Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Hicham Fakhoury

Directions d'uniforme convexité dans un espace normé

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº 6, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A4_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 6, 16 p.

5 décembre 1974

DIRECTIONS D'UNIFORME CONVEXITÉ DANS UN ESPACE NORMÉ

par Hicham FAKHOURY

1. Introduction et notations.

Un espace normé V est uniformément convexe dans la direction d'un sous-espace fermé M si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, M)$ tel que, pour tous les points x et y de la sphère unité de V qui vérifie

(*) $$\|x + y\| \geqslant 2(1 - \delta) \quad \text{et} \quad x - y \in M ,$$

on ait $\|x - y\| < \varepsilon$.

Cette notion, qui est donc une relativisation à un sous-espace M de l'uniforme convexité, est développée par ZIZLER [11] dans le cas où le sous-espace M est de dimension 1 à l'occasion de l'étude de diverses propriétés de convexité et différentiabilité de la norme dans un espace de Banach. Dans ce travail, on aborde l'étude de cette notion quand la dimension du sous-espace M est arbitraire.

Dans les deuxième et troisième parties, on donne diverses conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un sous-espace M constitue une direction d'uniforme convexité. En particulier, on montre que la condition $x - y \in M$ de (*) peut être remplacée par une hypothèse beaucoup moins contraignante. De plus, on établit que si M est une direction d'uniforme convexité pour V, il existe une unique projection de meilleure approximation de V sur M, et que cette projection est uniformément continue sur les "cylindres" contenant M. L'existence d'une telle projection n'est pas équivalente à l'uniforme convexité de V dans la direction M. D'autre part, on montre que si V est uniformément convexe dans la direction d'un hyperplan fermé $H = \operatorname{Ker} f$, alors la forme linéaire f atteint ses bornes en deux points fortement exposés de la boule unité de V. On démontre aussi que l'ensemble des sous-espaces de V, qui sont des directions d'uniforme convexité, est un $F_{\sigma\delta}$ de l'ensemble des sous-espaces fermés de V muni de la topologie associée à la distance de Hausdorff. Enfin, si X et Y sont deux compacts, et Φ une surjection continue de X sur Y, on montre l'existence d'une projection homogène continue qui réalise la meilleure approximation de $C(X, V)$ sur le sous-espace formé des fonctions $\{f_0 \Phi ; f \in C(Y, V)\}$, dès que V est uniformément convexe dans toutes les directions de dimension 1 et qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de V'' sur V.

Dans la dernière partie, on recherche les directions d'uniforme convexité pour les espaces simpliciaux, c'est-à-dire les espaces $A_0(K)$, où K est un simplexe compact admettant 0 comme point extrêmal. En particulier, on montre qu'un tel espace ne peut avoir de direction d'uniforme convexité de dimension supérieure ou égale à 2 . En utilisant une méthode introduite par ZIZLER dans [11], on montre que tout espace séparable peut être muni d'une norme pour laquelle tous les espaces de dimension finie constituent des directions d'uniforme convexité. Ce résultat s'étend en fait à tous les espaces inclus dans un espace $C(X)$, où X est un compact qui est support d'une mesure de Radon. On termine en donnant l'exemple d'un espace réflexif (même hilbertisable) qui est strictement convexe et qui n'est pas uniformément convexe dans toutes les directions de dimension 1 .

Dans la suite, V est un espace normé, et M un sous-espace fermé. La sphère unité de V est notée $S(V)$, la boule unité fermée $B(V)$, et la boule fermée de centre x et de rayon r notée $B(x , r)$. On notera V' le dual de V et $\mathcal{R}$ la restriction canonique de V' sur M' . Si A est une partie de V , on note $d(x , A) = \inf \{\|x - a\| ; a \in A\}$ la distance d'un point x de V à la partie A . Si K est un convexe compact, on désigne par $E(K)$ l'ensemble des points extrêmaux de K . Rappelons qu'un convexe compact K est un simplexe dès que l'espace $A(K)$ des fonctions affines continues sur K vérifie la propriété d'interpolation de Riesz (voir [1] pour plus de détails sur les simplexes). Un convexe compact K est dit standard si l'ensemble $\mathcal{E}(K)$ est universellement mesurable et si toute mesure maximale sur K au sens de l'ordre de Choquet est portée par $\mathcal{E}(K)$; en particulier, tout convexe compact métrisable est standard (voir [1]).

2. Caractérisation des directions d'uniforme convexité.

DÉFINITION 2.1. - *Soit M un sous-espace fermé d'un espace normé V ; on dira que V est uniformément convexe dans la direction M si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon , M)$ tel que, pour tout les points x et y de $S(V)$ vérifiant $x - y \in M$ et $\|x + y\| \geq 2(1 - \delta)$, on ait $\|x - y\| < \varepsilon$.*

Si V est uniformément convexe dans la direction M , l'espace M est lui-même uniformément convexe ; ainsi, si M est complet, il sera réflexif.

La proposition suivante consiste en une adaptation de propriétés connues dans le cas des espaces uniformément convexes. La démonstration est omise, le lecteur peut se reporter à [11], où une démonstration est donnée dans le cas où $\dim M = 1$. Celle-ci repose sur le fait suivant, si x et y sont deux points de $S(V)$ tels que $\|x + y\| \geq 2(1 - \delta)$, alors, pour tout t du segment $[x , y]$, on a

$$\|t\| \geq 1 - 2\delta .$$

PROPOSITION 2.2. - *Soient V un espace normé, et M un sous-espace fermé de V ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) V *est uniformément convexe dans la direction* M ;

(b) *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites dans* $B(V)$ *telles que* $x_n - y_n \in M$ *et* $\|x_n + y_n\| \longrightarrow 2$, *alors* $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$.

(c) *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites bornées de* V , *si* $x_n - y_n \in M$, $\|x_n\| - \|y_n\| \longrightarrow 0$, *et* $\|x_n\| + \|y_n\| - \|x_n + y_n\| \longrightarrow 0$; *alors* $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$.

(d) *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* V , *et* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* M , *telles que* $\|x_n\| \longrightarrow 1$, $\|x_n + m_n\| \longrightarrow 1$ *et* $\|x_n + 2m_n\| \longrightarrow 1$; *alors* $\|m_n\| \longrightarrow 0$.

(e) *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* V , *et* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* M , *telles que* :

$$2(\|x_n + m_n\|^2 + \|x_n\|^2) - \|2x_n + m_n\|^2 \longrightarrow 0 \ ;$$

alors $\|m_n\| \longrightarrow 0$.

Le théorème suivant montre que, dans une certaine mesure, on peut se passer de la condition $x - y \in M$ qui intervient dans la définition de l'uniforme convexité.

THÉORÈME 2.3. - *Soient* V *un espace normé, et* M *un sous-espace fermé de* V ; *les assertions suivantes sont équivalentes* :

(a) *L'espace* V *est uniformément convexe dans la direction* M ;

(b) *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* $B(V)$ *telles que* $d[(x_n - y_n), M]$ *converge vers* 0 *et* $\|x_n + y_n\| \longrightarrow 2$; *alors* $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$.

Démonstration. - Il est clair que (b) implique (a). Inversement, supposons l'existence de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $B(V)$ telles que

$$d[(x_n - y_n) \ , M] \longrightarrow 0 \ ;$$

$\|x_n + y_n\| \longrightarrow 2$ et $\|x_n - y_n\|$ ne convergent pas vers 0 . En se limitant à des sous-suites, on peut supposer que $\|x_n - y_n\| \geqslant \alpha > 0$. La condition

$$d[(x_n - y_n) \ , M] \longrightarrow 0$$

implique l'existence d'une suite $(m_n)_{n \ \mathbb{N}}$ dans M telle que $\|x_n - y_n - m_n\| \longrightarrow 0$. Il est clair que, pour n assez grand, on a $\|m_n\| \geqslant \alpha/2$. D'autre part, on ne peut pas avoir $m_n = x_n$ pour une infinité d'indices puisqu'alors $(y_n)_{n \ \mathbb{N}}$ contient une sous-suite qui tend vers 0 contredisant le fait que $\|x_n + y_n\| \longrightarrow 2$, avec $\|x_n\| \leqslant 1$. Posons $\alpha_n = 1 \wedge \|x_n - m_n\|^{-1}$ qui a un sens puisque $x_n \neq m_n$ pour n assez grand. Comme on a

$$0 \leqslant \lim_n \big| \|x_n - m_n\| - \|y_n\| \big| \leqslant \lim_n \|x_n - y_n - m_n\| \leqslant 0 \ ,$$

on peut, en se restreignant à une sous-suite, supposer que

$$\lim_n \|x_n - m_n\| = \lim_n \|y_n\| = \lambda \leqslant 1 \ .$$

Par conséquent, on a l'égalité $\lim_n \alpha_n = 1$. Posons $a_n = \alpha_n x_n$ et $b_n = \alpha_n(x_n - m_n)$. Il est clair que a_n et b_n sont dans $B(V)$. De plus, $a_n + b_n = \alpha_n(2x_n - m_n)$, et l'on a

$$\big| \|x_n + y_n\| - \|y_n - x_n - m_n\| \big| < \|2x_n - m_n\| < \|x_n + y_n\| + \|x_n - y_n - m_n\| \ .$$

Comme les deux membres extrêmes tendent vers 2 et que $\lim_n \alpha_n = 1$, on arrive à $\lim_n \|a_n + b_n\| = 2$. Comme $a_n - b_n = \alpha_n m_n \in M$ et que $\lim_n \alpha_n \|m_n\| \geq \alpha/2 > 0$, on en déduit que V ne vérifie pas la condition (a).

COROLLAIRE 2.4. - Soient V un espace normé, et M un sous-espace de dimension finie, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) V est uniformément convexe dans la direction M ;

(b) Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans $B(V)$ telles que $x_n - y_n$ converge vers un point m de M et $\|x_n + y_n\| \longrightarrow 2$; alors $m = 0$.

Rappelons que l'on appelle module d'uniforme convexité de V dans la direction M la quantité

$$\delta(\varepsilon , M) = \inf \{1 - \|\frac{x + y}{2}\| \ ; \ \|x\| = \|y\| = 1 \ ; \ x - y \in M \ ; \ \|x - y\| > \varepsilon\} .$$

Si $M = \mathbb{R}.z$ est un sous-espace engendré par $z \in S(V)$, on note $\delta(\varepsilon , z)$ le module d'uniforme convexité dans la direction $\mathbb{R}.z$. Il est clair que V est uniformément convexe dans la direction M si, et seulement si, $\delta(\varepsilon , M) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

PROPOSITION 2.5. - Soit $\varepsilon > 0$ donné ; l'application $z \longrightarrow \delta(\varepsilon , z)$, définie sur $S(V)$, est s. c. s. Par conséquent, l'ensemble des vecteurs de $S(V)$ qui définissent une direction d'uniforme convexité dans V forme un $F_{\sigma\delta}$.

Démonstration. - Soient $\varepsilon > 0$, z_0 dans $S(V)$, et $\alpha > \delta(\varepsilon , z_0)$. Il existe x_0 , y_0 dans $S(V)$ tels que

$$\delta(\varepsilon , z_0) \leq 1 - \|(x_0 + y_0)\|/2 < \alpha \ ;$$

ces deux points vérifient de plus $x_0 - y_0 \in \mathbb{R}z$ et $\|x_0 - y_0\| > \varepsilon$.

Soit $s = (x_0 + y_0)/2$ le milieu du segment $[x_0 , y_0]$. Considérons, pour tout z dans $S(V)$, le segment $[x , y]$ passant par s , parallèle à $\mathbb{R}z$ et dont les extrémités sont portées par $S(V)$. Dans ce cas, on peut écrire

$$x = s + az \ ; \ y = x - bz \ ; \text{ où } a > 0 \ ; \ b > 0 ,$$

où x , y et les scalaires a , b , et $\|x - y\|$ sont des fonctions continues de z . Comme $b(z_0) = a(z_0) = \|(x_0 - y_0)\|/2 > \varepsilon/2$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|z - z_0\| < \eta$$

implique

$$a(z) > \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } b(z) > \frac{\varepsilon}{2} .$$

Par conséquent, pour $\|z - z_0\| < \varepsilon$, on a $\|x - y\| = a(z) + b(z) > \varepsilon$. Comme $\|s\| = \|s(z_0)\| > 1 - \alpha$, il existe $\eta' > 0$ tel que $\|z - z_0\| < \eta'$ implique $\|(x + y)/2\| > 1 - \alpha$. Ainsi pour $\|z - z_0\| < \eta \wedge \eta'$, on a

$$\delta(\varepsilon , z) \leq 1 - \|(x + y)/2\| < \alpha ,$$

ce qui montre bien que $\delta(\varepsilon , z)$ est une fonction s. c. s. Si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des z de $S(V)$ qui définissent des directions d'uniforme convexité, on a

$$\mathcal{D} = \{z \in S(V) \ , \ \delta(\varepsilon \ , z) > 0 \ ; \ \forall \ \varepsilon > 0\} \ .$$

$$\mathcal{D} = \bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} \{z \in S(V) \ ; \ \delta(\tfrac{1}{n} \ , z) > 0\} \ .$$

$$\mathcal{D} = \bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} \bigcup_{p \in \underset{\sim}{N}} \{z \in S(V) \ ; \ \delta(\tfrac{1}{n} \ , z) \geqslant \tfrac{1}{p}\} = F_{\sigma\delta}$$

ce qui achève la démonstration.

Rappelons que l'on note $\mathcal{S}(V)$ l'ensemble des sous-espaces fermés d'un espace de Banach V. L'ensemble $\mathcal{S}(V)$, muni de la trace de la topologie de Hausdorff des fermés de $B(V)$ sur les ensembles $M \cap B(V) = B(M)$ où M parcourt $\mathcal{S}(V)$, est un espace métrique complet.

PROPOSITION 2.8. - *Soit $\varepsilon > 0$ donné, alors l'application $M \longmapsto \delta(\varepsilon \ , M)$ est s. c. s. sur $\mathcal{S}(V)$. Par conséquent, l'ensemble des sous-espaces fermés M, qui sont des directions d'uniforme convexité, est un $F_{\sigma\delta}$ de $\mathcal{S}(V)$.*

Démonstration. - Il est aisé de vérifier l'égalité suivante

$$\delta(\varepsilon \ , M) = \inf \{\delta(\varepsilon \ , z) \ ; \ z \in S(M)\} \ , \qquad \forall \ \varepsilon > 0 \ .$$

Soient M_0 un sous-espace de V, et $\delta(\varepsilon \ , M_0) < \alpha$; d'après l'égalité précédente, il existe un point z_0 de $S(M)$ tel que $\delta(\varepsilon \ , z_0) < \alpha$. Il existe d'après la proposition précédente $\eta > 0$ tel que, pour tout z de $S(V)$ vérifiant $\|z - z_0\| < \eta$, on ait $\delta(\varepsilon \ , z) < \alpha$. Or l'ensemble $\mathcal{V}(M_0)$ des sous-espaces de V, qui contiennent dans leur sphère unité un vecteur z vérifiant $\|z - z_0\| < \eta$, est un voisinage de M_0 dans $\mathcal{S}(V)$. Ceci prouve que $\delta(\varepsilon \ , M)$ est s. c. s., le reste de la démonstration s'effectue comme dans la proposition précédente.

Pour établir que V est uniformément convexe dans la direction du sous-espace M, il ne suffit évidemment pas que M soit uniformément convexe. Cependant il suffit de considérer les sous-espaces N de V qui admettent M pour hyperplan ; en effet, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2.9. - *L'espace V est uniformément convexe dans la direction M si, et seulement si, tous les sous-espaces N de V admettant M pour hyperplan sont uniformément convexes dans la direction M avec le même module d'uniforme convexité.*

Cette proposition est facile à vérifier, et sa démonstration est omise. Cette proposition et le corollaire 2.6 permettent de penser que, pour un espace réflexif, le fait d'être uniformément convexe dans toutes les directions de dimension 1 équivaut à la stricte convexité. On verra dans la dernière partie qu'il n'en est rien en construisant un espace hilbertisable, strictement convexe, qui n'est pas uniformément convexe dans toutes les directions de dimension 1.

3. Projection de meilleure approximation.

Le lemme suivant généralise un résultat de [11].

LEMME 3.1. – *Soient* V *un espace normé, et* M *un sous-espace fermé de* V. *On suppose que* V *est uniformément convexe dans la direction* V. *Alors le couple* (M, V) *possède la propriété (P) suivante :*

Soient $(x_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ *une suite bornée dans* V, $(y_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ *et* $(z_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ *deux suites dans* M *vérifiant les conditions suivantes :*

$$\lim_n [\|x_n - y_n\| - d(x_n\ M)] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_n [\|x_n - z_n\| - d(x_n\ M)] = 0 .$$

Alors la suite $\|y_n - z_n\|$ *tend vers* 0.

Démonstration. – Si (M, V) ne possède pas la propriété (P), il existe trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) telles que, en se restreignant éventuellement à des sous-suites, on ait :

$$\|x_n - y_n\| - d(x_n, M) \longrightarrow 0 , \quad \|x_n - z_n\| - d(x_n\ M) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|y_n - z_n\| \geqslant \varepsilon > 0 .$$

La suite $d_n = d(x_n, M)$ ne peut converger vers 0, sinon il en serait de même pour $\|y_n - z_n\|$. On peut donc supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $d_n \geqslant \alpha > 0$. Pour $\varepsilon' > 0$ et $\eta > 0$ tel que $\eta/(\eta + \alpha) < \delta(\varepsilon', M)$, il existe N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait simultanément

$$\|x_n - y_n\| - d_n < \eta \quad \text{et} \quad \|x_n - z_n\| - d_n < \eta .$$

Ainsi y_n et z_n sont dans la boule $B(x_n, d_n + \eta)$. Fixons $n \geqslant N$, et notons y'_n et z'_n les points d'intersection de la droite (y_n, z_n) avec la sphère $S(x_n, d_n + \eta)$. Il est clair que $\|y_n - z_n\| \leqslant \|y'_n - z'_n\|$. Comme $(y'_n + z'_n)/2$ est un point de M, on a $\|((y'_n + z'_n)/2) - x\| \geqslant d_n$. Par suite

$$\frac{\|(y'_n - x_n) + (z'_n - x_n)\|}{2(d_n + \eta)} = \frac{1}{d_n + \eta} \left\|\frac{y'_n + z'_n}{2} - x_n\right\| \geqslant \frac{d_n}{d_n + \eta} = 1 - \frac{\eta}{d_n + \eta} .$$

D'après le choix de η on a :

$$1 - \frac{\eta}{d_n + \eta} \geqslant 1 - \frac{\eta}{\alpha + \eta} > 1 - \delta(\varepsilon', M) ,$$

ce qui implique, en utilisant le fait que V est uniformément convexe dans la direction M, que $\|(y'_n - x_n) = (z'_n - x_n)\| < \varepsilon'(d_n + \eta)$. Ainsi on a

$$\|y_n - z_n\| \leqslant \|y'_n - z'_n\| \leqslant \varepsilon'(d_n + \eta) \leqslant M.\varepsilon' ,$$

puis la suite $(d_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ est bornée. Comme ε' est arbitraire, ceci contredit la condition $\|y_n - z_n\| \geqslant \varepsilon > 0$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, d'où le résultat.

THÉORÈME 3.2. – *Si* V *est un espace normé uniformément convexe dans la direction d'un sous-espace fermé complet* M, *il existe une unique projection de meilleure approximation de* V *sur* M. *Cette projection est uniformément continue sur les "cylindres"* $C_\gamma(M) = \{x \in V ;\ d(x, V) \leqslant \gamma\}$.

Démonstration. - Soient x un point de $V \setminus M$ et $d = d(x , M)$. Soient y_n et z_n deux points de $B(x , d + 1/n) \cap M$ tels que

$$\|y_n - z_n\| > \frac{n-1}{n} \operatorname{diam} [B(x , d + \tfrac{1}{n}) \cap M] .$$

D'après le lemme précédent, $\lim_n \|y_n - z_n\| = 0$ puisque, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $\|y_n - x\| - d$ et $\|z_n - x\| - d$ sont majorées par $1/n$. Par conséquent,

$$\operatorname{diam} [B(x , d + \tfrac{1}{n})] \cap M$$

tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$, comme M est complet, il existe un unique point m dans M qui réalise la meilleure approximation du point x. Soit P la projection de meilleure approximation ainsi définie. Soit $\varepsilon > 0$, il s'agit d'établir l'existence d'un $\eta > 0$ tel que, pour tout x, x' dans $C_\gamma(M)$ vérifiant $\|x - x'\| < \eta$, on a $\|P(x) - P(x')\| < \varepsilon$. Soient $\alpha > 0$, x un point de $V \setminus M$, et y, z deux points de $B(x , d + \alpha) \cap M$ tels que

$$\|y - z\| > (\frac{n-1}{n}) \operatorname{diam} [B(x , d + \alpha) \cap M] .$$

On peut supposer comme dans le lemme précédent que $\|y - x\| = \|z - x\| = d + \alpha$. Alors on a

$$\left\|\frac{(y - x) + (z - x)}{2(d + \alpha)}\right\| = \frac{1}{d + \alpha} \left\|\frac{y + z}{2} - x\right\| \geqslant \frac{d}{d + \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{d + \alpha} .$$

Ainsi, si $1 - ((\alpha/(d + \alpha) > 1 - \delta(\varepsilon , M)$, c'est-à-dire $\alpha < (d\delta(\varepsilon,M))/(1-\delta(\varepsilon,M))$, on a

$$\operatorname{diam} [B(x , d + \alpha) \cap M] < \varepsilon . \frac{d + \delta(\varepsilon , M)}{1 - \delta(\varepsilon , M)} .$$

Soit x' un point de V tel que $\|x - x'\| \leq \alpha/2$; alors, en utilisant le fait que l'application $x \longrightarrow d(x , M)$ est 1-lipschitzienne, on a

$$\|x - P(x')\| \leqslant \|x - x'\| + \|x' - P(x')\| \leqslant 2\|x - x'\| + \|x - P(x)\| \leqslant \alpha + d .$$

Ainsi, le point $P(x')$ est dans $B(x , d + \alpha)$, et on a d'après ce qui précède

$$\|P(x) - P(x')\| < \varepsilon . \frac{d + \delta(\varepsilon , M)}{1 - \delta(\varepsilon , M)} \leqslant \varepsilon . \frac{\gamma + \delta(\varepsilon , M)}{1 - \delta(\varepsilon , M)} .$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout x, x' dans $C_\gamma(M)$, tels que

$$\|x - x'\| < \frac{\gamma\delta(\varepsilon , M)}{2(1 - \delta(\varepsilon , M))} ,$$

on a

$$\|P(x) - P(x')\| < \varepsilon . \frac{\gamma + \delta(\varepsilon , M)}{1 - \delta(\varepsilon , M)}$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de P sur $C_\gamma(M)$.

Remarques.

(a) Il est faux que l'application P soit en général uniformément continue sur tout l'espace V puisque d'après [3] on sait qu'un espace de Banach V est hilbertisable dès qu'il existe une projection uniformément continue sur tout sous-espace M de V. Ainsi, si V est un espace uniformément convexe non hilbertisable (par exemple $V = \ell^p(\underset{\sim}{N})$; $1 < p < \infty$; $p \neq 2$) il existe un sous-espace M de V tel que la projection de meilleure approximation correspondante ne soit pas uniformément continue sur tout V .

(b) Soient X un espace topologique, et $C(X , V)$ (resp. $C(X , M)$) l'espace des fonctions continues bornées définies sur X et à valeurs dans V (resp. M) muni de la norme habituelle. Si V est uniformément convexe dans la direction M, alors il existe une projection de meilleure approximation continue de $C(X , V)$ sur $C(X , M)$; projection qui est uniformément continue sur les "cylindres" contenant $C(X , M)$. En effet, il suffira d'associer à tout f dans $C(X , V)$ la fonction $g = P \circ f$ dans $C(X , M)$.

PROPOSITION 3.3. - Si V est un espace de Banach uniformément convexe dans la direction d'un hyperplan fermé $H = \operatorname{Ker} f$, alors f atteint ses bornes en deux points fortement exposés de $B(V)$.

Démonstration. - On sait que f atteint son maximum sur $B(V)$ puisque ceci équivaut à l'existence pour tout $x \in V \setminus H$ d'un point de H qui réalise la meilleure approximation. Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta = \delta(\varepsilon , H)$; on note

$$S_\varepsilon = \{x \in B(V) \ ; \ f(x) \geqslant 1 - \delta\} .$$

Il suffit de montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{diam} S_\varepsilon = 0$; en fait, on montrera que

$$\operatorname{diam} S_\varepsilon \leqslant 2\delta + \varepsilon .$$

Soient $H_\varepsilon = \{x \in B(V) \ ; \ f(x) = 1 - \delta\}$, et x , y deux points de H_ε ; on a, en supposant $\|f\| = 1$, l'inégalité :

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\| \geqslant f\left(\frac{x + y}{2}\right) = 1 - \delta .$$

Par conséquent, $\operatorname{diam} H_\varepsilon < \varepsilon$. Soient maintenant x , y deux points de S_ε . Il existe λ , μ inférieurs à 1 tels que $\lambda x \in H_\varepsilon$ et $\mu y \in H_\varepsilon$. Il est clair que $\lambda \geqslant 1 - \delta$ et $\mu \geqslant 1 - \delta$; par suite,

$$\|x - y\| \leqslant \|x - \lambda x\| + \|\lambda x - \mu y\| + \|\mu y - y\| \leqslant 2\delta + \varepsilon ,$$

ce qui implique $\operatorname{diam} S_\varepsilon \leqslant 2\delta + \varepsilon$, et achève la démonstration.

La propriété (P) n'est pas équivalente au fait que V est uniformément convexe dans la direction M . En effet, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4. - Soit V un espace de dimension finie ; alors le couple (M,V) possède la propriété (P) si, et seulement si, pour tout x dans V , il existe un unique point $P(x)$ de M qui réalise la meilleure approximation, la projection P étant continue.

Démonstration. - La condition nécessaire est déjà établie. Inversement, supposons l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ bornée dans V , et de deux suites (y_n) et (z_n) de M telles que

$$\|x_n - y_n\| - d(x_n , M) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|x_n - z_n\| - d(x_n , M) \longrightarrow 0 ,$$

mais telle que $\|y_n - z_n\|$ ne converge pas vers 0 . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\|y_n - z_n\| \geq \varepsilon > 0$ et que la suite $(x_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ converge vers un point x de V. Par conséquent, $P(x_n)$ converge vers $P(x)$. Cependant, on a les inégalités suivantes :

$$\|x - P(x)\| \leq \|x - y_n\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y_n\| ,$$

où le membre de droite converge vers $\|x - P(x)\|$. Or $(y_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ contient une sous-suite convergente dont la limite est nécessairement $P(x)$. On démontre de même que $(z_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ contient une sous-suite qui converge vers $P(x)$; ce qui contredit la condition $\|y_n - z_n\| \geq \varepsilon > 0$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$.

Cette proposition permet de construire un couple (M , V) possédant la propriété (P) sans que V soit uniformément convexe dans la direction M. En effet, il suffit de prendre $V = \underset{\sim}{R}^3$ muni de la norme $\|(x_i)\| = \sup \{|x_i| , i = 1 , 2 , 3\}$ et par M un sous-espace de dimension 2 dont la boule unité est un hexagone. Signalons que si $\dim M = 1$, la situation est différente, en effet, il est établi dans [11] que dans ce cas la propriété (P) équivaut à l'uniforme convexité dans la direction M. Dans la suite, on généralise un résultat de [4] concernant l'existence et la continuité des projections de meilleure approximation dans les espaces $C(X)$ à des espaces du type $C(X , V)$ formés des fonctions définies continues sur un compact X et à valeurs dans un espace de Banach V qui est uniformément convexe dans toutes les directions de dimension 1. Si θ est une application multivoque de X dans V, on définit la distance d'une fonction f de $C(X , V)$ à θ par

$$d(f , \theta) = \sup_{x \in X} \sup_{y \in \theta(x)} \|f(x) - y\| .$$

On rappelle que θ est dite s. c. s. si, pour tout ouvert ω de V, l'ensemble $\{x \in X ; \theta(x) = \omega\}$ est ouvert ; elle est s. c. i. si $\{x \in X ; \theta(x) \cap \omega \neq \emptyset\}$ est un ouvert de X.

LEMME 3.5. - <u>Soit</u> V <u>un espace de Banach uniformément convexe dans la direction de toute droite</u> ; <u>on suppose qu'il existe une projection</u> 1-<u>lipschitzienne de</u> V'' <u>sur</u> V. <u>Soit</u> θ <u>une application multivoque s. c. s. d'un espace paracompact</u> X <u>dans l'ensemble des parties fermées de</u> V. <u>Alors, il existe une fonction</u> f_0 <u>de</u> $C(X , V)$ <u>qui réalise la meilleure approximation de</u> θ <u>dans le sens suivant</u>

$$d(f_0 , \theta) = \inf \{d(f , \theta) ; f \in C(X , V)\} .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $S(\theta)$ la borne supérieure, quand x parcourt X, des rayons des boules circonscrites aux ensembles $\theta(x)$; en effet, d'après [5], tout ensemble fermé borné de V est inclus dans une unique boule fermée de rayon minimum. Si $S(\theta) = + \infty$, alors $d(f , \theta) = \infty$ pour tout f dans $C(X , V)$, et dans ce cas il n'y a rien à prouver. Si $S(\theta) < \infty$, on pose pour tout x dans X :

$$F(x) = \cap \{B[y , S(\theta)] ; y \in \theta(x)\} ,$$

qui n'est autre que l'ensemble des centres des boules de rayon $S(\theta)$ contenant

$\theta(x)$. Les ensembles $F(x)$ sont des convexes fermés non vides. De plus, l'application F est s. c. i. d'après une adaptation facile des résultats de [9] au cas des espaces uniformément convexes dans toutes les directions de dimension 1. En appliquant le théorème de MICHAEL [8] à F, on obtient une fonction f_0 de $C(X,V)$ telle que $f_0(x) \in F(x)$ pour tout x de X. Il est aisé de vérifier que

$$d(f_0 , \theta) = S(\theta) = \inf\{d(f , \theta) ; f \in C(X , V)\} .$$

THÉORÈME 3.6. - Soient X et Y deux espaces compacts, et V un espace de Banach uniformément convexe dans la direction de chaque droite ; on suppose qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de V'' sur V. Soient Φ une surjection continue de X sur Y, et M le sous-espace de $C(X , V)$ formé des fonctions $\{\Phi \circ f$ où $f \in C(Y , V)\}$. Alors, il existe une projection continue de meilleure approximation de $C(X , V)$ sur M qui vérifie $P(\lambda f) = \lambda P(f)$ pour $\lambda \in \underline{R}$.

Démonstration. - Soient S la sphère unité de $C(X , V)$, et T l'espace paracompact produit $T = Y \times S$. L'application multivoque θ définie sur T par

$$\theta(y , f) = \{f(x) ; \Phi(x) = y\} = f[\Phi^{-1}(y)]$$

est s. c. s. puisque $y \longmapsto \Phi^{-1}(y)$ est s. c. s. Si F est une fonction de $C(T,V)$ qui réalise la meilleure approximation de θ au sens du lemme précédent, l'application $F_f : y \longmapsto F(y f)$ est continue sur Y, et l'application $f \longmapsto F_f$ est continue car Y est compact. Si l'on pose $P_0(f) = \Phi \circ F_f$, on obtient la projection de meilleure approximation recherchée en posant

$$P(f) = \frac{\|f\|}{2} [P_0(f/\|f\|) + P_0(- f/\|f\|)] .$$

Tout comme dans [4], le résultat précédent se généralise à la classe des espaces $A_0(K , V)$ des fonctions linéaires continues définies sur un convexe compact symétrique K et à valeurs dans V. On rappelle qu'un espace de Banach E est un L-espace si E est isométrique à l'espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure μ. Si E est un espace dual ($E = U'$), alors les propriétés géométriques de $K = B(E)$ muni de $\sigma(E , U)$ ont été étudiées par divers auteurs (voir les chapitres correspondants dans [6]). La méthode utilisée dans [4] permet d'établir le théorème ci-après.

THÉORÈME 3.7. - Soit V un espace de Banach uniformément convexe dans la direction de tout sous-espace de dimension 1 ; on suppose qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de V'' sur V. Soient X un convexe compact symétrique, et K la boule unité d'un L-espace dual. Soit Φ une surjection linéaire continue de X dans K vérifiant

$$(*) \qquad \Phi^{-1}[\lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2] = \lambda\Phi^{-1}(k_1) + (1 - \lambda)\Phi^{-1}(k_2) .$$

pour tous λ dans $[0 , 1]$ et k_1, k_2 dans K. Il existe alors une projection homogène continue de $A_0(X , V)$ sur le sous-espace $M = \{f \circ \Phi ; f \in A_0(K , V)\}$ qui réalise la meilleure approximation.

Rappelons que, d'après [4], la condition (*) est réalisée, en particulier, dans les deux cas suivants :

- Le convexe compact X est standard, et $\Phi[\mathcal{E}(X)] = \mathcal{E}(K)$.

- Le convexe compact K contient une face fermée maximale X_1 , et K contient une face fermée maximale K_1 telle que

$$X = \operatorname{conv}(X_1 \cup X_2) \ , \quad K = \operatorname{conv}(K_1 \cup K_2) \quad \text{et} \quad \Phi[\mathcal{E}(X_1)] = \mathcal{E}(K_1) \ .$$

4. Directions d'uniforme convexité dans certains espaces de Banach.

Rappelons qu'il est prouvé dans [11] qu'un sous-espace normé de l'espace $\ell^\infty(X)$ des fonctions réelles bornées définies sur un ensemble X est uniformément convexe dans la direction $\mathbb{R}.g$ dès que $\inf \{|g(x)| \ ; \ x \in X\} > 0$. Le théorème suivant généralise les résultats de [11] concernant les espaces $C(X)$ et l'espace $C_0(\mathbb{N})$.

THÉORÈME 4.1. - Soit V un espace simplicial ($V = A_0(K)$, où K est la partie positive de $B(V')$). Soit g une fonction de $S(V)$; les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'espace V n'est pas uniformément convexe dans la direction $\mathbb{R}.g$.

(b) On a $\inf \{|g(k)| \ ; \ k \in \mathcal{E}(K) \setminus \{0\}\} = 0$.

Démonstration. - D'après la remarque précédente, on voit que (a) $\Longrightarrow$ (b) .

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Posons, pour une fonction g vérifiant $\|g\| = 1$ et la condition (b) :

$$\bar{g}(k) = \inf \{h(k) \ ; \ h \in A_0(K) \ ; \ 1 \geq h \geq g \vee -g\} \ .$$

La fonction $\bar{g}$ est positive, affine et s. c. s. Il suffit de vérifier que les fonctions $\{h \in A_0(K) \ ; \ h \geq g \vee -g\}$ forment un ensemble filtrant décroissant, mais ceci est dû au fait que $A_0(K)$ vérifie la propriété d'interpollation de Riesz. De plus, la fonction $\bar{g}$ coïncide avec $g \vee -g$ sur $\mathcal{E}(K)$ puisqu'en utilisant le théorème d'Edwards, on a

$$\bar{g}(k) = \widehat{g \vee -g}(k) = \inf \{h(k) \ ; \ h \in A(K) \ ; \ h > g \vee -g\} \ ,$$

or d'après [1], $\widehat{g \vee -g}$ coïncide avec $g \vee -g$ sur $\mathcal{E}(K)$.

Comme $\inf \{\bar{g}(k) \ ; \ k \in \mathcal{E}(K) \setminus \{0\}\} = 0$, il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}(K) \setminus \{0\}$ telle que $\bar{g}(k_n) < 1/n$. On peut trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un indice α_n tel que l'on ait $h_{\alpha_n}(k_n) < 1/n$. Grâce au théorème d'Edwards (voir [1]), on peut trouver une suite f_n de fonctions de $A_0(K)$ qui est croissante et vérifie

$$h_{\alpha_n} \leq f_n \leq 1 \ ; \quad f_n(k_p) = 1 \ , \text{ pour } \ p = 1 \ , \ldots \ , n \ ;$$

en effet, soient φ_n et ψ_n les deux fonctions définies sur K par

$$\varphi_n(k) = \begin{cases} 1 \ ; & k = k_p \ ; \quad p = 1 \ , 2 \ , \ldots , n \\ h_{\alpha_n} \vee f_{n-1}(k) \ ; & k \neq k_p \ ; \quad p = 1 \ , \ldots , n \end{cases} \qquad \psi_n(k) = \begin{cases} 1 & \forall \ k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \ . \end{cases}$$

Alors φ_n (resp. ψ_n) est convexe (concave) s. c. s. (s. c. i.), et l'on a évidemment $\varphi_n \leqslant \psi_n$. Il existe, d'après le théorème d'Edwards, une fonction $f_n \in A(K)$ qui vérifie $\varphi_n \leqslant f_n \leqslant \psi_n$, et il est clair que $f_n(0) = 0$, donc $f_n \in A_0(K)$.

Soit $\ell_n = f_n - h_{\alpha_n}$; alors, pour tout n, on a $0 \leqslant \ell_n \leqslant 1$, de plus

$$\lim_{n\to\infty} \|\ell_n\| = 1 .$$

En effet, $\ell_n(k_n) = f_n(k_n) - h_{\alpha_n}(k_n) > 1 - 1/n$. Soit $\lambda \in \,]0, 1[$, alors

$$-1 \leqslant -\lambda \leqslant \ell_n + \lambda g = f_n - h_{\alpha_n} + \lambda g \leqslant 1 ,$$

et le même raisonnement que précédemment montre que $\lim_n \|\ell_n + \lambda g\| = 1$. D'après 2.4 (a), la direction $\underset{\sim}{R}.g$ n'est pas une direction d'uniforme convexité de $V = A_0(K)$.

COROLLAIRE 4.2.

(a) L'espace $V = A_0(K)$ ne contient pas de direction d'uniforme convexité de dimension supérieure à 2.

(b) Soit $V = A_0(K)$; s'il existe dans V une direction d'uniforme convexité, alors il existe sur V une norme équivalente pour laquelle V muni de son ordre propre est isomorphe à l'espace $A(S)$ des fonctions affines continues sur un simplexe. Si V est réticulé, il est isomorphe pour l'ordre et la norme à un espace $C(X)$.

Démonstration.

(a) Soient f_1 et f_2 deux fonctions linéairement indépendantes dans M ; il existe $\lambda \neq 0$ tel que $g = f_1 + \lambda f_2$ s'annule en un point k de $\mathcal{E}[K] \setminus \{0\}$. Alors M contient une direction $(\underset{\sim}{R}.g)$ qui n'est pas une direction d'uniforme convexité de V ; l'espace M ne peut donc constituer une telle direction.

(b) Si $V = A_0(K)$ contient une direction d'uniforme convexité, il existe une fonction positive g de $S[A_0(K)]$ telle que

$$\alpha = \inf \{g(k) \ ; \ k \in \mathcal{E}(K) \setminus \{0\}\} \neq 0 .$$

Alors l'ensemble

$$S = \{k \in K \ ; \ g(k) = \alpha\}$$

est une base compacte du cône $V'^+ = A_0(K)'^+$, et l'espace V muni de la norme de la convergence uniforme sur S est isomorphe pour l'ordre et la norme à l'espace $A(S)$.

Ce corollaire permet d'obtenir le résultat de [11] concernant $C_0(\underset{\sim}{N})$; en effet, il est maintenant clair que $C_0(\underset{\sim}{N})$ ne contient aucune direction d'uniforme convexité. Il en est de même pour tout $C_0(X)$ où X est un espace localement compact non compact.

COROLLAIRE 4.3. - Soit V un espace de Lidenstrauss (i. e. son dual est isométrique à un espace $L^1(\mu)$), alors g dans $S(V)$ définit une direction d'uniforme convexité si, et seulement si,

$$\inf \{|g(k)| \ ; \ k \in \mathcal{E}[B(V')]\} > 0 .$$

La démonstration procède comme dans le théorème 4.1, en utilisant l'extension du théorème d'Edwards due à LAZAR et LIDENSTRAUSS [7]. On a vu dans la partie précédente l'intérêt que représente les espaces de Banach qui sont uniformément convexes dans la direction de tous les sous-espaces de dimension 1. Une extension naturelle de la proposition 10 de [11] est donc la suivante.

THÉORÈME 4.4.

(a) Soient V et W deux espaces normés, et M un sous-espace complet de V. Soit T une injection continue de V dans W telle que $T(M)$ soit complet. Si W est uniformément convexe dans la direction $T(M)$, il existe sur V une norme équivalente pour laquelle M constitue une direction d'uniforme convexité.

(b) Soit V un espace normé vérifiant l'une des trois conditions suivantes ; alors il existe une norme équivalente pour laquelle tout sous-espace de dimension finie définisse une direction d'uniforme convexité.

(1) L'espace V' est séparable pour la topologie $\sigma(V', V)$.

(2) L'espace V est isomorphe à un sous-espace $\ell^1(I)$.

(3) L'espace V est isomorphe à un sous-espace de $L^\infty(\mu)$ relatif à une mesure de Radon bornée μ. C'est en particulier le cas si V est un sous-espace d'un espace $C(X)$ où X est un compact égal au support d'une mesure sur X.

Démonstration.

(a) Posons, pour tout x de V,

$$|||x||| = \sqrt{\|x\|^2 + \|T(x)\|^2} \ ;$$

ceci définit une norme sur V équivalente à la norme initiale. Il suffit de montrer que la norme $|||.|||$ est uniformément convexe dans la direction M ; pour cela on montre, comme dans [11], en utilisant le fait que T est un isomorphisme de M sur $T(M)$, que la condition (e) de la proposition 2.2 est réalisée.

(b) Dans les trois cas, on construit une application T de V dans un espace de Hilbert.

(1) Soit T l'opérateur défini sur V et à valeurs dans $\ell^2(\underline{N})$ donné par

$$T(x) = (2^{-n} f_n(x))_{n\in\underline{N}} ,$$

où $(f_n)_{n\in\underline{N}}$ est une suite de $B(V')$ qui est $\sigma(V', V)$ totale. Alors T vérifie les conditions du lemme précédent relativement à tous les sous-espaces de dimension finie.

(2) (resp. (3)) Soit T l'injection canonique $\ell^1(I)$ (resp. $L^\infty(\mu)$) dans $\ell^2(I)$ (resp. $L^2(\mu)$) . Alors T vérifie les conditions du lemme précédent.

Remarques.

(a) Il est clair, d'après le cas de l'injection canonique de $C([0\ ,\ 1])$ dans $L^2([0\ ,\ 1])$, que la condition, $T(M)$ est complet, est nécessaire dans la première partie du théorème précédent.

(b) On ne peut pas, en général, affirmer l'existence d'une norme sur V équivalente à la norme initiale pour laquelle certains sous-espaces de dimension infinie seraient des directions d'uniforme convexité. En effet, dans $V = \ell^1(\underset{\sim}{N})$, tout sous-espace réflexif est de dimension finie. Notons le problème ouvert suivant :

Soient V un espace de Banach, et M un sous-espace fermé qui est uniformément convexe pour la norme induite ou pour une norme équivalente, existe-t-il sur V une norme équivalente qui est uniformément convexe dans la direction du sous-espace M ?

(c) Le théorème précédent se généralise à des espaces de Banach construits à partir de certains produits ou sommes directes dénombrables d'espaces vérifiant (a), (b) ou (c). Cependant il faut noter que l'espace $\ell^\infty(I)$ construit sur un ensemble non dénombrable I , et même l'espace $\ell_c^\infty(I)$ des fonctions réelles, bornées, à support dénombrable, définies sur I , ne possède pas de norme équivalente strictement convexe [2]. Ils ne possèdent donc pas de norme uniformément convexe dans la direction de tout sous-espace de dimension finie. Il en est de même pour l'espace $C_0(I)$, en effet, le résultat suivant est probablement connu.

PROPOSITION 4.5. - Soit I un ensemble non dénombrable ; alors il n'existe pas sur l'espace $V = C_0(I)$ de norme moins fine que la norme canonique qui soit uniformément convexe dans la direction de tout sous-espace de dimension 1 . En fait, pour une telle norme, l'ensemble des directions de non uniforme convexité n'est pas dénombrable.

Démonstration. - Supposons que $|||.|||$ est une telle norme sur V . On peut supposer que l'application identique de $(V\ ,\ \|.\|)$ dans $(V\ ,\ |||.|||)$ est de norme 1 . Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ dans $S(V)$ telle que $\lim_n |||x_n||| = 1$. Comme I n'est pas dénombrable, il existe $i \in I$ qui n'est dans le support d'aucune des fonctions de la suite $(x_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$. Soit e_i la fonction de $C_0(I)$ définie par $(e_i)_j = \delta_{i,j}$. Soient $a_n = x_n + e_i$ et $b_n = x_n - e_i$; alors $(a_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ et $(b_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ sont dans $B(V)$ puisque x_n et e_i sont étrangers ; par conséquent $|||a_n||| \leq 1$ et $|||b_n||| \leq 1$. Cependant, on a

$$\lim_{n\to\infty} |||a_n + b_n||| = 2 \lim_n |||x_n||| = 2$$

et d'autre part, $a_n - b_n = 2e_i$. Ceci montre que $(V\ ,\ |||.|||)$ n'est pas uniformément convexe dans la direction $\mathbb{R}e_i$.

On termine sur l'exemple d'un espace de Banach strictement convexe, hilbertisable, qui n'est pas uniformément convexe dans la direction de tout sous-espace de dimension 1 (cet exemple nous est communiqué par J. SAINT-RAYMOND).

LEMME 4.6. - Soit φ une fonction strictement positive de classe C^2 sur $]\alpha, \beta[$ dont l'inverse est strictement concave. Alors la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\times]\alpha,\beta[$ par $f(x\,,\,y) = x^2.\varphi(y)$, est convexe, et elle est affine uniquement sur la droite $x = 0$.

Démonstration. - Il suffit de montrer que la forme quadratique différentielle seconde est définie positive. Pour cela, on calcule le discriminant réduit

$$\Delta' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2 = 2x^2(\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2) .$$

Or la fonction φ^{-1} est concave donc

$$0 \geqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)'' = - \frac{\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2}{\varphi^3}$$

ce qui montre bien que $\Delta' \geqslant 0$, le discriminant ne s'annulant que pour $x = 0$. Ceci achève la démonstration.

Exemple 4.7. - Soit $V = \ell^2(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}$ muni de la norme jauge de l'ensemble

$$C = \{(x\,,\,t) \in \ell^2(\mathbb{N}) \times]-1\,,\,+1[\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{(1-t^2)^{1/n}} \leqslant 1\}$$

est un espace de Banach hilbertisable, strictement convexe, mais non uniformément convexe dans la direction $M = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Démonstration. - D'après le lemme, la fonction

$$g(x\,,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{(1-t^2)^{1/n}}$$

est convexe, s. c. i. L'ensemble C est donc un convexe fermé de $\ell^2(\mathbb{N})\times]-1,+1[$. Il est possible de montrer que l'adhérence $\overline{C}$ de C dans V vérifie

$$\overline{C} = C \cup \{0\,,\,1\} \cup \{0\,,\,-1\} ,$$

et que $\overline{C}$ est strictement convexe. Pour terminer la démonstration, soit $\delta < 1$, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 telle que

$$|||\lambda_n e_n + \delta a||| = |||\lambda_n e_n - \delta a||| = 1 ,$$

où $e_n = (\varepsilon_n\,,\,0)$ et ε_n le n-ième vecteur de base de $\ell^2(\mathbb{N})$ et $a = (0\,,\,1)$. Comme $|||e_n||| = \|\varepsilon_n\| = 1$, on a bien

$$|||(\lambda_n e_n + \delta a) + (\lambda_n e_n - \delta a)||| = 2|||\lambda_n e_n||| = 2\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 .$$

Pour exhiber la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de remarquer que

$$g(\lambda_n \varepsilon_n\,,\,\pm\delta) = \frac{\lambda_n^2}{(1-\delta^2)^{1/n}} = 1$$

implique $\lambda_n = (1 - \delta^2)^{1/n}$ qui tend bien vers 1 quand n tend vers l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (E.). - Compact convex sets and boundary integrals. - Berlin, Springer-Verlag, 1971.

[2] DAY (M.). - Strict convexity and smoothness of normed spaces, Ann. of Math., t. 45, 1944, p. 375-385.

[3] FAKHOURY (H.). - Sélections continues associées au théorème de Hahn-Banach, J. Funct. Anal., t. 11, 1972, p. 436-452.

[4] FAKHOURY (H.). - Existence d'une projection continue de meilleure approximation sur certains espaces de Banach, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 53, 1974, p. 1-16.

[5] GARKAVI (A. L.). - The best possible net and the best possible cross-section of a set in a normed space, Amer. math. Soc. Transl., Series 2, t. 39, 1964, p. 111-132.

[6] LACEY (H. E.). - The isometric theory of Banach spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaft, 208).

[7] LAZAR (A.) et LINDENSTRAUSS (J.). - Banach spaces whose duals are L_1-spaces and their representing matrices, Acta Math., Uppsala, t. 126, 1971, p. 165-193.

[8] MICHAEL (E.). - Continuous selections, I., Ann. of Math., t. 63, 1956, p. 361-383.

[9] OLECH (C.). - Approximation of set valued functions by continuous functions, Coll. Math., Warzawa, t. 19, 1968, p. 287-293.

[10] RAINWATER (J.). - Local uniform convexity of Day's norm on $C_0(I)$, Proc. Amer. math. Soc., t. 22, 1969, p. 335-339.

[11] ZIZLER (J.). - On some smoothness and rotandity properties of Banach spaces, Dissert. Math., 1972.

(Texte reçu le 17 avril 1975)

Hicham FAKHOURY
Equipe d'analyse, Mathématiques, Tour 46
Université de Paris-VI
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

et

Département de Mathématiques
Université de Lyon-I
43 boulevard du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE