Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Paulette Saab

Représentation intégrale dans des sous-espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 23, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A15_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 23, 10 p.

12 juin 1975

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DANS DES SOUS-ESPACES DE FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

par Paulette SAAB

Soient X un espace compact, F un espace de Banach, et $\mathcal{C}(X, F)$ l'espace des applications continues de X dans F, muni de la norme uniforme.

Si A est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X, désignons par $A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(X, F)$, associé à A et F.

Dans cette note, nous nous proposons de représenter les éléments du dual de $A \tilde{\otimes}_{\varepsilon} F$, par des mesures vectorielles sur X, à valeurs dans F', qui sont maximales.

Pour cela, au paragraphe 1, nous étendons un théorème de sélection borélienne de M. RAO [5], en supprimant, dans son théorème, l'hypothèse que le sous-espace A contient les constantes.

Nous utilisons ce théorème de sélection borélienne, pour démontrer, au paragraphe 2, un théorème de représentation intégrale, dans le cas où le compact X est métrisable.

Enfin, nous étudions au paragraphe 3, le cas où le compact X est quelconque, mais que F' possède la propriété de Radon-Nikodym. Nous donnons alors une démonstration directe du théorème de représentation intégrale, nous utilisons pour cela un théorème de CHOQUET [2] et un théorème de GROTHENDIECK [4].

0. Rappels et notations.

Produit tensoriel topologique d'espaces de Banach. - Si M et N sont deux espaces vectoriels, désignons par $\mathcal{B}(M, N)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $M \times N$.

Soit

$$\chi : \quad M \times N \longrightarrow \mathcal{B}(M, N)^*$$
$$(x, y) \longrightarrow \chi(x, y),$$

où $\langle \chi(x, y), h \rangle = h(x, y)$ pour tout $h \in \mathcal{B}(M, N)$.

On appelle produit tensoriel de M et N, noté $M \otimes N$, l'espace vectoriel engendré par $\chi(M \times N)$.

L'élément $\chi(x, y)$ est noté $x \otimes y$.

Si M et N sont deux espaces de Banach, on peut définir sur $M \otimes N$ les deux normes suivantes, avec $u \in M \otimes N$:

(1) $$\|u\|_\pi = \inf \sum_{i\leq n} \|x_i\| \, \|y_i\| \ ,$$

où l'inf est pris sur toutes les représentations finies de u sous la forme $u = \sum_{i\leq n} x_i \otimes y_i$.

(2) $$\|u\|_\varepsilon = \sup_{\|x'\|\leq 1, x'\in M', \|y'\|\leq 1, y'\in N'} |\sum \langle x' , x_i\rangle \langle y' , y_i\rangle| \ .$$

Nous noterons par $M \otimes_\pi N$ (resp. $M \otimes_\varepsilon N$) l'espace $M \otimes N$ muni de la norme π (resp. la norme ε) , et par $M \tilde{\otimes}_\pi N$ et $M \tilde{\otimes}_\varepsilon N$ leurs complétés respectifs.

Ceci étant, si X est un espace compact et F un espace de Banach, désignons par $\mathcal{C}(X , F)$ l'espace des applications continues de X dans F muni de la norme uniforme :

$$(\forall\ f \in \mathcal{C}(X , F)) \qquad \|f\| = \sup_{s\in X} \|f(s)\| \ .$$

Si $g \in \mathcal{C}(X)$ et $x \in F$, soit $g \otimes x$ la fonction de $\mathcal{C}(X , F)$, définie par

$$(\forall\ s \in X) \qquad \langle g \otimes x , s\rangle = g(s).x \ .$$

Il est bien connu (voir [6], IV, §2) que $\mathcal{C}(X , F)$ est isométrique à $\mathcal{C}(X) \tilde{\otimes}_\varepsilon F$. Il s'en suit que

$$(h \in \mathcal{C}(X , F)) \iff (\text{il existe } (h_k)_k \subseteq \mathcal{C}(X) \otimes_\varepsilon F \ ; \ h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k) \ ,$$

où la série converge uniformément pour la norme uniforme dans $\mathcal{C}(X , F)$.

Si G est un espace de Banach, nous désignerons par $B(G)$ sa boule unité et par G' son dual topologique.

Si Z est un espace compact, nous désignerons par

$$\begin{aligned} M(Z) &= \text{l'espace des mesures de Radon sur } X \\ M_1(Z) &= \{\mu \in M(Z) \ ; \ \|\mu\| \leq 1\} \\ M^+(Z) &= \{\mu \in M(Z) \ ; \ \mu \geq 0\} \\ M_1^+(Z) &= \{\mu \in M^+(Z) \ ; \ \|\mu\| = 1\} \ . \end{aligned}$$

1. Sur un théorème de sélection borélienne.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par (X , A) un couple, où X est un espace compact et A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X .

Nous savons que, sous ces conditions, nous pouvons plonger X homéomorphiquement dans $B(A')$, munie de la topologie $\sigma(A' , A)$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longmapsto B(A') \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \varepsilon_x|_A \end{aligned}$$

X s'identifie ainsi à un sous-compact de $B(A')$, et A à $A_0(B(A'))$, l'espace des applications affines réelles continues sur $B(A')$ qui sont nulles en 0 :

$$\begin{aligned} A &\longmapsto A_0(B(A')) \\ a &\longmapsto \mathrm{Re}\hat{a}|_{B(A')} \quad \text{où } \langle \hat{a} , a'\rangle = \langle a' , a\rangle \ , \quad \forall\ a' \in B(A') \ . \end{aligned}$$

Remarquons que l'ensemble $\mathcal{E}_{xt}(B(A'))$ des points extrémaux de $B(A')$ est inclus dans $T.\varphi(X)$ (où $T = \{t \in \underset{\sim}{C} \; ; \; |t| = 1\}$), d'où la définition suivante.

Définition 1.1 (CHOQUET [2]). - On appelle frontière module associée à un couple (X , A) , l'ensemble $\mathcal{E}_m(X , A) = X \cap \mathcal{E}_{xt}(B(A'))$.

Définition 1.2 (CHOQUET [2]). - Soient X un espace compact, et A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X . Une mesure $\mu \in M(X)$ est dite maximale si $|\varphi(\mu)|$, la valeur absolue de l'image de μ par φ , est maximale pour l'ordre de Choquet ([1], 26.6), défini sur $M^+(B(A'))$.

PROPOSITION 1.3. - Soient X un compact métrisable, et A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X . Une mesure $\mu \in M(X)$ est maximale si, et seulement si, μ est portée par $\mathcal{E}_m(X , A)$, i. e. $|\mu|(X \setminus \mathcal{E}_m(X , A)) = 0$.

Démonstration. - Il suffit de remarquer que X est identifié à un sous-compact de $B(A')$ et qu'une mesure positive sur $B(A')$ est maximale si, et seulement si, elle est portée par $\mathcal{E}_{xt}(B(A'))$ ([1] 27.5).

Définition 1.4. - Soient μ et ν deux éléments de $M(X)$; nous dirons que

$$\mu \sim_A \nu$$

si, et seulement si, $\int f d\mu = \int f d\nu$ pour tout $f \in A$.

Ceci étant nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1.5. - Soient X un compact métrisable, et A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X ; il existe alors une sélection borélienne, $a' \longmapsto \mu_{a'}$, de $B(A')$ dans $M_1(X)$ telle que, pour tout $a' \in B(A')$,

(i) $\int a d\mu_{a'} = \langle a' , a \rangle$ pour tout $a \in A$,

(ii) $\mu_{a'}$ est maximale.

Démonstration. - Or il résulte d'un théorème classique (voir [9]) que, sous les hypothèses du théorème 1.5, il existe une sélection borélienne

$$\lambda : B(A') \longmapsto M_1^+(B(A'))$$

$$a' \longmapsto \lambda a'$$

telle que, pour tout $a' \in B(A')$,

(i) $\lambda a'$ est de barycentre a' .

(ii) $\lambda a'$ est portée par $\mathcal{E}_{xt}(B(A'))$.

La relation (i) implique que, pour tout $a' \in B(A')$,

$$\int \hat{a} d\lambda_{a'} = \langle a' , a \rangle \text{ pour tout } a \in A .$$

D'autre part, puisque $\mathcal{E}_{xt}(B(A')) \subseteq T.\varphi(X)$, pour tout $a' \in B(A')$, la mesure

$\lambda a'$ est donc portée par $T.\varphi(X)$.

Or nous avons le lemme suivant :

LEMME 1.6 (FUHR et PHELPS [3]). - *L'application continue* $(t , x) \longmapsto t\varphi(x)$ *de* $T \times X$ *dans* $T.\varphi(X)$, *admet une sélection borélienne* ψ *telle que, pour tout* $a' \in T.\varphi(X)$,

$$\psi(a') = (t , x) \quad \underline{\text{où}} \quad t\varphi(x) = a' .$$

Notons par $\Psi : M(T.\varphi(X)) \longmapsto M(T \times X)$, l'extension de ψ aux espaces de mesures.

D'autre part, nous pouvons définir une application $H : M_1^+(T \times X) \longmapsto M_1(X)$ de la façon suivante : pour tout $\nu \in M_1^+(T \times X)$,

$$\langle H\nu , f\rangle = \int_{T\times X} tf(x)\, d\nu(t , x) \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{C}(X) .$$

La démonstration du théorème 1.5 est achevée. L'application cherchée s'obtient en composant les applications boréliennes H , Ψ et λ comme l'indique le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} B(A') & \longmapsto & M_1(X) \\ \lambda \downarrow & & \uparrow H \\ M_1^+(B(A')) & \underset{\Psi}{\longmapsto} & M_1^+(T \times X) \end{array}$$

pour $a' \in B(A')$, soit donc $\mu_{a'} = H \circ \Psi(\lambda_{a'})$; pour tout $a \in A$, nous avons :

(i) $$\int a\, d\mu_{a'} = \int \hat{a}\, d\lambda a' = \langle a' , a\rangle$$

(ii) puisque $\lambda_{a'}$ est portée par $\mathcal{E}_{xt}(B(A'))$, $\Psi(\lambda_{a'})$ est portée par l'ensemble

$$\{(t , y) \in T \times X ; \ \varphi(y) \in \mathcal{E}_{xt}(B(A'))\} = T \times \mathcal{E}_m(X , A) ,$$

d'où $\mu_{a'}$ est portée par $\mathcal{E}_m(X , A)$.

Ceci étant, nous pouvons étendre, grâce au théorème 1.5, un théorème de M. RAO [5] en supprimant, dans son théorème, l'hypothèse que le sous-espace A contient les constantes.

THÉORÈME 1.7. - *Soient* X *un compact métrisable, et* A *un sous-espace fermé de* $\mathcal{C}(X)$ *qui sépare les points de* X . *Il existe alors une sélection borélienne* $x \longmapsto \mu_x$ *de* X *dans* $M_1(X)$ *telle que, pour tout* $x \in X$,

(i) $\varepsilon_x \sim_A \mu_x$,

(ii) μ_x *est maximale.*

2. Représentation intégrale dans le cas où le compact X est métrisable.

Soient X un compact, et F un espace de Banach. Soit $\mathcal{C}(X , F)$ l'espace de fonctions continues de X dans F muni de la norme uniforme.

Soit $\mathcal{B}(X)$ la tribu des boréliens de X.

<u>Définition</u> 2.1. - Soient X un compact, F un espace de Banach, et ν une application de $\mathcal{B}(X)$ dans F'.

Pour tout $x \in F$, désignons par $\langle x , \nu\rangle$, l'application définie sur $\mathcal{B}(X)$ et à valeurs scalaires :

$$\langle x , \nu\rangle(E) = \langle x , \nu(E)\rangle \text{ pour tout } E \in \mathcal{B}(X) .$$

On appelle <u>mesure vectorielle</u> sur X à valeurs dans F', toute application $\nu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow F'$ telle que :

$$(\text{pour tout } x \in F) \quad [\langle x , \nu\rangle \in M(X)] .$$

Si ν est une telle mesure vectorielle sur X, à valeurs dans F', nous définissons sa variation de la façon suivante : pour tout $E \in \mathcal{B}(X)$,

$$|\nu|(E) = \sup_{\mathcal{E}} \sum_{i \leq n} \|\nu(E_i)\|$$

où le sup est pris sur toutes les partitions finies $\mathcal{E}$ de E, formées d'éléments de $\mathcal{B}(X)$.

Nous dirons que ν est à variation totale finie si $|\nu|(X) < + \infty$.

Dans la suite nous noterons par $M(X , F')$ l'ensemble des mesures vectorielles sur X à valeurs dans F', qui sont à variation totale finie.

$M(X , F')$ muni de la norme $\nu \longmapsto |\nu|(X)$ est un espace de Banach.

Rappelons (voir [8]) que $M(X , F')$ est isométrique à $\mathcal{C}(X , F)'$, le dual de $\mathcal{C}(X , F)$; l'isométrie entre $M(X , F')$ et $\mathcal{C}(X , F)'$ est définie de la façon suivante : si $\nu \in M(X , F')$ et $g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$, où $g_k = \sum_{i \leq n_k} f_i^k \otimes x_i^k$,

$$\langle \nu , g\rangle = \sum_k \sum_{i \leq n_k} \int f_i^k \, d \, \langle x_i^k , \nu\rangle .$$

Si A est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ considérons $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$.

Il est clair que si A sépare les points de X, il en est de même de $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$.

Comme dans le cas des mesures scalaires, nous pouvons définir une relation d'équivalence dans $M(X , F')$ relativement à $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$.

<u>Définition</u> 2.2. - Soient μ et ν deux éléments de $M(X , F')$, nous dirons, par définition, que $[\mu \sim \nu]$ si, et seulement si, $\mu = \nu$ sur $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$.

Le lemme suivant est immédiat.

LEMME 2.3. - <u>Si</u> μ <u>et</u> ν <u>sont deux éléments de</u> $M(X , F')$, <u>alors nous avons</u> :

$[\mu \sim \nu]$ <u>si</u>, <u>et seulement si</u>, <u>pour tout</u> $x \in F$, $[\langle x,\mu\rangle \sim_A \langle x,\nu\rangle]$.

<u>Définition</u> 2.4. - Soit μ un élément de $M(X , F')$. μ est dite <u>maximale</u> si, et seulement si,

$$(\forall\, x \in F) \qquad [\langle x \,,\, \mu\rangle \text{ est maximale}]\,.$$

LEMME 2.5. - Si $\mu \in M(X\,,\,F')$, pour tout borélien E de X , nous avons :

$$|\langle x \,,\, \mu\rangle|(E) \leqslant \|x\|\;|\mu|(E) \qquad (\forall\, x \in F)\,.$$

La démonstration du lemme 2.5 est immédiate d'après la définition de la variation d'une mesure.

Définition 2.6. - Soient $\mu \in M(X\,,\,F')$ et $E \in \mathcal{B}(X)$, nous dirons que μ est portée par E si, $|\mu|(X \setminus E) = 0$.

Compte tenu du lemme 2.5, de la définition de la variation d'une mesure, et de la proposition 1.3, nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 2.7. - Soit μ un élément de $M(X\,,\,F')$. Supposons que le compact X soit métrisable, les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i) μ est maximale,

(ii) μ est portée par $\mathcal{E}_m(X\,,\,A)$.

Passons maintenant à l'étude du dual de $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$.

Or, $A \otimes_\varepsilon F$ est dense dans $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$, d'où $(A \otimes_\varepsilon F)'$ est isométrique à $(A \tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$.

Or $A \otimes_\varepsilon F$ s'injecte isométriquement dans $\mathcal{C}(B(A') \times B(F'))$.

Soit I cette injection canonique.

$$I : \qquad A \otimes_\varepsilon F \longmapsto \mathcal{C}(B(A') \times B(F'))$$

$$u = \sum_{i\leqslant n} a_i \otimes x_i \longmapsto I(u)$$

où $\langle I(u)\,,\,(a'\,,\,x')\rangle = \sum_{i\leqslant n} \langle a'\,,\,a_i\rangle\,\langle x'\,,\,x_i\rangle$, $\forall\;(a',x') \in B(A') \times B(F')$.
Il s'en suit que, si $L \in (A \otimes_\varepsilon F)'$, il existe $\theta \in M(B(A') \times B(F'))$ telle que :

(i) $\theta \circ I = L$,

(ii) $\|\theta\| = \|L\|$.

La relation (i) est équivalente à :

$$(\forall\, u = \textstyle\sum_{i\leqslant n} a_i\otimes x_i \in A\otimes_\varepsilon F)\;\left[\langle L,u\rangle = \int_{B(A')\times B(F')} \sum_{i\leqslant n} \langle a',a_i\rangle\langle x',x_i\rangle d\theta(a',x')\right].$$

THÉORÈME 2.8. - Soient X un compact métrisable, A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X , et F un espace de Banach. Tout élément L de $(A \tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$ se représente par un élément ν de $M(X,F')$ tel que :

(i) $\langle L\,,\,u\rangle = \langle \nu\,,\,u\rangle$ pour tout $u \in A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$,

(ii) $\|\nu\| = \|L\|$,

(iii) ν est maximale.

Démonstration. - Soit $L \in (A \tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$, il existe $\theta \in M(B(A') \times B(F'))$ telle que :

(i) $\|\theta\| = \|L\|$,

(ii) $\theta = L$ sur $A \otimes_\varepsilon F$.

Or le théorème 1.5 implique qu'il existe une sélection borélienne $a' \longmapsto \mu_{a'}$ de $B(A')$ dans $M_1(X)$ telle que :

1° $\int a d\mu_{a'} = \langle a' , a\rangle$ pour tout $a \in A$,

2° $\mu_{a'}$ est maximale.

Si $\mu \in M(X)$ et $x' \in F'$, soit $\mu \otimes x'$ l'élément de $M(X , F')$ défini par :

$$\langle \mu \otimes x' , E\rangle = \mu(E).x' , \quad \forall E \in B(X) .$$

L'application

$$B(A') \times B(F') \longmapsto M(X , F')$$
$$(a' , x') \longmapsto \mu_{a'} \otimes x'$$

est borélienne. De plus, elle est bornée car :

$$\|\mu_{a'} \otimes x'\| = \|\mu_{a'}\| \, \|x'\| \leq 1 , \quad \forall (a' , x') \in B(A') \times B(F') .$$

Il s'en suit que l'application

$$B(A') \times B(F') \longmapsto M(X , F')$$
$$(a' , x') \longmapsto \mu_{a'} \otimes x'$$

est $\sigma(M(X , F') , \mathcal{C}(X , F))$ universellement intégrable.

Considérons alors l'intégrale faible :

$$\nu = \int_{B(A')\times B(F')} \mu_{a'} \otimes x' \, d\theta(a' , x') , \quad \nu \in M(X , F') ,$$

et ν est la mesure cherchée. En effet :

(i) Pour démontrer que $\nu = L$ sur $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$, il suffit de le vérifier sur les éléments $a \otimes x$, où $a \in A$ et $x \in F$. Or

$$\langle \nu , a \otimes x\rangle = \int_{B(A')\times B(F')} \langle \mu_{a'} , a\rangle \langle x' , x\rangle \, d\theta(a' , x') .$$

Puisque $\int a d\mu_{a'} = \langle a' , a\rangle$, pour $a \in A$,

$$\langle \nu , a \otimes x\rangle = \int_{B(A')\times B(F')} \langle a' , a\rangle \langle x' , x\rangle \, d\theta(a' , x')$$
$$= L(a \otimes x) .$$

(ii) D'après sa définition, $\|\nu\| \leq \|\theta\| = \|L\|$, puisque $L = \nu | A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$, il s'en suit que $\|\nu\| = \|L\|$.

Il reste à prouver la maximalité de ν .

Considérons l'application

$$B(A') \times B(F') \longmapsto M^+(X)$$
$$(a' , x') \longmapsto |\mu_{a'}| \, \|x'\|$$

elle se factorise en deux applications boréliennes :

$$\begin{tikzcd}
B(A') \times B(F') \arrow[r] & M_1(X) \times B(F') \\
(a' , x') \arrow[r] \arrow[dr] & (\mu_{a'} , x') \arrow[d] \\
 & M^+(X) \\
 & |\mu_{a'}| \, \|x'\|
\end{tikzcd}$$

elle est donc borélienne. Il s'en suit que $\int_{B(A') \times B(F')} |\mu_{a'}| \, \|x'\| \, d|\theta|(a' , x')$ a un sens et nous vérifions que :

$$|\nu| \leqslant \int_{B(A') \times B(F')} |\mu_{a'}| \, \|x'\| \, d|\theta|(a' , x') .$$

Comme $\forall \ a' \in B(A')$,

$$|\mu_{a'}|(X \setminus \mathcal{E}_m(X , A)) = 0 ,$$

il s'en suit que

$$|\nu|(X \setminus \mathcal{E}_m(X , A)) = 0 ,$$

ce qui prouve, d'après (2.7), que ν est maximale.

COROLLAIRE 29. - *Soient* X *un compact métrisable,* A *un sous-espace de* $\mathcal{C}(X)$ *qui sépare les points de* A *, et* F *un espace de Banach.*

Pour toute mesure $\mu \in M(X , F')$ *, il existe* $\nu \in M(X , F')$ *telle que :*

(i) $\nu \sim \mu$,

(ii) $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$,

(iii) ν *est maximale.*

Démonstration. - Il suffit d'appliquer le théorème 2.8 à $L = \mu|_{A \tilde{\otimes} F}$.

3. Représentation intégrale dans le cas où F' possède la propriété de Radon-Nikodym.

Dans [2], G. CHOQUET a démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.- *Soient* X *un compact, et* A *un sous-espace fermé de* $\mathcal{C}(X)$ *qui sépare les points de* X *. Alors tout élément* ℓ *du dual de* A *se représente par une mesure de Radon* α *sur* X *telle que :*

(i) $\int a d\alpha = \ell(a)$ *pour tout* $a \in A$,

(ii) $\|\alpha\| = \|\ell\|$

(iii) α *est maximale.*

D'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.2. - Pour toute mesure de Radon $\beta \in M(X)$, il existe $\alpha \in M(X)$ telle que :

(i) $\alpha \sim_A \beta$,

(ii) $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$,

(iii) α est maximale.

Définition 3.3. - On dit qu'un espace de Banach G possède la propriété de Radon-Nikodym si, pour tout espace mesuré (S, Σ, P) de mesure finie, et toute mesure m sur Σ à valeurs dans G, absolument continue par rapport à P et de variation finie, il existe une application f de S dans G, intégrable au sens de Bochner, et telle que

$$m(E) = \int_E f dP \text{ , pour tout } E \in \Sigma .$$

Parmi les espaces de Banach qui ont la propriété de Radon-Nikodym, nous distinguons les espaces réflexifs et les duaux séparables d'espaces de Banach.

Soient X un espace compact, et F un espace de Banach.

Rappelons (voir [4]) que si F' possède la propriété de Radon-Nikodym, alors $M(X, F')$ est isométrique à $M(X) \tilde{\otimes}_\pi F'$.

Ceci étant, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 3.4. - Soients X un compact, A un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X)$ qui sépare les points de X, et F un espace de Banach tel que F' possède la propriété de Radon-Nikodym.

Pour tout élément L du dual de $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$ et tout $\delta > 0$, il existe $\nu \in M(X,F')$ telle que :

(i) $\nu = L$ sur $A \tilde{\otimes}_\varepsilon F$,

(ii) $\|\nu\| \leq \|L\| + \delta$,

(iii) ν est maximale.

Démonstration. - Soit $L \in (A \tilde{\otimes}_\varepsilon F)'$; le théorème de Hahn-Banach implique qu'il existe $\mu \in M(X, F')$ telle que :

(i) $\mu|_{A\tilde{\otimes}_\varepsilon F} = L$,

(ii) $\|\mu\| = \|L\|$.

Puisque F' possède la propriété de Radon-Nikodym, nous pouvons considérer que $\mu \in M(X) \tilde{\otimes}_\pi F'$.

Soit $\delta > 0$. D'après ([7] 6.4, III), il existe $(\mu_n)_n \subseteq M(X)$ et $(x'_n)_n \subseteq F'$;

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \otimes x'_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\mu_n\| \, \|x'_n\| \leq \|\mu\| + \delta .$$

Or le corollaire 3.2 implique que, $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$, il existe $\nu_n \in M(X)$ telle que :

(i) $\nu_n \sim_A \mu_n$,

(ii) $\|\nu_n\| \leqslant \|\mu_n\|$,

(iii) ν_n est maximale.

Considérons l'élément

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \otimes x'_n .$$

La relation (ii) implique que $\sum_{n=0}^{\infty} \|\nu_n\|\,\|x'_n\| < +\infty$, donc $\nu \in M(X) \tilde{\otimes}_\pi F'$ de plus

$$\|\nu\| \leqslant \|\mu\| + \delta = \|L\| + \delta ,$$

et $\nu \sim \mu$, donc $\nu|_{A\tilde{\otimes}_\varepsilon F} = L$.

Il reste à prouver la maximalité de ν, or il est facile de vérifier que

$$|\nu| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\nu_n|\,\|x'_n\| .$$

Puisque pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, ν_n est maximale, alors ν l'est aussi.

Donc ν répond bien aux conditions du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Lecture on analysis, vol. 2. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[2] CHOQUET (G.). - Frontière-module et représentation intégrale, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 11e-12e années, 1971-1973, n° 8, 4 p.

[3] FUHR (R.) and PHELPS (R. R.). - Uniqueness of complex representing measures on the Choquet boundary, J. functional Analysis, t. 14, 1973, p. 1-27.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[5] RAO (M.). - Measurable selections of representing measures, Quart. J. Math., Oxford, Series 2, t. 22, 1971, p. 571-573.

[6] SCHAEFER (H. H.). - Banach lattices and positive operators. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 215).

[7] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces. - New York, Macmillan Company ; London, Collier-Macmillan, 1966 (Macmillan Seires in advanced Mathematics and theoretical Physics).

[8] SINGER (I.). - Linear functionals on the space of continuous mappings of a compact space into a Banach space [en russe], "Hommage à S. STOÏLOW pour son 70e anniversaire", Revue Math. pure et appl., Bucuresti, t. 2, 1957, p. 301-315.

[9] VINCENT-SMITH (G. F.). - Measurable selection of simplicial maximal measures, J. London math. Soc., Series 2, t. 7, 1973, p. 427-428.

(Texte reçu le 16 juin 1975)

Paulette SAAB
15 rue d'Ulm
75005 PARIS