Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

JEAN SAINT RAYMOND

Points extrémaux d'un simplexe compact métrisable

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 3, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 3, 6 p.
7 novembre 1974

POINTS EXTRÉMAUX D'UN SIMPLEXE COMPACT MÉTRISABLE

par Jean SAINT RAYMOND

(d'après R. HAYDON [2])

On sait que l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact métrisable est un espace polonais. Le but de cet exposé est de démontrer que tout espace polonais peut être obtenu ainsi. Ce théorème est dû à G. CHOQUET, qui n'a pas publié sa démonstration complète. La démonstration donnée ici est celle de R. HAYDON [2], à une légère modification près, qui permet d'obtenir le résultat suivant : Si K est un espace métrique compact, et X un G_δ dense de K, il existe un simplexe métrisable compact S, et un plongement homéomorphique j de K dans S, tel que $j(X)$ soit l'ensemble des points extrémaux de S.

Soit (U_n) une suite décroissante d'ouverts partout denses de K, d'intersection X et de premier terme $U_0 = K$. Il existe, pour tout n, une partition $\varphi_{n,k}$ de l'unité sur U_n et une suite $\varepsilon_{n,k}$ de nombres appartenant à $]0\,,1[$ tendant vers 0 telles que si $V_{n,k} = \{x \in K\ ;\ \varphi_{n,k}(x) > 0\}$, on ait

$$\overline{V_{n,k}} \subset U_n\ ,\quad \mathrm{diam}(V_{n,k}) \leq 2^{-n}\,\varepsilon_{n,k}$$
$$\forall\, x \in U_n\ ,\quad \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{n,k}(x) = 1\ .$$

Il existe aussi une suite ψ_q de fonctions continues strictement positives sur K, de somme 1, qui sépare les points de K. Soit χ_n la fonction caractéristique de $K \setminus U_n$. On pose alors

$$p_{n,k} = \varphi_{n,k} \cdot \chi_{n+1}$$

et

$$\Delta = \{(n\,,k)\ ;\ p_{n,k} \neq 0\}\ .$$

Si $\delta = (n\,,k) \in \Delta$, il existe $a_\delta \in V_\delta \setminus U_{n+1} \subset V_\delta \setminus X$, ce qui entraîne, puisque X est dense, que a_δ est limite d'une suite de points distincts appartenant à $V_\delta \cap X$. En ordonnant Δ en une suite $(\delta_1\,,\delta_2\,,\ldots)$, on va construire par récurrence des points $x_{\delta,q}$ deux à deux distincts, appartenant à $X \cap V_\delta$ tels que

$$a_\delta = \lim_{q\to\infty} x_{\delta,q}$$

et que

$$\forall\, y \notin X\ ,\ \forall\, r \in \mathbb{N}\ ,\quad y \in \overline{(X - \{x_{\delta_i,q}\ ;\ i < r\ ,\ q \in \mathbb{N}\})}\ .$$

La propriété est vraie pour $r = 0$. Si elle est vraie pour l'entier r, a_{δ_r} est limite d'une suite $x'_{\delta_r,q}$ de points distincts de

$$V_{\delta_r} \cap (X - \{x_{\delta_i,q}\ ;\ i < r\ ,\ q \in \mathbb{N}\})\ .$$

On pose alors

$$x_{\delta_r,q} = x'_{\delta_r,2q} .$$

On a alors, puisque $a_{\delta_r} = \lim_{q\to\infty} x'_{\delta_r,q}$

$$\forall\, y \notin X\ ,\quad y \neq a_{\delta_r}\ ,\quad y \in \overline{(X - \{x_{\delta_i,q}\ ;\ i \leq r\ ,\ q \in \underset{\sim}{N}\})}$$

$$y = a_{\delta_r}\ ,\quad y = \lim_{q\to\infty} x'_{\delta_r,2q+1} \in \overline{(X - \{x_{\delta_i,q}\ ;\ i \leq r\ ,\ q \in \underset{\sim}{N}\})}$$

ce qui démontre la propriété pour l'entier $r + 1$.

On pose encore $\varepsilon_{\delta,q}$ la mesure de Dirac au point $x_{\delta,q}$. Si μ est une mesure de Radon portée par $Y = K - X$, on définit

$$\hat{\mu} = \Sigma_{\delta\in\Delta,q\in\underset{\sim}{N}} \left(\int_Y p_\delta(y)\ \psi_q(y)\ d\mu(y)\right)\varepsilon_{\delta,q} .$$

Comme

$$\Sigma_{\delta,q} \left|\int_Y p_\delta(y)\ \psi_q(y)\ d\mu(y)\right| \leq \Sigma \int_Y p_\delta(y)\ \psi_q(y)\ d|\mu|(y)$$

$$\leq \int_Y (\Sigma p_\delta(y)\ \psi_q(y))\ d|\mu| \leq \|\mu\| < \infty$$

$\hat{\mu}$ est une mesure de Radon portée par X . Comme l'application $\mu \longmapsto \hat{\mu}$ est linéaire, l'ensemble

$$M = \{\mu - \hat{\mu}\ ;\ \mu \in \mathfrak{M}(K)\ ,\ \mu \text{ portée par } Y\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathfrak{M}(K)$ des mesures de Radon sur K .

LEMME. - Le sous-espace M est vaguement fermé dans $\mathfrak{M}(K)$.

Il suffit (cf. [1], §2, théorème 5) de montrer que la trace de M sur la boule unité B de $\mathfrak{M}(K)$ est vaguement compacte. Comme la topologie vague de B est métrisable, il suffit de prouver qu'une suite d'éléments de M contient une sous-suite convergente vers un élément de M .

Soit (μ_i) une suite de mesures portées par Y , telles que $\|\mu_i - \hat{\mu}_i\| \leq 1$. Puisque $\|\mu_i - \hat{\mu}_i\| = \|\mu_i\| + \|\hat{\mu}_i\|$, il en résulte que $\|\mu_i\| \leq 1$, donc que

$$\|\chi_{n+1}\ \mu_i\| \leq 1 .$$

Les mesures $\chi_{n+1}\ \mu_i$ sont portées par le compact $K \setminus U_{n+1}$. Il existe donc une suite extraite de la suite (μ_i) telle que, pour chaque n , les mesures $\chi_{n+1}\ \mu_i$ convergent vaguement vers une mesure ν_n portée par $K \setminus U_{n+1}$. On se restreint à cette sous-suite, et on va construire une mesure ν portée par Y telle que

$$\nu - \hat{\nu} = \lim_{i\to\infty} \mu_i - \hat{\mu}_i .$$

Les mesures $\nu_n|U_n$ sont portées par les ensembles deux à deux disjoints

$$U_n \setminus U_{n+1} .$$

Il en résulte que

$$\sum_{n=0}^{N} \|\nu_n|_{U_n}\| = \|\sum_{n=0}^{N} \nu_n|_{U_n}\| \text{ .}$$

Soit g une fonction continue sur $K - U_{N+1}$, de norme 1 . On a

$$\nu_n|_{U_n}(g) = \int_{U_n} g \, d\nu_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_K g.\varphi_{n,k} \, d\nu_n \text{ .}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{N} \nu_n|_{U_n}(g) = \sum_{n\leq N, k\in \underline{N}} \int_K g.\varphi_{n,k} \, d\nu_n \text{ .}$$

Puisque $g.\varphi_{n,k} \chi_{n+1}$ est continu sur $K - U_{n+1}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq N, k\leq M} \int_K y.\varphi_{n,k} \, d\nu_n &= \lim_{i\to\infty} \sum_{n\leq N, k\leq M} \int_K g\varphi_{n,k} \chi_{n+1} \, d\mu_i \text{ ,}\\ &= \lim_{i\to\infty} \int_K g(\sum_{n\leq N, k\leq M} p_{n,k}) \, d\mu_i\end{aligned}$$

Comme

$$\|\sum_{n\leq N, k\leq M} p_{n,k}\| \leq 1 \text{ , } \|g\| \leq 1 \text{ , et } \|\mu_i\| \leq 1 \text{ ,}$$

il résulte que

$$|\sum_{n\leq N, k\leq M} \int g.\varphi_{n,k} \, d\nu_n| \leq 1 \text{ ,}$$

donc en passant à la limite quand M tend vers l'infini

$$|\sum_{n=0}^{N} \nu_n|_{U_n}(g)| \leq 1 \text{ .}$$

Et puisque ceci est valable pour tout g de norme 1 ,

$$\sum_{n=0}^{N} \|\nu_n|_{U_n}\| = \|\sum_{n=0}^{N} \nu_n|_{U_n}\| \leq 1 \text{ .}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\nu_n|_{U_n}\| \leq 1 \text{ ,}$$

ce qui montre qu'il existe une mesure ν portée par Y , dont la norme est au plus 1 , telle que

$$\|\nu - \sum_{n=0}^{N} \nu_n|_{U_n}\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad N \longrightarrow \infty \text{ .}$$

Soit h une fonction continue sur K . Puisque $p_{n,k}.h$ est continue sur $K \setminus U_{n+1}$, on a

$$\lim_{i\to\infty} \int p_{n,k}.h \, d\mu_i = \int p_{n,k}.h \, d\nu_n = \int p_{n,k}.h \, d\nu$$

puisque $p_{n,k}$ est nul sur $U_{m+1} \setminus U_m$ qui porte $\nu_m|_{U_m}$ si $m \neq n$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\nu(h) - \hat{\nu}(h) &= \sum_{n,k} \int p_{n,k} \, h \, d\nu - \sum_{n,k,q} \int p_{n,k}(y) \, \psi_q(y) \, h(x_{\delta,q}) \, d\nu_n(y) \text{ ,}\\ &= \sum_{n,k,q} \int p_{n,k}(y) \, \psi_q(y)[h(y) - h(x_{\delta,q})] \, d\nu_n(y) \text{ ,}\end{aligned}$$

et que

$$\mu_i(h) - \hat{\mu}_i(h) = \sum_{n,k,q} \int p_{n,k}(y) \, \psi_q(y)[h(y) - h(x_{\delta,q})] \, d\mu_i(y) \text{ .}$$

La continuité uniforme de h, et la condition sur le diamètre des $V_{n,k}$ font que, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe J fini dans Δ tel que

$$\forall\, y \in K\,,\quad \forall\, \delta \notin J\,,\quad \forall\, q\,,\qquad |(h(y) - h(x_{\delta,q}))\, p_{n,k}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{6}\, p_{n,k}(y)\ .$$

Alors, $\forall\, y \in K\,,\ \forall\, \delta = (n\,,\,k) \notin J\,,$

$$|h(y) - \Sigma\, \psi_q(y)\, h(x_{\delta,q})|p_\delta(y) \leq \frac{\varepsilon}{6}\, p_{n,k}(y)\ .$$

Donc

$$|\Sigma_{\delta\notin J} \int p_{n,k}(y)(h(y) - \Sigma_q\, \psi_q(y)\, h(x_{\delta,q}))\, d\nu(y)| \leq \frac{\varepsilon}{6}\, \Sigma \int p_\delta(y)\, d|\nu|(y)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{6}\, \|\nu\| = \frac{\varepsilon}{6}\ ,$$

et aussi

$$\Sigma_{\delta\notin J} \int p_{n,k}(y)(h(y) - \Sigma_q\, \psi_q(y)\, h(x_{\delta,q}))\, d\mu_i(y) \leq \frac{\varepsilon}{6}\ .$$

Ceci entraîne

$$|\nu(h) - \hat{\nu}(h) - \mu_i(h) + \hat{\mu}_i(h)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \Sigma_{\delta\in J}|\int p_\delta(y)(h(y) - \Sigma_{q\leq Q}\, \psi_q(y)\, h(x_{\delta,q}))\, d(\nu_n - \mu_i)(y)|$$
$$+ \Sigma_{\delta\in J}\, \|h\|.(\|\Sigma_{q>Q}\, \psi_q\|)(\|\nu\| + \|\mu_i\|)\ .$$

D'après le théorème de Dini, il existe Q tel que

$$\|\Sigma_{q>Q}\, \psi_q\| < \varepsilon/(6\|h\|)\ ,$$

et la continuité de $p_\delta(y)(h(y) - \Sigma_{q<Q}\, \psi_q(y)\, h(x_{\delta,q}))$ sur $K \setminus U_{n+1}$ fait que

$$\forall\, \delta \in J\,,\quad \lim_{i\to\infty} \int p_\delta(y)(h(y) - \Sigma_{q\leq Q}\, \psi_q(y)\, h(x_{\delta;q}))\, d(\mu_i - \nu_n)(y) = 0\ .$$

Il en résulte que pour i assez grand, on a

$$|(\nu - \hat{\nu})(h) - (\mu_i - \hat{\mu}_i)(h)| < \varepsilon$$

ce qui montre que $\nu - \hat{\nu}$ est limite vague de $(\mu_i - \hat{\mu}_i)$ et termine la démonstration du lemme.

Soit H l'orthogonal de M dans l'espace $\mathcal{C}(K)$. On voit aisément que les constantes appartiennent à H. De plus, puisque M est fermé, il résulte du théorème des bipolaires que M est l'orthogonal de H.

On désigne par S le convexe faiblement compact des formes linéaires positives sur H donnant la valeur 1 à la fonction constante 1. L'application j de K dans S définie par

$$j(x) = \varepsilon_x|_H$$

est continue et injective ; en effet, si $j(x) = j(x')$, la mesure $\varepsilon_x - \varepsilon_{x'}$, orthogonale à H, appartient à M et s'écrit $\mu - \hat{\mu}$, où μ est une mesure portée par Y.

Si x et x' appartiennent tous deux à X, on a

$$\mu = \hat{\mu} + \varepsilon_x - \varepsilon_{x'} \in \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(Y) = \{0\}\ .$$

D'où $\mu = \hat{\mu} = 0$ et $x = x'$.

Si x appartient à X et x' à Y , on a

$$\mu + \varepsilon_{x'} = \hat{\mu} + \varepsilon_x \in \mathfrak{M}(X) \cap \mathfrak{M}(Y) = \{0\} .$$

D'où

$$\mu = - \varepsilon_{x'} , \quad \hat{\mu} = - \sum_{\delta,q} p_\delta(x') \, \psi_q(x') \, \varepsilon_{\delta,q}$$

qui est une mesure à support infini, ce qui est incompatible avec $\hat{\mu} = - \varepsilon_x$.

Si x et x' appartiennent tous deux à Y , on a

$$\sum p_\delta(x) \, \psi_q(x) \, \varepsilon_{\delta,q} = \sum p_\delta(x') \, \psi_q(x') \, \varepsilon_{\delta,q}$$

donc, pour tout δ et tout q ,

$$p_\delta(x) \, \psi_q(x) = p_\delta(x') \, \psi_q(x') ,$$

et en sommant pour $\delta \in \Delta$,

$$\forall \, q \in \underset{\sim}{N} , \quad \psi_q(x) = \psi_q(x') ,$$

ce qui entraîne $x = x'$, puisque les fonctions ψ_q séparent les points de K .

L'application j est donc un homéomorphisme de K sur son image dans S .

Tout point extrémal de S appartient à $j(K)$. De plus, si μ est une mesure positive de masse 1 sur K , il en est de même de

$$\mu' = \mu_{|X} + \widehat{\mu_{|Y}}$$

qui est portée par X et telle que

$$\mu - \mu' = \mu_{|Y} - \widehat{\mu_{|Y}} \in M .$$

La frontière de K relativement à H est donc incluse dans X , ce qui signifie

$$\mathcal{E}(S) \subset j(X) .$$

Si μ' et μ'' sont deux mesures sur X et si $\mu' - \mu''$ est orthogonale à H , il existe μ portée par Y telle que

$$\mu' - \mu'' = \mu - \hat{\mu}$$

donc

$$\mu = \hat{\mu} + \mu' - \mu'' \in \mathfrak{M}(X) \cap \mathfrak{M}(Y) = \{0\} .$$

Donc $\hat{\mu} = 0$ et $\mu' = \mu''$. Ceci montre que tout point de $j(X)$ est extrémal, et que S est un simplexe, dont l'ensemble des points extrémaux est $j(X)$, et termine donc la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Chapitre 4 : La dualité dans les espaces vectoriels topologiques.-Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Bourbaki, 18).

[2] HAYDON (R.). - A new proof that every Polish space is the extreme boundary of a simplex (Preprint of Mathematical Institute, Oxford).

(Texte reçu le 20 décembre 1974)

Jean SAINT RAYMOND
Mathématiques, Tour 46
Université de Paris-VI
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05