$ sont par conséquent suffisamment disjoints l'un de l'autre pour qu'on puisse obtenir

$$\int K(x_0 - y)\, d\nu(y) \geq C^{-1} \int_{E(A^5\alpha)} K(z)\, dz , \tag{6.4}$$

en choisissant les valeurs de β dans une progression géométrique. Quand on passe de ν à μ en concentrant la masse aux points y_j , la masse dans $x_0 - x_\beta - E'(A\beta)$ reste dans

$$x_0 - z_\beta - E'(A\beta) + E'(N\alpha) - E'(N\alpha) \subset x_0 - z_\beta - E'(\beta) \subset x_0 - E(\beta) ,$$

si $A^5 \alpha \leq \beta \leq N\alpha/A^2$. L'argument de (6. 3-4) donne alors

$$\int K(x_0 - y)\, d\mu(y) \geq C^{-1} \int_E K(z)\, dz ,$$

où $E = E(A^5 \alpha) \setminus E(N\alpha/A^2)$. Dans $E'(A^2 \alpha)$, on a donc

$$U^\mu \geq C^{-1} \int_E K(z)\, dz . \tag{6.5}$$

Si F n'a pas de trous proportionnels, il y a des N arbitrairement grands et tels qu'il existe α pour lequel cette construction est possible. Puisque F est compact, ces α sont minorés par un $\delta > 0$, et en prenant éventuellement $\alpha' > \alpha$ convenablement, on peut supposer, en outre, que $\alpha \to \infty$ avec N . Comme $\underline{\lim}$ dans (6.1) croît avec N , il en découle que la construction est possible pour α et N avec $(f(\alpha))^{-1} \int_E K$ arbitrairement grand. Mais si F était de convolution, alors $\|\mu\|^{-1} U^\mu$, et donc aussi $(\lambda(\alpha))^{-1} U^\mu$, seraient dans Λ_K , avec des quasi-normes bornées par $C = C(F)$, suivant le lemme 1. Cela signifierait

$$\inf_{E(A^2\alpha)} U^\mu \leq C\lambda(\alpha).\alpha \sim f(\alpha) ,$$

ce qui contredit (6.5). La nécessité est démontrée.

La condition est <u>suffisante</u>. Définissons un noyau régulier K' par

$$\{K' > \alpha\} = E'(\alpha/A^3) .$$

Puisque $E(\alpha) \subset E'(\alpha/A^3)$, on a $K \leqslant K'$, et on déduit aussi $K^* \sim (K')^*$, et donc $\Lambda_K(\Omega) = \Lambda_{K'}(\Omega)$ pour tout Ω. Cela veut dire qu'il suffit de considérer des noyaux réguliers, car un ensemble F a des trous proportionnels simultanément pour K et K'. Selon le lemme 2, on doit montrer qu'un $F \subset E(1)$, relativement fermé et ayant des trous proportionnels (avec le facteur N) par rapport à un noyau régulier K, est de convolution dans $E(1)$. Prenons donc une mesure de probabilité μ portée par cet F, et un $\alpha > 0$. Il faut montrer que

$$|\{U^\mu > \alpha\} \cap E(1)| \leqslant Cf(\alpha)/\alpha , \tag{6.6}$$

et il suffit de considérer α grand, puisque le cas contraire est trivial, avec une C convenable. Ici, et dans la suite de cette démonstration, on a $C=C(A,\eta,N)$. De (6.6) nous obtiendrions également

$$C_{E(1)}(F) \leqslant C . \tag{6.7}$$

Pour ce qui concerne les points près de F, (4.7) entraîne

$$|(F + E(\beta)) \cap E(1)| \leqslant C\lambda(1)\ \beta^{-c_1} ,$$

pour $\beta > 0$ et un $c_1 > 0$. Mais $\lambda(\alpha) \geqslant \lambda(1)\ \alpha^{-C}/C$, d'où l'existence d'un $C_1 = C_1(A, \eta, N)$ tel que

$$|(F + E(\alpha^{C_1})) \cap E(1)| \leqslant Cf(\alpha)/\alpha . \tag{6.8}$$

En notant χ la fonction caractéristique de $E(\alpha/2) \setminus E(\alpha^{C_1})$, on obtient

$$U^\mu(x) \leqslant (K\chi) * \mu + \alpha/2 , \tag{6.9}$$

pour $x \notin F + E(\alpha^{C_1})$. Il suffit donc de considérer l'ensemble où $(K\chi) * \mu > \alpha/2$. Avec $K_1 = K\chi/f(\alpha/2)$, on a

$$\lambda_1(\beta) \equiv |\{K_1 > \beta\}| = |\{K\chi > f(\alpha/2)\beta\}| ,$$

et pour $\beta \leqslant \alpha/(2f(\alpha/2))$ on trouve $\lambda_1(\beta) \leqslant f(\alpha/2)/(\alpha/2) \leqslant \beta^{-1}$. Si

$$\alpha/(2f(\alpha/2)) < \beta < \alpha^{C_1}/f(\alpha/2) ,$$

alors $f(\alpha/2)\beta$ est compris entre $\alpha/2$ et une C-ième puissance de $\alpha/2$, et (6.2) entraîne

$$\lambda_1(\beta) \leqslant \frac{f(f(\alpha/2)\beta)}{f(\alpha/2)\beta} \leqslant C\, \frac{f(\alpha/2)}{f(\alpha/2)\beta} = \frac{C}{\beta} .$$

Finalement, $\lambda_1(\beta) = 0$ pour $\beta \geqslant \alpha^{C_1}/f(\alpha/2)$. Il résulte que K_1 est majoré par un noyau vérifiant les hypothèses du lemme 4, avec la constante $A = C$. Ce lemme entraîne alors que la mesure de l'ensemble $\{(K\chi) * \mu > \alpha/2\} \cap E(1)$ est au plus $C.2f(\alpha/2)/\alpha \sim Cf(\alpha)/\alpha$. On a donc

$$|\{U^\mu > \alpha\} \cap \complement(F + E(\alpha^{C_1})) \cap E(1)| \leqslant Cf(\alpha)/\alpha ,$$

à cause de (6.9). Avec (6.8), cette inégalité implique (6.6).

Le théorème 1 est démontré.

On va maintenant considérer des noyaux qui ont une singularité un peu plus forte que ceux du théorème 1. Il faut alors une autre façon de mesurer la taille d'un ensemble dans G. Soit K un noyau semi-régulier, et $F \subset G$. On note n_α ou $n_\alpha(F)$ le nombre minimal des translatés de $E(\alpha)$ qui recouvrent F, et m_α le nombre maximal de translatés de $E(\alpha)$ disjoints deux à deux qui ont leurs centres sur F. Les quantités obtenues de la même façon, mais avec $E'(\alpha)$ au lieu de $E(\alpha)$, seront appelées n'_α et m'_α. Ces quatre quantités sont croissantes en α, et puisqu'on peut recouvrir $E'(\alpha)$ par $C = C(A)$ translatés de $E'(2\alpha)$, on a

(6.10) $$n'_{2\alpha} \leqslant Cn'_\alpha .$$

Montrons que

(6.11) $$n_\alpha \sim m_\alpha \sim n'_\alpha \sim m'_\alpha ,$$

au sens que $n_\alpha \leqslant Cm_\alpha$ etc., avec $C = C(A)$. On peut supposer F relativement compact, car sinon les quatre quantités sont infinies.

La démonstration se compose de quatre parties, qui entraînent ensemble (6.11), en vue de (6.10) :

1° $n'_\alpha \leqslant m'_{A\alpha}$, car si on a un ensemble maximal de translatés de $E'(A\alpha)$, disjoints deux à deux et avec centres sur F, alors les translatés de $E'(\alpha)$ concentriques recouvrent F, à cause de la maximalité.

2° $m'_\alpha \leqslant m_{A^3\alpha}$, puisque $E(A^3\alpha) \subset E'(\alpha)$.

3° $m_\alpha \leqslant Cn_\alpha$, car si $x_j + E(\alpha)$, $j = 1, \dots, n_\alpha$, est un recouvrement de F, alors tout translaté de $E(\alpha)$ avec centre dans $x_j + E(\alpha)$ est contenu dans $x_j + E'(\alpha/A^4)$, et $x_j + E'(\alpha/A^4)$ peut contenir au plus C translatés de $E(\alpha)$.

4° $n_\alpha \leqslant n'_\alpha$, puisque $E'(\alpha)$ est contenu dans un translaté de $E(\alpha)$.

THÉORÈME 2. - Soit K un noyau semi-régulier vérifiant

(6.12) $$f(\alpha) \leqslant Af(\beta) \quad \text{pour} \quad 1 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha^2 .$$

Alors un compact $F \subset G$ est de convolution si, et seulement si,

(a) F a des trous proportionnels, et

(b) il existe C tel que

$$f(\alpha) \leqslant Cf(\alpha/n_\alpha) \quad \text{pour} \quad \alpha > 1 .$$

Ici (b) signifie que n_α ne doit pas être trop grande. Quand $\lambda(\alpha) \sim \alpha^{-1}(\log \alpha)^a$ pour $\alpha \longrightarrow \infty$, (b) est une conséquence de (a), et même triviale pour $a \leqslant 0$. Pour $\lambda(\alpha) \sim \alpha^{-p}$, $p < 1$, (b) signifie que n_α est bornée, ce qui implique (a). Pourtant, si $\lambda(\alpha) \sim \alpha^{-1} \exp(C(\log \alpha)^b)$, $0 < b < 1$, aucune des deux conditions n'entraîne l'autre (cf. la remarque 1 après la démonstration).

Démonstration. - La nécessité de (a) se démontre comme pour le théorème 1, car (6.12) entraîne (6.1), comme suit. Prenons N et $\alpha > 1$ avec $N\alpha \leq \alpha^2$. Alors

$$\int_{E(\alpha)\setminus E(N\alpha)} K(x)\, dx = -\int_{]\alpha, N\alpha]} t\, d\frac{f(t)}{t} ,$$

et si $\alpha < t_j < At_j < N\alpha$, les inégalités (2.2') et (6.12) impliquent

$$-\int_{]t_j, At_j]} d\frac{f(t)}{t} \geq \frac{1}{2}\frac{f(t_j)}{t_j} \geq \frac{f(\alpha)}{2At_j} .$$

En sommant sur une suite finie (t_j), avec $\alpha < t_j = A^j \alpha < N\alpha$, on déduit

$$\int_{E(\alpha)\setminus E(N\alpha)} K(x)\, dx \geq \frac{f(\alpha)}{C} \sum \frac{t_j}{t_j} \geq f(\alpha) \log N/C ,$$

d'où (6.1).

Pour voir la nécessité de (b), on prend $x_j \in F$ pour $j = 1, \dots, m_\alpha$ tels que les ensembles $x_j + E(\alpha)$ soient disjoints deux à deux. Appelant μ la mesure composée d'une masse ponctuelle m_α^{-1} à chaque x_j, on obtient $U^\mu > \alpha/m_\alpha$ sur l'ensemble $\bigcup_j (x_j + E(\alpha))$, dont la mesure est $m_\alpha \lambda(\alpha)$. Si F est de convolution, il découle du lemme 1 que $m_\alpha \lambda(\alpha) \leq C\lambda(\alpha/m_\alpha)$, ce qui entraîne (b), à cause de (6.11).

Pour montrer la suffisance des conditions, on prend un compact F vérifiant (a) et (b). Comme dans la démonstration du théorème 1, on peut, sans restriction, supposer K régulier. Notons tout d'abord que

$$m_\beta \lambda(\beta) \leq |F + E(\beta)| , \quad \beta > 0 . \tag{6.13}$$

Puisque F peut être recouvert par un nombre fini de translatés de $E(1)$, on obtient comme dans la démonstration du théorème 1

$$|F + E(\beta)| \leq C\lambda(1)\, \beta^{-c_1} . \tag{6.14}$$

Ici, et dans la suite de cette démonstration, $C = C(A, \eta, F)$, et c_1 et c_2 dépendent des mêmes variables et sont positives. Pour β grand, (6. 13-14) montrent que

$$\frac{\beta}{n_\beta} \geq \frac{\beta^{c_1} f(\beta)}{C\lambda(1)} \geq \beta^{c_2} , \tag{6.15}$$

où on a utilisé (6.11) et le fait que (6.12) implique

$$f(\beta) \geq f(1)(\log \beta)^{-C}/C , \quad \beta > 1 .$$

Pour $\beta/n_\beta \leq \gamma \leq \beta$, (6.12) et (6.15) entraînent que

$$f(\beta/n_\beta) \leq Cf(\gamma) \leq Cf(\beta) .$$

Mais alors f est d'ordre de grandeur constant dans l'intervalle $[\beta/n_\beta, \beta]$, à cause de (b). Par conséquent, l'intersection de F avec un translaté de $E(1)$ vérifie (b), car $n_\beta(F)$ est croissante en F. D'après le lemme 2, il suffit donc de prendre un $F \subset E(1)$ relativement fermé vérifiant (a) et (b), et montrer que F est de convolution dans $E(1)$.

Soit μ une mesure de probabilité portée par un tel F, et prenons $\alpha > 0$ grand. On peut choisir un $\beta \geq \alpha$ tel que $n_\beta \lambda(\beta) \sim \lambda(\alpha)$, et alors

(6.16) $$|F + E(\beta)| \leqslant Cn_\beta\ \lambda(\beta) \leqslant C\lambda(\alpha)\ .$$

La condition (b) montre que

$$\lambda(\alpha) \leqslant Cn_\beta\ \frac{f(\beta)}{\beta} \leqslant C\ \frac{f(\beta/n_\beta)}{\beta/n_\beta} \leqslant \lambda\left(\frac{\beta}{Cn_\beta}\right)\ ,$$

et donc $\beta/(Cn_\beta) \leqslant \alpha \leqslant \beta$. Par conséquent, f est d'ordre de grandeur constant dans l'intervalle $[\alpha\ ,\ \beta]$. Le reste de cette démonstration est une répétition de la fin de celle du théorème 1, avec β au lieu de α^{C_1} et (6.16) au lieu de (6.8).

Le théorème 2 est démontré.

<u>Remarque</u> 1. - Ce théorème est applicable si K est semi-régulier et

$$\lambda(\alpha) \sim \alpha^{-1} \exp(\varphi(\log \alpha))\ ,$$

$\alpha \longrightarrow \infty$, avec φ croissante. Si en outre $\varphi \in C^{(2)}(]x_0\ ,\ \infty[)$ pour un $x_0 \in \mathbb{R}$, et si

(6.17) $$x\varphi'(x) \longrightarrow \infty\ ,$$

et

(6.18) $$\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2} \longrightarrow 0\ ,$$

pour $x \longrightarrow \infty$, alors la condition (b) est équivalente à l'existence d'une constante C telle que

(6.19) $$n_\alpha \leqslant C + \exp(C/\varphi'(\log \alpha))\ .$$

Ceci est une formule plus explicite que (b) ; comme exemple on peut citer

$$\varphi(x) = Cx^b\ ,\quad 0 < b < 1\ .$$

Démontrons cette équivalence. Evidemment, (b) est équivalente à

(6.20) $$\Delta \equiv \varphi(\log \alpha) - \varphi(\log \alpha - \log n_\alpha) \leqslant C\ .$$

On suppose d'abord que $\overline{\lim}_{x\to\infty}\ \varphi'(x) > 0$. Alors (6.19) entraîne que n_α est bornée pour $\alpha \longrightarrow \infty$, d'où (6.20), puisque K est admissible. Pour la réciproque, prenons $0 < a < \overline{\lim}\ \varphi'(x)$. L'hypothèse (6.18) signifie que $d(\varphi'(x))^{-1}/dx \longrightarrow 0$ pour $x \longrightarrow \infty$, ce qui implique que $\varphi' > a/2$ sur des intervalles arbitrairement grands. Si (6.20) est vérifiée, n_α est alors nécessairement bornée, d'où (6.19).

Supposons maintenant $\lim_{x\to\infty}\ \varphi'(x) = 0$. Alors

(6.21) $$\Delta = \log n_\alpha\ \varphi'(\log \alpha) - \frac{1}{2}\ (\log n_\alpha)^2\ \varphi''(\xi)\ ,$$

où $\log \alpha - \log n_\alpha < \xi < \log \alpha$. Si (6.19) est satisfaite, on a

$$\log n_\alpha = O(1/\varphi'(\log \alpha)) = o(\log \alpha)$$

à cause de (6.17), et donc $\xi > (\log \alpha)/2$, si α est grand. Puisque

$$d(\varphi')^{-1}/dx \longrightarrow 0\ ,\quad x \longrightarrow \infty\ ,$$

on obtient

$$(\varphi'(\xi))^{-1} \geqslant (\varphi'(\log \alpha))^{-1} - o(\log n_\alpha) \geqslant (\varphi'(\log \alpha))^{-1}/2$$

si α est grand. Mais alors

$$\varphi''(\xi) = o((\varphi'(\xi))^2) = o((\varphi'(\log \alpha))^2) \quad \text{d'après (6.18)},$$

et on voit d'après (6.21) que (6.19) implique que Δ est bornée.

Réciproquement, supposons que n_α vérifie (6.20) mais que (6.19) n'est pas satisfaite. On peut trouver $n^*_\alpha \leqslant n_\alpha$ telle que $\log n^*_\alpha \varphi'(\log \alpha)$ n'est pas bornée, $\log n^*_\alpha \leqslant (\log \alpha)/2$ et $\log n^*_\alpha \varphi'(\log \alpha)\, s_\alpha \leqslant 1/4$. Ici

$$s_\alpha = \sup\{|\varphi''(x)|/(\varphi'(x))^2 \; ; \; x > (\log \alpha)/2\} = o(1) \; , \quad \alpha \longrightarrow \infty .$$

Alors la quantité Δ^*, obtenue à partie de Δ en remplaçant n_α par n^*_α, vérifie $\Delta^* \leqslant \Delta \leqslant C$. En outre, Δ^* admet un développement analogue à (6.21) ; soit ξ^* le nombre qui y correspond à ξ. Puisque $\xi^* > (\log \alpha)/2$, on obtient comme ci-dessus

$$\left|\frac{1}{2} (\log n^*_\alpha)^2 \varphi''(\xi^*)\right| \leqslant \frac{1}{2} (\log n^*_\alpha)^2 (\varphi'(\xi^*))^2 s_\alpha$$
$$\leqslant \frac{1}{2} (\log n^*_\alpha)^2\, 4(\varphi'(\log \alpha))^2 s_\alpha \leqslant \frac{1}{2} \log n^*_\alpha \varphi'(\log \alpha) .$$

Dans le développement de Δ^*, le terme $\log n^*_\alpha \varphi'(\log \alpha)$, qui n'est pas borné, l'emporte donc sur le terme du second ordre, ce qui contredit le fait que Δ^* est bornée. Ceci termine la démonstration de la remarque.

7. Résultats globaux.

Dans cette section, on suppose que G n'est pas compact. S'il existe C telle que

$$f(\beta) \leqslant Cf(\alpha)$$

dès que $\alpha \leqslant \beta$, alors f sera dit essentiellement décroissante. Dans ce cas, la condition (b) du théorème 2 est toujours vérifiée.

THÉORÈME 3. - Soit K un noyau semi-régulier. S'il existe un fermé $F \subset G$ non compact qui est de convolution, alors f est essentiellement décroissante.

La simple démonstration consiste à placer la masse $1/N$ en N points de F situés loin l'un de l'autre, comme on l'a déjà fait.

Pour arriver à un résultat positif concernant les fermés non compacts de convolution, il faut donc supposer f essentiellement décroissante. En outre, pour empêcher K d'être trop petit, il faut non seulement la condition "locale" (6.1), mais aussi une condition analogue à l'infini.

THÉORÈME 4. - Soit K un noyau semi-régulier avec f essentiellement décroissante. Supposons que les conditions (6.1) et

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\lim}_{\alpha\to 0} \frac{1}{f(\alpha)} \int_{E(\alpha)\setminus E(N\alpha)} K(x)\, dx = +\infty \tag{7.1}$$

soient vérifiées. Alors un fermé $F \subset G$ est de convolution dans G si, et seulement si, F a des trous proportionnels.

Démonstration. - Si F n'a pas de trous proportionnels, on peut, pour tout N, trouver $\alpha > 0$ et un translaté $x + E(\alpha)$ qui ne contient aucun translaté de $E(N\alpha)$ disjoint de F. Si pour $N \to \infty$, il y a une sous-suite des α qui majore un $\varepsilon > 0$, alors la première partie de la démonstration du théorème 1 s'applique, montrant que F n'est pas de convolution. Sinon, on a $\alpha \to 0$ lorsque $N \to \infty$, et on peut utiliser la même méthode de démonstration, à cause de (7.1).

Réciproquement, si F a des trous proportionnels, on peut supposer K régulier, comme dans le théorème 1. Alors $E(0)$ est un sous-groupe ouvert et fermé, et on se donne d'abord une mesure de probabilité μ portée par $F \cap E(0)$. Si $\alpha > 0$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$|\{U^\mu > \alpha\} \cap E(\alpha_0)| > \frac{1}{2} |\{U^\mu > \alpha\}| . \tag{7.2}$$

Prenons $\alpha_1 < \alpha_0$ suffisamment petit pour que

$$U^{\mu-\nu} \leqslant \alpha/2 \tag{7.3}$$

dans $E(\alpha_0)$, où ν est la restriction de μ à $E(\alpha_1)$. Posons $K_1 = \alpha_1^{-1} K$ et, de même, $E_1(\beta) = E(\alpha_1 \beta)$ et $\lambda_1(\beta) = |E_1(\beta)|$, $\beta > 0$. Alors K_1 est régulier avec les mêmes constantes A et η que K, et il vérifie (6.2) avec constante C. De plus, F a des trous proportionnels pour K_1 avec un facteur N qui ne dépend pas de α_1. Alors le théorème 1 et l'estimation uniforme (6.7) montrent que

$$|\{U^\nu > \alpha/2\} \cap E(\alpha_1)| = |\{K_1 * \nu > \alpha/(2\alpha_1)\} \cap E_1(1)| \leqslant C\lambda_1(\alpha/(2\alpha_1)) = C\lambda(\alpha/2) ,$$

avec C indépendante de α_1. Moyennant (7.2) et (7.3), on obtient

$$|\{U^\mu > \alpha\}| \leqslant C\lambda(\alpha) . \tag{7.4}$$

Soit maintenant μ une mesure de probabilité quelconque portée par F. On peut écrire μ comme une somme dénombrable $\sum \mu_i$, où chaque μ_i est portée par une classe d'équivalence $x + E(0)$. Avec $m_i = \|\mu_i\|$, (7.4) implique

$$(U^{\mu_i})^* \leqslant C m_i K^* .$$

Mais les supports des U^{μ_i} sont disjoints, d'où

$$|\{U^\mu > \alpha\}| = |\cup_i \{U^{\mu_i} > \alpha\}| \leqslant \sum_i \sup\{t \; ; \; C m_i K^*(t) > \alpha\}$$

$$= \sum_i \lambda\left(\frac{\alpha}{C m_i}\right) = C \sum_i m_i \alpha^{-1} f\left(\frac{\alpha}{C m_i}\right) \leqslant C \sum_i m_i \alpha^{-1} f(\alpha) = C\lambda(\alpha) ,$$

où on a utilisé la décroissance essentielle de f et le fait que $m_i \leqslant 1$.

Ceci termine la démonstration du théorème 4.

8. Noyaux radiels décroissants dans $\mathbb{R}^n$.

Pour ces noyaux, K^* est souvent donné de façon plus explicite que λ, d'où l'intérêt d'écrire les conditions imposées sur λ en termes de K^*. On pose $K^*(t) = g(t)\, t^{-1}$; le lecteur vérifiera facilement les assertions de cette section.

La condition (6.1) est équivalente à $\lim_{N\to\infty} \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{1}{g(t)} \int_{t/N}^{t} K^*(s)\, ds = +\infty$, et

(7.1) se récrit de manière analogue $(t \to \infty)$. Les inégalités (6.2) et (6.12) se traduisent, respectivement, par

$$g(s) \leqslant Ag(t) \quad \text{et} \quad g(t) \leqslant Ag(s) \ , \text{ pour } t^2 \leqslant s \leqslant t < 1 \ .$$

La fonction f est essentiellement décroissante si, et seulement si, g est essentiellement croissante (définition évidente). Finalement, la condition (b) du théorème 2 équivaut à

$$(8.1) \qquad g(t) \leqslant Cg(n_\alpha t) \ , \text{ où } \alpha = K^*(t) \ .$$

Considérons maintenant un noyau admissible $K(x) = k(|x|)|x|^{-n}$, radiel et décroissant dans $\underset{\sim}{R}^n$ ($k(r)r^{-n}$ est décroissante en r). On trouve $g(t) \sim k(t^{1/n})$. Si on note $A_r = A_r(F)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon $r > 0$ qui recouvrent $F \subset \underset{\sim}{R}^n$, on a $A_r \sim n_\alpha$ pour $\alpha \sim K^*(r^n)$. L'inégalité (8.1) devient

$$k(r) \leqslant Ck(A_r^{1/n} r) \ .$$

En particulier, supposons que $k(r) \sim \exp \varphi(\log r^{-1})$ pour $r \to 0$, où φ est comme dans la remarque 1 à la fin de la section 6. En procédant comme dans cette remarque, on montre que (8.1) est équivalente à

$$A_r \leqslant C + \exp(C/\varphi'(\log r^{-1})) \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] HAAKER (Annika SPARR-). - On the conjugate space of Lorentz space, University of Lund and Lund Institute of Technology, Department of Mathematics, 1970 (multigraphié).

[2] SJÖGREN (P.). - La convolution dans L^1 faible de $\underset{\sim}{R}^n$, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 13e année, 1973/74, n° 14, 10 p.

[3] STEIN (E. M.) et WEISS (G.). - Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces. - Princeton, Princeton University Press, 1971 (Princeton mathematical Series, 32).

(Texte reçu le 19 mars 1975)

Peter SJÖGREN
Université de Paris-VI
Mathématiques [Equipe d'Analyse]
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05