Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gilles Godefroy

Points extrémaux dans certains cônes convexes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº C2, p. C1-C3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A17_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

POINTS EXTRÉMAUX DANS CERTAINS CÔNES CONVEXES

par Gilles GODEFROY

1. Cône convexe des fonctions de type positif sur un groupe G abélien localement compact. Caractère extrémal de tout caractère.

Soient X un ensemble, et C une partie convexe d'un espace vectoriel E. L'ensemble $\mathfrak{F}(X, C)$ des applications de X dans C est une partie convexe de l'espace vectoriel $\mathfrak{F}(X, E)$.

Si on note $\mathcal{E}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de tout convexe C, on a l'énoncé suivant.

LEMME 1. - $\mathfrak{F}(X, \mathcal{E}(C)) \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{F}(X, C))$.

Démonstration. - Soit $f \in \mathfrak{F}(X, \mathcal{E}(C))$. Supposons que $f = \lambda f_1 + \mu f_2$, où $\lambda, \mu > 0$; $\lambda + \mu = 1$; $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(X, C)$. Pour tout $x \in X$, on a

$$f(x) = \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) \quad \text{avec} \quad f_1(x), f_2(x) \in C ;$$

d'où $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$, puisque $f(x) \in \mathcal{E}(C)$.

On a donc $f_1 = f_2 = f$; donc $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{F}(X, C))$.

COROLLAIRE 2. - *Pour tout sous-convexe* φ *de* $\mathfrak{F}(X, C)$, *on a*

$$\varphi \cap \mathfrak{F}(X, \mathcal{E}(C)) \subset \mathcal{E}(\varphi) .$$

Application à l'extrémalité des caractères. - On prend $X = G$, groupe abélien. Notons $P(G)$ le sous-cône convexe de $\mathfrak{F}(G, \mathbb{C})$ formé des fonctions de type positif sur G. On sait que, si $f \in P(G)$, on a

1° $f(e) \in \mathbb{R}^+$,

2° $\forall x \in G$, $|f(x)| \leq f(e)$.

Ce qui montre, en particulier, que $P_1(G) = \{f \in P(G) ; f(e) = 1\}$ est une base de $P(G)$.

Notons alors D le disque unité fermé du plan complexe. On a

$$\mathcal{E}(D) = \{z \in D ; |z| = 1\} .$$

Le corollaire 2, appliqué à $C = D$, montre donc que toute $f \in P_1(G)$, telle que $|f| \equiv 1$, est extrémale dans $P_1(G)$; c'est donc vrai en particulier des caractères de G.

Par ailleurs, on montre simplement [1] que tout élément extrémal de $P_1(G)$ est

---

[1] CHOQUET (G.). - Deux exemples classiques de représentation intégrale, Enseignement mathématique, Genève, t. 15, 1969, p. 63-75.

un caractère ; on peut donc énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 3.

1° Les éléments extrémaux de $P_1(G)$ sont identiques aux caractères de G.

2° Toute $f \in P_1(G)$, telle que $|f| \equiv 1$, est extrémale, donc est un caractère.

2. Cône convexe des fonctions absolument monotones relativement à un cône convexe saillant C de R^n. Extrémalité des $\exp(\ell)$, où $\ell \in C^0$.

Nous allons d'abord énoncer un lemme général.

DÉFINITION 4. - Un ensemble $\mathfrak{D}$ de demi-droites affines fermées d'un espace vectoriel E sera dit enchaîné si, pour toutes $\delta, \delta' \in \mathfrak{D}$, il existe une suite finie $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ d'éléments de $\mathfrak{D}$ telle que $\delta_1 = \delta$, $\delta_n = \delta'$, et $\delta_i \cap \delta_{i+1}$ non vide pour tout $i < n$.

On notera alors $X_{\mathfrak{D}}$ la réunion des demi-droites de $\mathfrak{D}$, et $\mathfrak{L}(\mathfrak{D})$ le cône convexes des fonctions numériques f sur $X_{\mathfrak{D}}$ qui (sauf $f = 0$) sont $\mathfrak{D}$-logarithmiquement convexes, i. e. de la forme $\exp(g)$, où g est convexe sur chaque $\delta \in \mathfrak{D}$.

LEMME 5. - Supposons $\mathfrak{D}$ enchaîné. Alors, pour toute forme linéaire φ sur E, la restriction de $\exp(\varphi)$ à $X_{\mathfrak{D}}$ est un élément extrémal de $\mathfrak{L}(\mathfrak{D})$.

Démonstration. - Supposons que l'on ait

$$\exp(\varphi) = f_1 + f_2 \text{, où } f_1, f_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D}) . \tag{1}$$

Pour toute $\delta \in \mathfrak{D}$, et après choix d'une paramétrisation de δ, la restriction de (1) à δ s'écrit :

$$\exp(at + b) = \exp u_1(t) + \exp u_2(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}^+ ,$$

où u_1, u_2 sont convexes. Ceci s'écrit encore, en posant

$$u_i'(t) = u_i(t) - at - b \qquad (i = 1, 2) ,$$

$$1 = \exp u_1'(t) + \exp u_2'(t) . \tag{2}$$

Il en résulte $u_i' \leqslant 0$, donc les u_i', étant convexes sur $\mathbb{R}^+$, sont aussi décroissantes ; il en est de même des $\exp u_i'$, et comme leur somme est 1, les u_i' sont constantes. Il en résulte que f_1 et f_2 sont proportionnelles à $\exp(\varphi)$.

Application. - Soit C un cône convexe saillant de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide ; et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Omega - C \subseteq \Omega$. Comme C est d'intérieur non vide, l'ensemble $\mathfrak{D}$ des demi-droites de Ω, qui sont parallèles à des génératrices de C, est enchaîné. Notons $\mathfrak{A}(\Omega, C)$ le cône convexe des fonctions C-absolument monotones sur Ω. Il est élémentaire que $\mathfrak{A}(\Omega, C) \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{D})$. De plus, si $\varphi \in C^0$ (polaire de C), on a $\exp(\varphi) \in \mathfrak{A}(\Omega, C)$. On déduit donc du lemme 5 le résultat suivant.

COROLLAIRE. - <u>Pour tout</u> $\varphi \in C^0$, <u>on a</u>

$$\exp(\varphi) \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}(\Omega , C)) .$$

(Texte reçu le 3 février 1975)

Gilles GODEFROY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05