

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

RICHARD BECKER

## Mesures coniques et espaces de Baire

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 14 (1974-1975), exp. n° C5, p. C1-C8

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1974-1975\\_\\_14\\_\\_A20\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A20_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MESURES CONIQUES ET ESPACES DE BAIRE

par Richard BECKER

1. Préliminaires.

1.1. Introduction. - Ce travail a pour objet d'étudier des propriétés du type "espace de Baire" que peut posséder l'ensemble des mesures coniques ([1], 30.3) sur un e. l. c. s. faible.

Parmi les espaces de Baire, les espaces tamisables ([5], §L.3.3,5) forment une classe remarquable comprenant les espaces localement compacts ou métrisables complets et stable par produit.

Tout au long de ce travail, nous retrouverons l'analogie de ces différentes classes : cas des cônes saillants faiblement complets (classe  $\mathcal{S}$ ) et qui sont limites projectives d'une suite de cônes localement compacts (classe  $\mathcal{S}_D$  [2], p. 2), cas des cônes métrisables de  $\mathcal{S}$  (classe  $\mathcal{S}_M$ ), cas des espaces  $R^I$ .

1.2. Plan. - Nous aborderons successivement le cas des cônes localement compacts qu'il est simple de présenter dans un cadre général abstrait (partie II); ensuite le cas des classes  $\mathcal{S}_D$  et  $\mathcal{S}_M$  (partie III) puis le cas des espaces  $R^I$  (partie IV). Nous terminerons (partie V) en donnant deux résultats concernant le cas général des éléments de la classe  $\mathcal{S}$ .

Pour toute partie  $A$  d'un ensemble ordonné, on note  $\text{Maj}(A)$  l'ensemble des éléments majorant au moins un élément de  $A$ , et  $\text{Max}(A)$  l'ensemble des éléments maximaux de  $\text{Maj}(A)$ .

2. Compacts ordonnés ; cas de l'ordre de Choquet.

Soit  $K$  un espace compact muni d'une relation d'ordre notée  $<$ .

LEMME 1. - Lorsque pour tout  $x_0 \in K$ , l'ensemble  $(x : x_0 < x)$  est fermé, tout élément de  $K$  est majoré par un élément maximal.

Nous admettrons ce lemme facile.

LEMME 2. - Lorsque le graphe de  $<$  est un fermé de  $K \times K$  alors,  $\forall z \in \text{Max}(K)$ , pour tout ouvert  $V \ni z$ , il existe un voisinage  $W$  de  $z$  tel que  $\text{Maj}(W) \subset V$ .

Preuve. - Au cas contraire,  $\forall W$  voisinage de  $z$ ,  $\exists x_W \in W$  et  $y_W \notin V$  tels que  $x_W < y_W$ . Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre plus fin que le filtre des parties  $\mathcal{S}_W = \{x_W, \dots\}$ ;  $W'$  voisinage de  $z$ ,  $W' \subset W$ ; on a  $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_W) < \lim_{\mathcal{U}}(y_W) \notin V$  puisque  $V$  est ouvert ; d'où contradiction,  $z$  étant maximal.

COROLLAIRE 3. - Lorsque le graphe de  $<$  est un fermé de  $K \times K$ , l'espace  $\text{Max}(K)$  est fortement tamisable.

Preuve. - Soit  $V$  un ouvert non vide de  $\text{Max}(K)$  ; on dira que l'ouvert  $W \subset V$  est fortement contenu dans  $V$ , et on notera  $W \sqsubset V$ , lorsque  $W$  est non vide, et  $\text{Max}(\overline{W}) \subset V$ , où  $\overline{W}$  désigne l'adhérence de  $W$  prise dans  $K$ .

On a bien ainsi défini un tamis fort ; si  $V_1 \sqsupset V_2 \sqsupset \dots \sqsupset V_n \sqsupset V_{n+1} \sqsupset \dots$ , on a  $\bigcap (\overline{V}_n) \neq \emptyset$  par compacité ; soit  $x \in \bigcap (\overline{V}_n)$  et  $y \in \text{Max}(K)$  avec  $x < y$  ;  $\forall n \geq 1$ , on a  $x \in \overline{V}_{n+1}$ , d'où  $y \in V_n$ .

Soit alors  $X$  un convexe compact contenu dans un e. l. c. s. ; en prenant pour  $K$  l'ensemble  $M_1^+(X)$  des mesures  $\geq 0$  de masse 1 sur  $X$ , muni de l'ordre de Choquet ([6], page 24), on a, d'après le corollaire 3, le résultat suivant.

PROPOSITION 4. - L'espace des éléments maximaux de  $M_1^+(X)$  est fortement tamisable pour la topologie vague.

Cet énoncé peut aussi s'exprimer en langage de cône localement compact ([6], page 98) ; c'est sous cette forme que nous allons chercher à l'étendre.

### 3. Cas des classes $\mathcal{S}_D$ et $\mathcal{S}_M$ .

Soit  $X \in \mathcal{S}$  un cône  $\subset E$  e. l. c. s. ; notons  $M^+(X)$  le cône des mesures coniques  $\geq 0$  sur  $X$  ([1], 30.5) ordonné par l'ordre de Choquet noté  $<$  ([1], 30.11) et muni de la topologie  $\sigma(M^+(X), h(E))$ , où  $h(E)$  désigne l'espace vectoriel réticulé de fonctions sur  $E$  engendré par  $E'$ , dual de  $E$  ([1], 30.1).

$M^+(X)$  n'est autre que le cône des formes  $\geq 0$  sur l'espace  $h(E)$  ordonné par l'ordre usuel des fonctions sur  $X$ .

L'énoncé suivant, qui concerne la classe  $\mathcal{S}$  dans son ensemble, nous sera fort utile, et est à rapprocher du lemme 2.

LEMME 5. - Soit  $X \in \mathcal{S}$ , et soit  $\mu \in M^+(X)$  un élément maximal pour  $<$  ; pour tout ouvert  $V$  de  $M^+(X)$  contenant  $\mu$ , il existe un voisinage  $W$  de  $\mu$  tel que  $\text{Maj}(W) \subset V$ .

Preuve. - Au cas contraire,  $\forall W$  voisinage de  $\mu$ ,  $\exists \mu_W \in W$  et  $\nu_W \notin V$  avec  $\mu_W < \nu_W$ . Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre plus fin que le filtre des parties

$$\mathcal{F}_W = \{\nu_{W'} ; W' \text{ voisinage de } \mu, W' \subset W\};$$

on a  $\mu_W < \nu_W$ , d'où  $\forall \ell \in E'$ ,  $\lim_{\mathcal{U}}(\nu_{W'}(\ell)) = \lim_{\mathcal{U}}(\mu_{W'}(\ell)) = \mu(\ell)$  ; comme  $h(E)$  est positivement engendré et que tout élément de  $h(E)$  est majoré sur  $X$  par un élément de  $E'$  ([1], 30.13), l'expression  $\lim_{\mathcal{U}}(\nu_{W'})$  existe donc au sens  $\sigma(M^+(X), h(E))$ , et on a  $\mu < \lim_{\mathcal{U}}(\nu_{W'}) \notin V$ , ce qui est une contradiction car  $\mu$  est maximale.

Remarque 6. - Les énoncés ci-dessous sont équivalents : (  $\alpha$  désigne un cardinal et  $X \in \mathbb{S}$  ) :

(  $0$  admet dans  $X$ , muni de  $\sigma(E, E')$ , une base de voisinages ayant pour puissance  $\alpha$  ) ;

(  $E'$  admet une partie cofinale ayant pour puissance  $\alpha$  ),

(  $X$  est limite projective d'une famille de cardinal  $\alpha$ , de cônes localement compacts ) ;

(  $0$  admet dans  $M^+(X)$ , muni de  $\sigma(M^+(X), h(E))$ , une base de voisinages ayant pour puissance  $\alpha$  ).

On a donc  $(X \in \mathbb{S}_D) \implies (M^+(X) \in \mathbb{S}_D)$ , et G. CHOQUET a prouvé que tout élément de  $\mathbb{S}_D$  est fortement tamisable.

PROPOSITION 7. - Soit  $X \in \mathbb{S}_D$  ; l'espace  $Max^+(X)$  des mesures coniques  $\geq 0$ , et maximales sur  $X$ , est fortement tamisable pour  $\sigma(M^+(X), h(E))$ .

Preuve. - Soit  $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$  une suite cofinale dans  $E'$  d'éléments  $\geq 0$  sur  $X$ . Définissons un tamis fort : si  $V$  est un ouvert non vide de  $Max^+(X)$ , on dira que l'ouvert non vide  $W \subset V$  est fortement contenu dans  $V$  (et on notera  $W \sqsubset V$ ) lorsque  $Max(\bar{W}) \subset V$  ( $\bar{W}$  est prise dans  $M^+(X)$ ) et que

1° Si  $\forall n \geq 1$ ,  $\ell_n(V)$  est non borné dans  $R^+$ , alors  $\ell_1(W)$  est borné.

2° Si  $\exists n \geq 1$  avec  $\ell_p(V)$  borné,  $\forall p \in \{1, \dots, n\}$ , et  $\ell_{n+1}(V)$  non borné, alors  $\ell_{n+1}(W)$  est borné.

Pour prouver que ceci définit un tamis fort, on raisonne comme pour le corollaire 3 ; il suffit donc de prouver que, pour toute suite  $(V_n)$  telle que

$$V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset V_{n+1} \supset \dots \text{ alors } \bigcap (\bar{V}_n) \neq \emptyset$$

( $\bar{V}_n$  est prise dans  $M^+(X)$ ). En fait,  $\forall n \geq 1$ , soit  $\mu_n \in V_n$  ; soit également  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre non trivial sur  $N$  ;  $\lim_{\mathcal{U}}(\mu_n)$  existe au sens  $\sigma(M^+(X), h(E))$ , et définit un élément de  $M^+(X)$  appartenant à tous les  $\bar{V}_n$  ; cela résulte de la propriété de domination de  $E'$  rappelée au cours de la preuve du lemme 5. Notons que  $\bigcap (\bar{V}_n)$  est un compact.

Nous allons examiner maintenant le cas des cônes de  $\mathbb{S}_M$  ; ces cônes sont également séparables ([2], th. 6) et jouissent de propriétés remarquables ([2], th. 3) ; en particulier, les mesures coniques qu'ils portent sont localisables ([1], 30.17, 18).

Nous aurons besoin de la remarque suivante.

LEMME 8. - Soient  $X$  un cône convexe contenu dans un espace vectoriel  $E$ ,  $Y \subset E^*$  un cône convexe d'éléments  $\geq 0$  sur  $X$  qui sépare les points de  $X$  et  $x, y \in (X \setminus 0)$  tels que  $\exists k > 0$  avec  $y = kx$  ; alors pour tous scalaires  $a$ ,

b, il existe  $l \in (Y - Y)$  tel que  $l(x) = a$ ,  $l(y) = b$ .

Preuve. -  $\exists l_1 \in Y$  telle que  $l_1(x) \neq l_1(y)$ ; soit  $l_2 \in Y$  séparant  $l_1(x)y$  et  $l_1(y)x$ ; on prendra pour  $l$  une combinaison de  $l_1$  et  $l_2$  en remarquant que  $l_1(y)l_2(x) - l_1(x)l_2(y) \neq 0$ .

D'après une version du théorème de STONE-WEIERSTRASS ([3], page 137), et le lemme précédent, on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 9. - Soient  $X \in \mathcal{S}$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E'$ , positivement engendré, qui sépare les points de  $X$ . Pour tout compact (faible)  $K \subset X$  et toute fonction  $f$ , définie et continue sur  $K$ , les énoncés suivants sont équivalents

1°  $f$  est adhérente au treillis engendré par  $(F)|_K$  pour la topologie de la convergence uniforme sur  $K$ .

2°  $\forall x, y \in K$  avec  $y = kx$ ,  $k \geq 0$ , on a  $f(y) = kf(x)$ .

Nous aurons également besoin du lemme suivant, qui permettrait de démontrer le théorème 3 de [2].

LEMME 10. - Soit  $X \in \mathcal{S}_M$ ; il existe une suite d'éléments  $\geq 0$  de  $E'$  qui sépare les points de  $X$ .

Preuve. - D'après le théorème 6 de [2], la topologie de  $X$  admet une base dénombrable  $(\omega_n)$ ; si  $x \neq y$ , soit  $l \geq 0$  dans  $E'$  qui sépare  $x$  et  $y$ ;  $l$  sépare également deux éléments  $\omega_p \ni x$  et  $\omega_q \ni y$  de la base  $(\omega_n)$ . Il suffit donc de choisir, pour tout couple  $\omega_p$  et  $\omega_q$ , pouvant être séparés par un élément  $\geq 0$  de  $E'$ , une forme  $l_{p,q} \geq 0$  de  $E'$  qui les sépare.

Cette technique, indiquée par MOKOBODZKY, est analogue à celle utilisée en [5], §I.2.1, prouvant que tout espace régulier à base dénombrable est métrisable.

THÉORÈME 11. - Pour tout  $X \in \mathcal{S}_M$ , on a  $M^+(X) \in \mathcal{S}_M$ .

Preuve. - Soit  $Y \subset E'$  un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel dénombrable, positivement engendré, cofinal pour  $E'$ , et séparant les éléments de  $X$ ; soit  $\tilde{Y}$  le sous-treillis de  $h(E)$  engendré par  $Y$ ;  $\tilde{Y}$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel dénombrable ([1], 30.2).

Munissons  $M^+(X)$  de la structure uniforme métrisable, associée aux écarts  $d_f = |\lambda(f) - \mu(f)|$ , où  $f$  décrit  $\tilde{Y}$ ,  $\lambda, \mu \in M^+(X)$ . Montrons que cette structure uniforme  $S(\tilde{Y})$  rend  $M^+(X)$  complet, et induit la topologie  $\sigma(M^+(X), h(E))$ . Pour cela, il suffit de prouver que tout filtre  $\mathcal{F}$ , de Cauchy pour  $S(\tilde{Y})$ , converge, vers un élément unique, au sens  $\sigma(M^+(X), h(E))$ . Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre plus fin que  $\mathcal{F}$ ; comme  $\tilde{Y}$  est cofinal dans  $h(E)$ , pour toute  $g \in h(E)$  l'expression  $\lim_{\mathcal{U}}(g)$  existe et définit un élément de  $M^+(X)$  vers lequel  $\mathcal{U}$  converge au sens  $\sigma(M^+(X), h(E))$ . Il reste à voir que la topologie induite par  $S(\tilde{Y})$  sur  $M^+(X)$

est séparée ; cela résulte de la proposition 9 et du fait que tout élément de  $M^+(X)$  est localisable sur un compact de  $X$ .

D'après le théorème précédent et le théorème 3.6 de [2],  $M^+(X)$  est polonais ; d'après [3], § II.3.4, le fait que  $\text{Max}^+(X)$  (ensemble des éléments maximaux de  $M^+(X)$ ) soit également polonais équivaut à prouver le théorème suivant.

**THÉORÈME 12.** - Lorsque  $X \in \mathcal{S}_M$ ,  $\text{Max}^+(X)$  est un  $G_\delta$  de  $M^+(X)$ .

Preuve. -  $\tilde{Y}$  est engendré par ses éléments convexes ; grâce à la proposition 9, on prouve que  $\mu \in M^+(X)$  est maximale dès que, pour toute fonction convexe  $f \in \tilde{Y}$ , on a

$$\mu(f) = (\inf \mu(g) ; g \geq f \text{ sur } X, g \text{ concave}, g \in h(E)) ;$$

en effet, soit  $\nu \in \text{Max}^+(X)$  avec  $\mu < \nu$ , par des méthodes voisines de celles de [5] (Théorème 28), on voit que  $\mu = \nu$  sur  $\tilde{Y}$ .

Pour toute  $f \in \tilde{Y}$ , convexe, et tout  $n > 0$ , l'ensemble

$$O(f, n) = (\mu ; \mu \in M^+(X), \exists g \geq f \text{ sur } X, g \text{ concave}, g \in h(E), \mu(g-f) < 1/n),$$

est ouvert ; or  $\text{Max}^+(X) = \bigcap O(f, n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in \tilde{Y}$ , convexe.

#### 4. Cas des espaces $R^I$ .

Notations 13. - Soit  $J \subset I$ ,  $J \neq \emptyset$  ; on fait l'identification  $R^I = R^J \times R^{(I \setminus J)}$  ; soit  $p_J$  la projection canonique de  $R^I$  sur  $R^J \times (0)$  ; notons que l'application  $f \longmapsto \mu(f \circ p_J)$  n'est autre que  $\mu_A$  au sens de CHOQUET ([1], 30.8) avec  $A = R^J \times (0)$  ; on note  $\mu_J$  cet élément de  $M^+(X)$ .

Il est clair que si  $f \in h(R^I)$  ne dépend que des  $J$  premières coordonnées, on a  $\mu_J(f) = \mu(f)$ . Pour tout  $i \in I$ , on note  $|x_i|$  l'élément de  $h(R^I)$ , défini par  $x \longmapsto |x_i|$ , ( $i$ -ième composante de  $x$ ).

**THÉORÈME 14.** -  $M^+(R^I)$  est fortement tamisable.

Preuve. - Définissons un tamis fort : soit  $V$  un ouvert non vide de  $M^+(R^I)$  ; on dira que l'ouvert non vide  $W \subset V$  est fortement contenu dans  $V$  (on note  $W \sqsubset V$ ) lorsque  $\bar{W} \subset V$ , et que

$$\exists \mu \in V, h_1, h_2, h_n \in h(R^I), K_1, K_2, K_n > 0 ;$$

une partie finie  $J_W$  de  $I$ , tels que

$$1^\circ \mu \in W ;$$

$$2^\circ h_1, h_2, h_n \text{ ne dépendent que des coordonnées d'indice appartenant à } J_W ;$$

$$3^\circ W = (\nu ; |\nu(h_i) - \mu(h_i)| < 1 \text{ et } \nu(|x_i|) < K_i, \forall i \in [1, n]) .$$

Soit  $V_1 \sqsubset V_2 \dots V_n \sqsubset V_{n+1} \dots$ . On pose  $J = \bigcup_{n \geq 1} (J_{V_n})$ .  $\forall n > 0$ , soit  $\lambda_n \in V_n$  ; on a aussi  $(\lambda_n)_J \in V_n$ . On raisonne ensuite comme dans la proposition 9 en prenant

un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $N$ , non trivial, puis en définissant  $\lim_{\mathcal{U}}((\lambda_n)_J)$  en remarquant que  $\forall f \in h(R^I)$ ,  $f \circ p_J$  est majorée par une combinaison finie des  $|x_i|$  pour  $i \in J$ .

Remarque 15.

1° La partie de  $M^+(R^I)$  constituée par les mesures, portées par un sous-espace (non fixé) de  $R^I$  canoniquement isomorphe à  $R^N$ , n'est pas de première catégorie puisque l'élément  $\lim_{\mathcal{U}}((\lambda_n)_J)$ , construit au cours de la preuve du théorème 14, est porté par un tel espace.

Cet ensemble est partout dense dans  $M^+(R^I)$  ([1], 30.9), et est séquentiellement fermé. On démontrerait qu'il est fortement tamisable.

2° Rappelons que  $\text{Max}^+(X)$  est homéomorphe à  $R_+^I$  lorsque  $X = R_+^I$ .

Remarque 16. - Soit  $A_k$  ( $k \in K$ ), une famille d'espaces tamisables (ou fortement tamisables); pour tout  $H \subset K$ , on posera  $A_H =$  produit des  $A_k$ , où  $k \in H$ ; soit  $B$  une partie de  $A_K$  telle que, pour toute partie dénombrable  $H \subset K$ , la projection de  $B$  dans  $A_H$  soit surjective. Alors  $B$  est tamisable (ou fortement tamisable), et n'est pas de première catégorie dans  $A_K$ . Si, de plus, tous les  $A_k$  sont identiques, il est aisé de construire un tel  $B$  qui soit séquentiellement fermé.

## 5. Deux résultats concernant la classe $\mathcal{S}$ .

THÉORÈME 17. - Soit  $X \in \mathcal{S}$ ; si  $M^+(X)$  est fortement tamisable, alors  $\text{Max}^+(X)$  est un espace de Baire.

Preuve. - Soient  $(O_n)$  une suite d'ouverts partout denses de  $\text{Max}^+(X)$ , et  $\omega$  un ouvert non vide de  $\text{Max}^+(X)$ . On pose  $\omega_1 = \omega \cap O_1$ ;  $\omega_1$  est la trace sur  $\text{Max}^+(X)$  d'un ouvert  $\Omega_1$  de  $M^+(X)$ ; soit  $\tilde{\Omega}_1$  un ouvert de  $M^+(X)$  fortement contenu dans  $\Omega_1$ , rencontrant  $\text{Max}^+(X)$  ( $M^+(X)$  est fortement tamisable), et tel que  $\text{Max}(\tilde{\Omega}_1) \subset \omega_1$ .

Supposons effectuées les constructions suivantes de  $\omega_i$ ;  $\Omega_i$  et  $\tilde{\Omega}_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  vérifiant pour tout  $p \in \{1, n-1\}$

$$\omega_{p+1} \subset \text{Max}^+(X); \quad \Omega_{p+1}, \tilde{\Omega}_{p+1} \subset M^+(X)$$

et

- 1°  $\omega_{p+1} = \tilde{\Omega}_p \cap O_{p+1}$  est un ouvert non vide de  $\text{Max}^+(X)$ ;
- 2°  $\Omega_{p+1}$  est un ouvert de  $M^+(X)$  tel que  $\omega_{p+1} = \Omega_{p+1} \cap \text{Max}^+(X)$ ;
- 3°  $\Omega_{p+1} \subset \tilde{\Omega}_p$ ;
- 4°  $\tilde{\Omega}_{p+1}$  est un ouvert de  $M^+(X)$ ,  $\tilde{\Omega}_{p+1} \sqsubset \Omega_{p+1}$ , et  $\tilde{\Omega}_{p+1} \cap \text{Max}^+(X)$  est non vide;
- 5°  $\text{Max}(\tilde{\Omega}_{p+1}) \subset \omega_{p+1}$ .

Prouvons que la construction peut s'effectuer pour  $i = n + 1$  : on pose

$$\omega_{n+1} = \tilde{\Omega}_n \cap O_{n+1} ;$$

$\omega_{n+1}$  peut s'écrire  $\omega_{n+1} = \Omega_{n+1} \cap \text{Max}^+(X)$ , et on peut exiger que  $\Omega_{n+1} \subset \tilde{\Omega}_n$ .

Puis ( $M^+(X)$  est fortement tamisable) soit  $\tilde{\Omega}_{n+1}$  rencontrant  $\text{Max}^+(X)$  avec  $\tilde{\Omega}_{n+1} \sqsubset \Omega_{n+1}$  et  $\text{Max}(\tilde{\Omega}_{n+1}) \subset \omega_{n+1}$ . D'où la construction pour  $n + 1$ . On a alors  $\forall n \geq 1$ ,  $\tilde{\Omega}_{n+1} \sqsubset \Omega_{n+1} \subset \tilde{\Omega}_n$ , d'où  $\bigcap \tilde{\Omega}_n$  non vide ; soit  $\mu \in \bigcap \tilde{\Omega}_n$  et  $\tilde{\mu}$  maximal avec  $\mu < \tilde{\mu}$  ; comme  $\forall n \geq 1$ ,  $\text{Max}(\tilde{\Omega}_n) \subset \omega_n$ , on a  $\tilde{\mu} \in \bigcap \omega_n$  ; or on a

$$\bigcap \omega_n \subset \omega \cap O_n ; \text{ d'où } \tilde{\mu} \in \omega \cap O_n .$$

**THÉOREME 18.** - Soit  $X \in \mathcal{S}$  ; si  $M^+(X)$  est fortement tamisable, alors  $X$  est un espace de Baire.

Preuve. - Soient  $(O_n)$  une suite d'ouverts partout denses de  $X$ , et  $\omega$  un ouvert non vide de  $X$  ; on pose  $\omega_1 = \omega \cap O_1$ . Soient  $x_1 \in \omega_1$  et  $\Omega_1$  un ouvert de  $M^+(X)$  contenant  $\varepsilon_{x_1}$  et tel que ( $r(\mu)$  désignant la résultante d'un élément  $\mu \in M^+(X)$ ) on ait  $r(\Omega_1) \subset \omega_1$  ; soit  $\tilde{\Omega}_1$  un ouvert de  $M^+(X)$  fortement contenu dans  $\Omega_1$  et contenant  $\varepsilon_{x_1}$  ( $M^+(X)$  est fortement tamisable) ; les résultantes des mesures ponctuelles contenues dans  $\tilde{\Omega}_1$  forment un ouvert  $\tilde{\omega}_1$  de  $X$  contenant  $x_1$ .

Supposons effectuées les constructions  $\omega_i, x_i, \Omega_i, \tilde{\Omega}_i, \tilde{\omega}_i$  suivantes pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , vérifiant pour tout  $p \in \{1, n-1\}$

$$x_{p+1} \in X ; \omega_{p+1}, \tilde{\omega}_{p+1} \subset X ; \Omega_{p+1}, \tilde{\Omega}_{p+1} \subset M^+(X)$$

et

- 1°  $\omega_{p+1} = \tilde{\omega}_p \cap O_{p+1}$ ,
- 2°  $x_{p+1} \in \omega_{p+1}$ ,
- 3°  $\Omega_{p+1}$  est un ouvert de  $M^+(X)$  contenant  $\varepsilon_{x_{p+1}}$  tel que  $r(\Omega_{p+1}) \subset \omega_{p+1}$ ,
- 4°  $\tilde{\Omega}_{p+1}$  est un ouvert de  $M^+(X)$  tel que  $\tilde{\Omega}_{p+1} \subset \Omega_{p+1}$  et  $\varepsilon_{x_{p+1}} \in \tilde{\Omega}_{p+1}$ ,
- 5°  $\tilde{\omega}_{p+1}$  est l'ensemble des résultantes des mesures ponctuelles contenues dans  $\tilde{\Omega}_{p+1}$  ; c'est un ouvert de  $X$  contenant  $x_{p+1}$ .

Prouvons que la construction peut s'effectuer pour  $n + 1$ . On pose

$$\omega_{n+1} = \tilde{\omega}_n \cap O_{n+1} ;$$

soit  $x_{n+1} \in \omega_{n+1}$  ; soit  $\Omega_{n+1}$  un ouvert de  $M^+(X)$  contenant  $\varepsilon_{x_{n+1}}$ , tel que  $r(\Omega_{n+1}) \subset \omega_{n+1}$  et  $\Omega_{n+1} \subset \tilde{\Omega}_n$  ; cette dernière relation est possible à réaliser car, d'après la 5e condition de la récurrence, appliquée à  $\tilde{\omega}_n$ , on a  $\varepsilon_{x_{n+1}} \in \tilde{\Omega}_n$ .

Soit  $\tilde{\Omega}_{n+1}$  un ouvert de  $M^+(X)$  tel que  $\tilde{\Omega}_{n+1} \sqsubset \Omega_{n+1}$  et  $\varepsilon_{x_{n+1}} \in \tilde{\Omega}_{n+1}$  ( $M^+(X)$  est fortement tamisable) ;  $\tilde{\omega}_{n+1}$  sera alors l'ensemble des résultantes des mesures ponctuelles contenues dans  $\tilde{\Omega}_{n+1}$ . D'où la construction pour  $n + 1$ .

On a alors  $\forall n \geq 1 : \Omega_{n+1} \sqsubset \tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$  ; d'où  $\bigcap \Omega_n$  non vide ; soit  $\mu \in \bigcap \Omega_n$  ;  
 comme  $\forall n$  ,  $r(\Omega_n) \subset \omega_n$  , on a  $r(\mu) \in \bigcap \omega_n$  ; or  $\bigcap \omega_n \subset \omega \cap O_n$  ; d'où

$$r(\mu) \in \omega \cap O_n .$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis, Vol. 1-3. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).
- [2] CHOQUET (G.). - Résultats récents sur les formes positives sur des espaces de fonctions, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 11e-12e années, 1971-1973, n° 6, 3 p.
- [3] CHOQUET (G.). - Cours d'analyse, Tome 2 : Topologie. - Paris, Masson, 1964.
- [4] CHOQUET (G.). - Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, "Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1962. Stockholm]", p. 317-330. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.
- [5] MAYER (C.). - Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique. - Paris, C.D.U et S.E.D.E.S. réunis, 1960.
- [6] PHELPS (R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

(Texte reçu le 17 mars 1975)

Richard BECKER  
 Equipe d'analyse  
 Université de Paris-VI  
 4 place Jussieu, Tour 46  
 75230 PARIS CEDEX 05

---