

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHÈLE CAPON

Étude des fonctions affines boréliennes sur la boule unité de $f^\infty(n)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° C1, p. C1-C4

http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A16_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DES FONCTIONS AFFINES BORÉLIENNES
 SUR LA BOULE UNITÉ DE $f^\infty(\mathbb{N})$
 par Michèle CAPON

En étudiant les propriétés des fonctions affines boréliennes qui vérifient le calcul barycentrique sur un convexe compact K , j'ai été amenée au problème suivant :

"Existe-t-il sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ une fonction affine borélienne qui vérifie le calcul barycentrique et non continue ?"

La réponse est négative. En utilisant le travail de CHRISTENSEN [1], nous pouvons donner une démonstration assez courte du théorème suivant.

THÉORÈME. - Toute fonction affine borélienne sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ est continue.

Démonstration. - Soit f une telle fonction nulle en 0. Nous allons d'abord montrer que l'on peut supposer f positive sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, et nulle sur $[0]$, en appelant $[x]$ l'ensemble des y tels que $y - x$ ait un nombre fini de coordonnées non nulles.

Pour cela identifions $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ à la boule unité de $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$. La fonction f devient alors un élément μ de $\mathcal{M}(\beta\mathbb{N})$. Montrons que la mesure μ^+ définit une fonction borélienne sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$. Or il existe un élément φ de $L^1(\mu)$ tel que

$$|\varphi| = 1 \quad \text{et} \quad \mu = \varphi|\mu|.$$

On en déduit

$$\mu^+ = (\varphi^+/\varphi)\mu = \varphi^+ \mu.$$

Si h_n est une suite de fonctions continues sur $\beta\mathbb{N}$ qui convergent μ -presque partout vers φ^+ , et qui vérifient $0 \leq h_n \leq 1$, alors $(h_n \mu)$ converge uniformément sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ vers μ^+ . Or $h_n \mu$ est une fonction borélienne sur $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$, car

$$(h_n \mu)(x) = \mu(h_n x)$$

donc μ^+ est borélienne.

Supposons donc f positive, et notons

$$e_p = (\delta_{np})_{n \in \mathbb{N}}, \\ u = \sum_{p=1}^{\infty} e_p = (1, 1, 1, \dots).$$

On a

$$\sum_{p=1}^n e_p \leq u$$

donc

$$\sum_{p=1}^n f(e_p) \leq f(u) .$$

Posons

$$g(x) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p f(e_p) .$$

D'après ce qui précède g est continue, et $g(x) \leq f(x)$ si x est positif, car on a

$$\sum_{p=1}^n x_p f(e_p) \leq f(x) \text{ pour tout } n .$$

La fonction $(f - g)$ est donc positive et nulle sur $[0]$. Dans la suite, nous supposons donc que f est positive et constante sur $[x]$ pour tout x .

LEMME 1. - Il existe un G_δ partout dense dans $K = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, A , tel que $f|_A$ soit continue.

Ceci est un résultat général sur les fonctions qui possèdent la propriété de Baire ([2], page 306).

LEMME 2. - Si A est un G_δ partout dense de $K = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$, alors il existe x dans $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ tel que $[x] \cap A$ soit dense.

Posons

$$K' = \prod_{i,j \in \mathbb{N}^2} M_{i,j} \text{ avec } M_{i,j} = [0, 1] ,$$

$$K' = \prod_{i=1}^{\infty} M_{i,1} \times \prod_{i=1, j>1}^{\infty} M_{i,j} = K \times K'' .$$

Soit P la projection de $\overline{K}$ sur K : c'est une application continue, surjective et ouverte de K' sur K . On vérifie aisément que ces trois propriétés impliquent

$$\overline{p^{-1}(A)} = p^{-1}(\overline{A})$$

donc $A' = \overline{p^{-1}(A)}$ est un G_δ partout dense dans K' .

Soit maintenant T le groupe (dénombrable) des homéomorphismes de K' formés par les permutations d'un nombre fini d'indices (i, j) . Pour tout élément t de T , $t(A')$ est un G_δ dense dans A' , donc il en est de même pour

$$B = \bigcap_{t \in T} t(A') .$$

Désignons par C l'ensemble des y de K' tels que $T(y)$ soit dense dans K' . Si $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une base dénombrable d'ouverts de K' , alors C est l'ensemble des y tels que, pour tout n , il existe t dans T tel que $t(y)$ soit dans O_n .

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in T} t(O_n) .$$

Il est facile de vérifier que $\bigcup_{t \in T} t(O_n)$ est dense dans K' . Donc C est un G_δ dense dans K' .

Par conséquent, $B \cap C$ n'est pas vide. Posons $x = P(y)$, où y est dans $B \cap C$. Montrons que $[x] \cap A$ est dense dans K . En effet, pour tout t de T , on a

$$P(t(y)) \in [Py] = [x]$$

donc

$$P(Ty) \subset [x] .$$

Comme de plus y est dans B , Ty est dans A' , donc

$$P(Ty) \subset A$$

d'où

$$P(Ty) \subset [x] \cap A .$$

Comme P est une application fermée

$$P(\overline{Ty}) = \overline{P(Ty)} \subset \overline{[x] \cap A} .$$

Or $\overline{Ty} = K'$, donc $K \subset \overline{[x] \cap A}$.

C. Q. F. D.

LEMME 3. - La fonction f est constante et égale à $\frac{1}{2} f(u)$ sur A .

En effet f est constante sur $[x_0]$ et continue sur A , donc elle est constante sur A si $[x_0] \cap A$ est dense.

Considérons l'homéomorphisme $x \xrightarrow{\Phi} (u - x)$ de K dans K , $\Phi(A)$ est un G_δ dense, donc $A \cap \Phi(A)$ est non vide. Si x est dans $A \cap \Phi(A)$, alors

$$x = u - y \text{ avec } y \in A, x \in A,$$

donc $u = x + y$.

Par suite $f(u) = f(x) + f(y) = 2f(x)$. La valeur de f sur A est donc $\frac{1}{2} f(u)$. Montrons que cette valeur est nulle. Comme f est positive, elle sera nulle si $f(u) = 0$. Ceci va résulter du lemme suivant.

LEMME 4. - Si A est un G_δ dense dans K , alors il existe x, y, z dans A tels que $x = y + z$.

On définit deux fonctions de K^2 sur K qui sont continues, surjectives et ouvertes en posant

$$g(a, b) = a.(u - b),$$

$$h(a, b) = a.b .$$

Par le même argument que précédemment, on voit que $\overline{g}^{-1}(A)$ et $\overline{h}^{-1}(A)$ sont des G_δ denses dans K^2 . Soit (a, b) un élément de $\overline{g}^{-1}(A) \cap \overline{h}^{-1}(A) \cap (A \times G)$.

Posons

$$a = x ,$$

$$g(a , b) = y ,$$

$$h(a , b) = z .$$

x , y , z sont dans A et $y + z = x$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHRISTENSEN (J. P. R.). - Borel structures and a topological zero-one law, Math. Scand., Kobenhavn, t. 29, 1971, p. 245-255.
- [2] KURATOWSKI (C.). - Topologie, Vol. 1, 4e édition. - Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958 (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne, 20).

(Texte reçu le 16 janvier 1975)

Michèle CAPON
 Université de Paris-Sud
 Mathématiques, Bâtiment 425
 91405 ORSAY
