Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Mohamed Akkar

Théorèmes de structures de certaines algèbres, et continuité des caractères

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 21, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A14_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 21, 12 p.
15 mai 1975

THÉORÈMES DE STRUCTURES DE CERTAINES ALGÈBRES, ET CONTINUITÉ DES CARACTÈRES

par Mohamed AKKAR

1. Introduction.

L'origine des résultats présentés dans cet exposé provient d'un vieux couple de problèmes posés il y a un peu plus de vingt ans par E. A. MICHAEL [10]. Ces deux problèmes qui sont toujours ouverts sont les suivants :

Problème 1. - Est-ce que toute fonctionnelle multiplicative sur une algèbre commutative localement multiplicativement convexe de Fréchet est continue ?

Problème 2. - Est-ce que toute fonctionnelle multiplicative sur une algèbre commutative localement multiplicativement convexe est bornée ?

Il est évident qu'une réponse positive au second problème résoudrait le premier.

On comprend facilement pourquoi on pose le problème de la continuité d'un caractère sur une algèbre localement multiplicativement convexe commutative et complète. Quant au deuxième problème, il tient au fait que l'on sait construire sur des algèbres localement multiplicativement convexes complètes (non métrisables) des caractères discontinus, mais chaque fois on constate que les caractères obtenus sont tous bornés. Par exemple, on a le résultat suivant :

PROPOSITION. - *Soit T un espace topologique pseudo-compact, localement compact et non compact. Soit $A = C(T)$ l'algèbre des fonctions continues sur l'espace T, munie de la topologie de la convergence compacte. Alors A est une algèbre localement multiplicativement convexe commutative et complète dont tous les caractères sont bornés, et qui possède des caractères non continus.*

Démonstration. - Voir [10]. Il est utile de remarquer que l'espace $X(A)$ des caractères (algébriques) de A est en correspondance biunivoque avec le compactifié de Stone-Čech $\beta(T)$ alors que l'espace des caractères continus est en correspondance biunivoque avec l'espace T. Donc, puisque T n'est pas compact, tout point de $\beta(T) \setminus T$ fournit un caractère borné non continu. Remarquons aussi que l'algèbre A n'est pas métrisable.

Comme exemple d'espace T on peut prendre le semi-segment de droite transfinie $[0, \Omega[$ où Ω désigne le plus petit ordinal non dénombrable.

La proposition ci-dessus aide à comprendre pourquoi le problème 2 a été posé.

Récemment dans [5], P. G. DIXON et D. H. FREMLIN ont montré qu'en fait les problèmes 1 et 2 sont équivalents. Ce résultat peut sembler curieux a priori dans la mesure où une propriété de continuité automatique serait vraie pour une algèbre topologique dès qu'elle est vraie pour une algèbre de Fréchet ; ceci d'autant plus qu'on ne connaissait jusqu'à maintenant aucun lien de structure entre les algèbres localement multiplicativement convexes complètes qui sont de Fréchet et celles qui ne le sont pas. Un des buts de cet exposé est d'établir un tel théorème de structure. Ce théorème décrira la structure bornologique d'une algèbre topologique localement multiplicativement convexe à l'aide d'algèbres du même type qui sont de Fréchet. Cela permettra notamment d'obtenir comme corollaire immédiat l'équivalence établie dans [6]. Nous établissons également un théorème (dual du précédent) de structure des algèbres topologiques localement convexes limite inductive d'algèbres normées (ces algèbres ont été étudiées dans [2] et [18] par exemple). Ce dernier résultat permettra de résoudre un problème posé dans [2]. Dans la démonstration des deux théorèmes de structure précités, il sera mis en évidence une technique qui consiste à construire des topologies métrisables ou des bornologies à base dénombrable à partir du cas général. Nous montrerons l'efficacité de cette technique dans une autre situation en démontrant un théorème de structure sur les espaces vectoriels topologiques réticulés localement solides. Ce théorème servira à généraliser un théorème de KLEE [12].

2. Définitions et rappels.

Rappelons qu'une algèbre topologique localement convexe E est une algèbre munie d'une topologie d'espace localement convexe pour laquelle la multiplication est séparément continue.

L'algèbre localement convexe E sera dite l. m. c. (localement multiplicativement convexe) si sa topologie est définie par une famille de semi-normes p_i sous multiplicatives, c'est-à-dire vérifiant

$$p_i(xy) \leq p_i(x)\ p_i(y) \qquad (x\ ,\ y \in E)$$

ou de façon équivalente si l'origine E admet un système fondamental de voisinages de 0 stables par multiplication (idempotents). E sera dite de Fréchet si elle est métrisable et complète.

Rappelons également qu'une algèbre bornologique convexe est une algèbre munie d'une bornologie d'espace bornologique convexe (e. b. c.) pour laquelle la multiplication est bornée, c'est-à-dire que le produit de deux parties bornées est borné.

Un élément x d'une algèbre bornologique convexe E est dit régulier (voir [7] ou [3]) s'il est absorbé par un disque borné idempotent, ou ce qui est équivalent s'il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que la suite $(x^n/\lambda^n)_n$ soit bornée.

Une algèbre bornologique convexe E est dite multiplicativement convexe (en abrégé a. b. m. c.) si tout borné de E est régulier, c'est-à-dire absorbé par un disque borné idempotent. Une telle algèbre est limite inductive bornologique (et réunion filtrante croissante) d'algèbres semi-normées.

Une bornologie sur une algèbre est dite à base dénombrable s'il existe une famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dénombrable de parties bornées telle que tout borné de l'algèbre soit contenu dans un B_n .

Toutes les limites inductives ou projectives considérées dans ce travail sont prises dans la catégorie des espaces topologiques localement convexes (avec les applications linéaires continues) ou dans celles des espaces bornologiques convexes (avec les applications linéaires bornées) ([8] et [9]).

3. Théorèmes de structure des algèbres topologiques.

THÉORÈME 1. - Si E est une algèbre topologique localement multiplicativement convexe complète, alors E est bornologiquement limite inductive d'algèbres topologiques localement multiplicativement convexes de Fréchet.

Démonstration. - Nous allons démontrer en fait que toute algèbre l. m. c. est réunion filtrante croissante (avec injections continues) d'une famille d'algèbres l. m. c. métrisables $(E_i)_i$ de telle façon qu'une partie B de E est bornée dans E si, et seulement si, B est contenue dans une algèbre E_i , et y est bornée. Ensuite nous préciserons ce qui se passe dans le cas où E est une algèbre complète.

Soit $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de semi-normes sous-multiplicatives définissant la topologie de E . Soit $(B_i)_{i\in I}$ une base de bornologie de E . Fixons un borné B_i de cette famille. Pour tout λ appartenant à Λ , il existe une constante positive M_λ telle que :

$$p_\lambda(x) \leq M_\lambda \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{dans} \quad B_i \ .$$

Pour tout entier positif n , avec la notation $p_\lambda(B_i) = \sup\{p_\lambda(x) \ ; \ x \in B_i\}$, considérons

$$\Lambda_n^i = \{\lambda \in \Lambda \ ; \ p_\lambda(B_i) < n\} \ .$$

Il est clair que $\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n^i$. Pour tout n , définissons :

$$q_n^i(x) = \sup\{p_\lambda(x) \ ; \ \lambda \in \Lambda_n^i\} \ .$$

C'est une semi-norme généralisée (non partout finie) sous-multiplicative et semi-continue inférieurement. Considérons maintenant le sous-ensemble suivant :

$$E_i = \{x \in E \ ; \ q_n^i(x) < \infty \quad \text{pour tout} \quad n\} \ .$$

D'après la propriété de sous-multiplicativité des q_n^i , E_i est une sous-algèbre de E . Munie de la topologie définie par la famille des semi-normes q_n^i , l'algèbre E_i devient une algèbre topologique localement multiplicativement convexe métrisable. De plus, B_i est contenu dans E_i : en effet, par définition des ensembles Λ_n^i et des semi-normes q_n^i , nous avons pour tout entier n

$$q_n^i(x) \leqslant n \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{dans} \quad B_i \ .$$

Donc B_i est un borné de E_i. Au total, à chaque borné B_i de la base de bornologie de E, nous avons associé une algèbre localement multiplicativement convexe métrisable E_i contenue dans E telle que B_i y soit bornée. De plus, l'injection canonique $E_i \longrightarrow E$ est continue : en effet, pour tout λ dans Λ, il existe un entier $n(\lambda)$ tel que λ appartienne à $\Lambda^i_{n(\lambda)}$; donc, pour tout x dans E_i, on a

$$p_\lambda(x) \leqslant q^i_{n(\lambda)}(x) \ .$$

Il est clair, par construction, que l'algèbre E est réunion des sous-algèbres E_i quand le borné B_i parcourt la base de bornologie de E donnée au départ.

Supposons maintenant que l'on considère deux bornés de E, B_i et B_j, tels que $B_i \subset B_j$. On vérifie facilement que Λ^j_n est contenu dans Λ^i_n et, par conséquent on a

$$q_n^j(x) \leqslant q_n^i(x) \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{de} \quad E$$

et, par suite, E_i est contenu dans E_j. Si $(B_i)_{i\in I}$ est la base bornologique considérée, l'ensemble des indices I devient ordonné filtrant à l'aide de la relation : $i \leqslant j$ si, et seulement si, $B_i \subset B_j$. Donc $(E_i)_{i\in I}$ est un système inductif de sous-algèbres de E dont les applications de transmission sont les injections canoniques. Enfin, bornologiquement, on a $E = \varinjlim E_i$ (en fait, $E = \bigcup_i E_i$) : en effet, tout borné de E est contenu dans une algèbre E_i et y est borné, et les applications $E_i \longrightarrow E$ sont bornées. Ainsi on a déjà obtenu le résultat suivant.

PROPOSITION. - <u>Toute algèbre localement multiplicativement convexe séparée est limite inductive bornologique (et réunion) d'algèbres localement multiplicativement convexes séparées métrisables.</u>

Supposons maintenant que l'algèbre E est complète. Alors toute sous-algèbre E_i l'est aussi. Soit $(x_j)_{j\in J}$ un ordonné filtrant de Cauchy dans E_i pour la topologie $\mathcal{T}_i$, définie par la famille des semi-normes q_n^i. Donc $(x_j)_j$ est de Cauchy dans E et, par suite, converge, vers un élément x de E. Il reste à montrer que cet élément x est dans E_i et que $(x_j)_j$ converge vers x pour la topologie $\mathcal{T}_i$. Pour tout n, la famille $(q_n(x_j))_{j\in J}$ est bornée dans E_i puisque $(x_j)_j$ est de Cauchy. Donc il existe $M > 0$ tel que

(1) $$q_n(x_j) < M \quad \text{pour} \quad j \geqslant j_0 \ .$$

Comme, pour tout n, l'ensemble $\{x \in E \ ; \ q_n(x) \leqslant \alpha\}$ $(\alpha > 0)$ est fermé pour $\mathcal{T}$, vu que toute q_n est semi-continue inférieurement pour $\mathcal{T}$, on peut passer à la limite dans (1) et obtenir

(2) $$q_n(x) \leqslant M \ .$$

Ce qui signifie que $x \in E_i$ et on voit de façon analogue que x_j converge dans

E_i pour $\mathcal{T}_i$.

COROLLAIRE 2 (Théorème de DIXON-FREMLIN). - Toute fonctionnelle multiplicative sur une algèbre localement multiplicativement convexe commutative et complète est bornée si, et seulement si, toute fonctionnelle multiplicative d'une algèbre de Fréchet localement multiplicativement convexe commutative est continue.

La même technique de démonstration que celle utilisée dans le théorème 1 nous permet également d'obtenir un résultat analogue pour les algèbres l. m. c. involutives.

Rappelons qu'une algèbre topologique involutive est une algèbre topologique munie d'une involution continue. Une forme linéaire sur une algèbre involutive est dite positive, si $f(x^* x) \geq 0$, $\forall x \in E$.

THÉORÈME 3. - Si E est une algèbre topologique localement multiplicativement convexe involutive complète, alors E est réunion filtrante (avec injections continues) d'une famille d'algèbres l. m. c. involutives de Fréchet $(E_i)_i$ telles qu'une partie est bornée dans E si, et seulement si, elle est contenue dans une algèbre E_i et y est bornée.

Démonstration. - En effet, on reprend la même démonstration que dans le théorème 1 en remarquant seulement que sur E l'involution est continue si, et seulement si, la topologie de E est définie par une famille $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de semi-normes sous-multiplicatives vérifiant en outre

$$p_\lambda(x^*) = p_\lambda(x) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda .$$

Ceci permet notamment de vérifier que les sous-algèbres E_i sont involutives : en effet, si x est dans E_i il en est de même de x^* , et l'involution est continue pour la topologie de E_i car on a

$$q_n^i(x) = q_n^i(x^*) \quad \text{pour tout} \quad n .$$

COROLLAIRE 4. - Toute forme linéaire positive sur une algèbre localement multiplicativement convexe complète involutive et unitaire est bornée.

Démonstration. - Dans [13], TAO-SHING SHAH démontre que dans une algèbre localement multiplicativement convexe de Fréchet involutive unitaire, toute forme linéaire positive est continue, d'où la conclusion d'après le théorème 3.

Les théorèmes 1 et 3 se généralisent au cas non localement convexe de la façon suivante.

Définition. - Une algèbre topologique (non forcément localement convexe) est dite localement multiplicative si elle admet un système fondamental de voisinages de 0 idempotents.

(Pour des exemples de telles algèbres voir [14] ou [16].)

THÉORÈME 5. - Si E est une algèbre topologique localement multiplicative complète, alors E est limite inductive bornologique d'algèbres topologiques localement multiplicatives métrisables complètes.

Démonstration. - Soit $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages équilibrés de 0 idempotents dans E . Soit B une partie bornée de E . Pour tout n , soit

$$\mathcal{V}_n(B) = \{V \in \mathcal{V} \; ; \; B \subset nV\} .$$

Désignons par $V_n(B)$ l'intersection des éléments V de $\mathcal{V}_n(B)$ et par $E_n(B)$ le sous-espace engendré par $V_n(B)$ dans E . Soit $E(B)=\bigcap_n E_n(B)$. Puisque les éléments de $\mathcal{V}_n(B)$ sont idempotents, il en est de même de $V_n(B)$. Donc, pour tout n, $E_n(B)$ est une sous-algèbre de E et, par suite, $E(B)$ est également une sous-algèbre de E . Sur $E(B)$, considérons la topologie initiale $\mathcal{T}$, définie par les injections canoniques $E(B) = \bigcap_n E_n(B) \longrightarrow E_n(B)$, où chaque $E_n(B)$ est munie de la topologie vectorielle $\mathcal{T}_n$ engendrée par $V_n(B)$ (Remarquons qu'à partir d'un certain rang tous les $V_n(B)$ sont non vides). Cette topologie initiale $\mathcal{T}$, définie par les topologies $\mathcal{T}_n$, est une topologie d'algèbre métrisable. Nous avons, par construction, $B \subset nV_n(B)$, car on a $B \subset nV$ pour tout V de $\mathcal{V}_n(B)$, et donc $B \subset E_n(B)$, $\forall\, n$. Cela montre que B est une partie bornée de $E(B)$.

Soient maintenant B_1 et B_2 deux parties bornées de l'algèbre E telles que $B_1 \subset B_2$. Il est clair que $\mathcal{V}_n(B_2) \subset \mathcal{V}_n(B_1)$ et donc $V_n(B_1) \subset V_n(B_2)$. Par suite, $E(B_1) \subset E(B_2)$.

Donc si on considère une base $(B_i)_{i\in I}$ de la bornologie de E , et si l'ensemble des indices I est ordonné filtrant à l'aide de la relation :

$$i \leqslant j \text{ si, et seulement si, } B_i \subset B_j$$

la famille $(E(B_i))_{i\in I}$ est un système inductif de sous-algèbres métrisables de E dont les applications de transmission sont les injections canoniques. De plus, bornologiquement, E est limite inductive (et en fait réunion filtrante croissante) des algèbres topologiques $E(B_i)$ munies des topologies métrisables $\mathcal{T}_i$ ci-dessus.

Pour terminer la démonstration, nous allons montrer que si E est complète, il en est de même des algèbres $E(B_j)$. En effet, soit $(x_i)_{i\in I}$ un ordonné filtrant de Cauchy pour la topologie $\mathcal{T}_j$ de $E(B_j)$. La famille $(x_i)_i$ est donc de Cauchy dans E , et converge ainsi vers un élément x de E . Il s'agit de montrer que x est dans $E(B_j)$, et que $(x_i)_i$ converge vers x dans $E(B_j)$. La famille $(x_i)_i$ est bornée pour $\mathcal{T}_j$. Donc, pour tout voisinage V de 0 pour $\mathcal{T}_j$ dans $E(B_j)$ qu'on peut choisir fermé pour la topologie $\mathcal{T}$ de E , il existe $\lambda > 0$ tel que $x_i \in \lambda V$ pour tout i . Donc, par passage à la limite pour $\mathcal{T}$, on obtient $x \in \lambda V$, c'est-à-dire que x est dans $E(B_j)$. On voit également, par passage à la limite, que x_i converge vers x pour $\mathcal{T}_j$, en écrivant que $(x_i)_i$ est de Cauchy.

THÉORÈME 6. - Si E est une algèbre topologique involutive localement multiplicative complète, alors E est limite inductive bornologique d'algèbres topologi-

<u>ques métrisables involutives localement multiplicatives et complètes.</u>

<u>Démonstration.</u> - La démonstration de ce théorème se fait à partir du théorème 5 comme cela a été fait pour le théorème 3 à partir du théorème 1.

COROLLAIRE 7. - <u>Si</u> E <u>est une algèbre topologique involutive localement multiplicative complète et unitaire, alors toute forme positive sur</u> E <u>est bornée.</u>

<u>Démonstration.</u> - D'après le théorème 6, il suffit de démontrer le corollaire pour une algèbre topologique involutive métrisable complète unitaire, or ce résultat est obtenu dans [5] ou [11]. Il a été également obtenu dans [13], mais uniquement pour le cas localement convexe.

3. Théorèmes de structures des algèbres bornologiques.

Maintenant nous nous proposons de présenter quelques résultats duaux des théorèmes 1, 3, 5 et 6, présentés dans le paragraphe 2. Cela nous permettra entre autres choses de résoudre un problème de structure posé dans [2].

Dans la suite, on va considérer une catégorie d'algèbres duale de celle des algèbres l. m. c. Il s'agira d'algèbres qui sont limites inductives d'algèbres normées. Le problème consistera à décrire ces algèbres à l'aide d'algèbres particulières de la même catégorie à savoir celles qui sont limites inductives d'une famille dénombrable d'algèbres normées.

Soit E une algèbre bornologique convexe. On appelle topologie canonique associée à la bornologie de E , et on note TE , la topologie localement convexe la plus fine rendant bornées les parties bornées de E . Cette topologie s'obtient de la façon suivante : soit $(B_i)_{i\in I}$ une base de la bornologie de E formée de disques ; pour chaque $i \in I$, soit E_i le sous-espace engendré par B_i :

$$E_i = \bigcup_{\lambda>0} \lambda B_i \text{ .}$$

Sur E_i on considère la semi-norme p_i jauge de B_i . Alors la famille des espaces semi-normés $(E_i , p_i)_{i\in I}$ est un système inductif (on ordonne I à l'aide de la relation $i \leqslant j$ si, et seulement si, $B_i \subset B_j$), et la topologie TE est la limite inductive localement convexe de ce système. Un disque V est un voisinage de 0 si, et seulement si, il est bornivore.

THÉORÈME 8. - <u>Si</u> E <u>est une algèbre bornologique multiplicativement convexe, et si</u> $\mathcal{T}$ <u>est la topologie canonique</u> TE <u>associée à la bornologie de</u> E , <u>alors</u> $\mathcal{T}$ <u>est limite projective de topologies</u> $\mathcal{T}_i$ <u>sur</u> E <u>associées canoniquement à des bornologies multiplicativement convexes dénombrables.</u>

THÉORÈME 9. - <u>Soit</u> E <u>une algèbre topologique localement convexe dont la topologie est limite inductive localement convexe d'algèbres normées. Alors</u> E <u>est limite projective d'algèbres qui sont limites inductives localement convexes d'une</u>

famille dénombrable d'algèbres normées.

Démonstration. - La démonstration des deux théorèmes est la même. Montrons le premier théorème. Soit $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de la famille des bornés de E, stable par réunion finie. Soit V un voisinage de 0 pour TE. Alors, pour tout entier n, soient $\Lambda_n(V) = \{\lambda \in \Lambda ; B_\lambda \subset nV\}$, et $B_n(V)$ la réunion des B_λ de $\Lambda_n(V)$.

Munissons E de la bornologie convexe engendrée par la famille des $B_n(V)$. Soit $\mathcal{B}(V)$ cette bornologie. L'application $(E , \mathcal{B}) \longrightarrow (E , \mathcal{B}(V))$ est bornée ($\mathcal{B}$ désigne la bornologie $(B_\lambda)_\lambda$).

Soit $\mathcal{T}(V)$ la topologie canonique $T(E , \mathcal{B}(V))$ associée à l'algèbre bornologique $(E , \mathcal{B}(V))$. V absorbe tous les bornés B_n de $\mathcal{B}(V)$: pour tout λ de Λ_n, on a $B_\lambda \subset nV$, donc $B_n = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_n} B_\lambda \subset nV$. C'est donc un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}(V)$.

Soient maintenant V_i et V_j deux voisinages de 0. Il est clair que si $V_i \subset V_j$ on a

$$\Lambda_n(V_i) \subset \Lambda_n(V_j) \text{ , donc } B_n(V_i) \subset B_n(V_j) .$$

Par suite tout borné de $\mathcal{B}(V_i)$ est un borné de $\mathcal{B}(V_j)$. Donc si $(V_i)_{i\in I}$ est un système fondamental de voisinages de 0 de la topologie TE, et si on ordonne I à l'aide de la relation :

$$i \leqslant j \text{ si, et seulement si, } V_j \subset V_i ,$$

alors on obtient un système projectif $(E , \mathcal{T}_i)$ où $\mathcal{T}_i$ est la topologie $\mathcal{T}(V_i)$ associée à l'algèbre bornologique $(E , \mathcal{B}(V_i))$. Il est clair également que la topologie TE est limite projective des topologies $\mathcal{T}_i$. De plus, la bornologie $\mathcal{B}(V_i)$ est multiplicative : en effet, $\mathcal{B}(V_i)$ est formée par les enveloppes convexes de parties multiplicatives B_n (vu le choix de la base de bornologie), donc elles-mêmes multiplicatives.

Nous allons maintenant voir comment le théorème de structure précédent permet de résoudre un problème posé dans [2].

Décrivons d'abord ce problème : dans [2] et [18], il s'agit d'étudier les algèbres topologiques limites inductives d'algèbres normées. La différence entre les deux articles est que, dans le premier, on considère des limites inductives dans la catégorie des algèbres localement multiplicativement convexes alors que, dans le second, on prend des limites inductives uniquement localement convexes. Dans [2], l'auteur pose le problème général de savoir dans quelle mesure ce n'est pas la même chose, autrement dit est-ce qu'une topologie limite inductive localement convexe d'algèbres normées n'est pas forcément multiplicativement convexe. Dans [2], le problème reçoit une réponse positive dans le cas particulier de limites inductives dénombrables. Nous montrons ici que c'est toujours le cas.

THÉORÈME 10. - Toute algèbre topologique commutative limite inductive localement convexe d'algèbres normées est localement multiplicativement convexe.

Démonstration. - La proposition 12 de [2] montre que notre théorème est vrai pour une algèbre topologique limite inductive d'une famille dénombrable d'algèbre normée. Donc le résultat découle du théorème 9, vu qu'une limite projective topologique d'algèbres localement multiplicativement convexes est elle-même localement multiplicativement convexe.

Une autre façon (forme bornologique) d'énoncer le théorème 10 est la suivante.

THÉORÈME 10 bis. - Si E est une algèbre bornologique multiplicativement convexe (a. b. m. c.), alors la topologie canonique TE associée à la bornologie de E est l. m. c.

Maintenant on se propose de démontrer un théorème analogue aux théorèmes 8 et 9 pour les algèbres localement convexes générales.

THÉORÈME 11. - Si E est une algèbre bornologique convexe, et si $\mathcal{T}$ désigne la topologie canonique TE associée à la bornologie de E, alors $\mathcal{T}$ est limite projective des topologies $\mathcal{T}_i$ sur E associées canoniquement à des bornologies convexes à base dénombrable.

THÉORÈME 12. - Soit E une algèbre topologique localement convexe, dont la topologie est bornologique. Alors E est topologiquement limite projective d'algèbres bornologiques convexes à base dénombrable.

Démonstration. - Les deux énoncés étant équivalents, démontrons le premier. Soit $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de la bornologie de E. Soit V un voisinage de 0 disqué pour $\mathcal{T}$. Pour tout $n > 0$, soit

$$\Lambda_n = \{\lambda \in \Lambda \ ; \ B_\lambda \subset nV\} .$$

Si $p \leq q$, on a $\Lambda_p \subset \Lambda_q$ et, de plus, on a $\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n$. Pour tout $n > 0$, posons $B_n = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_n} B_\lambda$. C'est une suite croissante de parties de E. On vérifie facilement que cette suite $(B_n)_n$ définit une bornologie vectorielle à base dénombrable. Soit $\mathcal{B}(V)$ la bornologie convexe engendrée par cette bornologie vectorielle. Elle est à base dénombrable. De plus, il est clair que, pour tout n, on a $B_n \subset nV$. Donc V est un voisinage de 0 pour la topologie canonique $\mathcal{T}(V)$ associée à la bornologie convexe $\mathcal{B}(V)$. De plus, la bornologie $\mathcal{B}(V)$ est moins fine que la bornologie initiale de E.

Soient U et V deux voisinages de 0 pour $\mathcal{T}$, disqués. Alors on a $\mathcal{B}(U)\subset\mathcal{B}(V)$ et l'application identique

$$(E \ , \ \mathcal{T}(U)) \longrightarrow (E \ , \ \mathcal{T}(V))$$

est donc continue. Si donc $(V_i)_{i\in I}$ désigne un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathcal{T}$ disqués, et si on ordonne I convenablement, on obtient un système projectif $(E, \mathcal{T}(V_i))_{i \in I}$ dont la limite projective topologique est $(E, \mathcal{T})$.

4. Théorèmes de structures de certains espaces vectoriels topologiques ordonnés.

Maintenant on se propose de montrer l'efficacité de la technique de passage du cas général au cas métrisable dans une situation différente de ce qui précède : en effet, nous allons considérer des espaces vectoriels topologiques ordonnés et de façon plus particulière des espaces localement convexes réticulés localement solides.

Rappelons qu'un espace localement convexe ordonné est dit localement solide s'il possède un système fondamental de voisinages de 0 solides. Cela est équivalent à dire que la topologie de E est définie par une famille de semi-normes solides $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ (c'est-à-dire, vérifiant :

$$|x| \leqslant |y| \Longrightarrow p_\lambda(x) \leqslant p_\lambda(y)).$$

THÉORÈME 13. - Tout espace topologique localement convexe et localement solide complet est limite inductive bornologique d'espaces localement convexes de Fréchet localement solides.

Démonstration. - Soit $(p_\lambda)_\lambda$ une famille de semi-normes solides définissant la topologie de E. Nous allons montrer que $E = \bigcup_i E_i$, où $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces de Fréchet localement solides et tel qu'une partie B de E est bornée si, et seulement si, il existe $i \in I$ tel que B soit contenu dans E_i et borné dans E_i.

Soit B une partie bornée de E. Pour tout entier n, soit

$$\Lambda_n = \{\lambda \in \Lambda ; \ p_\lambda(B) < n\}$$

et

$$q_n(x) = \sup\{p_\lambda(x) ; \ \lambda \in \Lambda_n\} .$$

Soit

$$E_B = \{x \in E ; \ q_n(x) < \infty , \quad \forall n\} .$$

Sur E_B, on considère la topologie métrisable définie par la famille des semi-normes $(q_n)_n$. Comme dans le théorème 1, on montre que si E est complet il en est de même de E_B. De plus, ici, les semi-normes q_n sont solides ; en effet,

$$|y| \leqslant |x| \Longrightarrow p_\lambda(y) \leqslant p_\lambda(x) \quad \text{pour tout } \lambda ;$$

donc

$$\sup\{p_\lambda(y) ; \ \lambda \in \Lambda_n\} \leqslant \sup\{p_\lambda(x) ; \ \lambda \in \Lambda_n\}$$

c'est-à-dire $q_n(y) \leqslant q_n(x)$, $\forall n$.

L'espace E_B, en tant que sous-espace de E, est coréticulé : si $x \in E_B$, il en est de même de $|x|$, car $q_n(x) = q_n(|x|)$. Donc E_B , muni de l'ordre induit, est un e. l. c. de Fréchet localement solide. Et, de la même façon que dans le théorème 1, on montre que E est bornologiquement limite inductive des espaces E_B quand B décrit une base de la bornologie de E .

Le théorème précédent nous permet d'obtenir comme conséquence un résultat du type du théorème de Klee [12].

COROLLAIRE 14. - Toute forme linéaire positive sur un espace localement convexe localement solide complet est bornée.

Démonstration. - Elle découle du théorème précédent vu que le théorème est vrai pour un espace métrisable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKKAR (M.). - Sur la structure des algèbres topologiques l. m. c., C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 941-944.

[2] AROSIO (A.). - Locally convex inductive limits of normed algebras, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, t. 51, 1974, p. 1-27.

[3] BOURBAKI (N.). - Théories spectrales. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. et ind., 1332 ; Bourbaki, 32).

[4] CRAW (I. G.). - A condition equivalent to the continuity of characters on a Fréchet algebra, Proc. London math. Soc., t. 22, 1971, p. 452-464.

[5] DIXON (P. G.). - Generalized B^*-algebras, Thesis, Clare College, Cambridge, 1970.

[6] DIXON (P. G.), FREMLIN (D. H.). - A remark concerning multiplicative functionals on l. m. c. algebras, J. London math. Soc., t. 5, 1972, p. 231-232.

[7] HOGBE-NLEND (H.). - Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques, Bol. Soc. Brasil. Mat., t. 3, 1972, p. 19-56.

[8] HOGBE-NLEND (H.). - Théorie des bornologies et applications. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 213).

[9] HOUZEL (C.). - Séminaire Banach. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, 277).

[10] MICHAEL (E. A.). - Locally multiplicatively convex topological algebras. - Providence, American mathematical Society, 1952 (Memoirs of the American mathematical Society, 11).

[11] NG (S. B.), WARNER (S.). - Continuity of positive and multiplicative functionals, Duke Math. J., t. 39, 1972, p. 271-284.

[12] SCHAEFE (H.). - Topological vector spaces. - New York, The Macmillan Company, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).

[13] TAO-SHING SHAH (XIA, DAO-XING) [SJA DO-ŠIN]. - On semi-normed rings with an involution [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 23, 1959, p. 509-528.

[14] TURPIN (P.). - Une remarque sur les algèbres à inverse continu, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 1686-1689.

[15] TURPIN (P.). - Convexités dans les espaces vectoriels topologiques, Thèse Sc. math. Orsay, 1974.

[16] TURPIN (P.). - Sur une classe d'algèbres topologiques généralisant les algèbres localement bornées, Thèse 3e cycle, Grenoble, 1966.

[17] WAELBROECK (L.). - Topological vector spaces and algebras. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 230).

[18] WARNER (S.). - Inductive limit of normed algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 190-216.

[19] ZELAZKO (W.). - Selected topics in topological algebras. - Aarhus, Aarhus Universitet, Matematisk Institut, 1971 (Lecture Notes Series, 31).

(Texte reçu le 11 juillet 1975)

Mohamed AKKAR
Université Mohamed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques
RABAT (Maroc)