Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michel Talagrand

Convolution de mesures portées par une surface convexe

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 16, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A11_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 16, 13 p.
13 mars 1975

CONVOLUTION DE MESURES PORTÉES PAR UNE SURFACE CONVEXE

par Michel TALAGRAND

0. Introduction.

Dans sa thèse [1], P. ARTZNER étudie le problème suivant : étant données trois probabilités π , π' , π'' , vérifiant $\pi * \pi = \pi' * \pi''$, et portées par une surface convexe S , peut-on affirmer que $\pi = \pi' = \pi''$? Il y apporte une réponse affirmative en supposant, d'une part que S est "suffisamment" convexe (en un sens bien précis), et d'autre part une assez grande régularité (absolue continuité) des mesures. Nous nous proposons d'établir le même résultat, sans hypothèses de régularité sur π , π' , π'' , et même en supposant seulement π' et π'' portées par l'enveloppe convexe de S .

1. Convolution de mesures portées par des graphes de fonctions convexes.

Etant donnée une application f d'un ouvert Ω de $\underset{\sim}{R}^{p-1}$ dans $\underset{\sim}{R}$ (p entier $\geqslant 2$), nous noterons $\overline{f}$ l'application $x \longrightarrow (x , f(x))$ de Ω dans $\underset{\sim}{R}^p$; l'espace $\underset{\sim}{R}^p$ sera identifié avec $\underset{\sim}{R}^{p-1} \times \underset{\sim}{R}$, et la projection $\underset{\sim}{R}^p \longrightarrow \underset{\sim}{R}^{p-1}$ sera notée θ . Nous appellerons <u>graphe</u> de f l'ensemble $\overline{f}(\Omega)$, et <u>surgraphe</u> de f l'ensemble des couples (x , t) de $\underset{\sim}{R}^p$, où $x \in \Omega$, $t \in \underset{\sim}{R}$, $t \geqslant f(x)$. L'espace $\underset{\sim}{R}^p$ sera muni de la norme "sup" et la boule de centre a et de rayon ρ sera notée $B(a , \rho)$.

Soit q un entier > 0 , et soit $x = (x_i)$ un point de $\underset{\sim}{R}^q$. Définissons

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^{q} [[2^n x_i]/2^n , ([2^n x_i] + 1)/2^n[,$$

où $[u]$ désigne la partie entière du réel u . Si deux ensembles $\omega_n(x)$ et $\omega_{n'}(x)$ ne sont pas disjoints, l'un contient l'autre. Tout ouvert O de $\underset{\sim}{R}^q$ est réunion disjointe d'ensembles $\omega_n(x)$. En effet, si n_x est le plus grand entier k tel que $\omega_k(x) \subset O$ (où $x \in O$), on a $O = \bigcup_{x \in O} \omega_{n_x}(x)$, et il suffit de réindexer les $\omega_{n_x}(x)$ de façon à ne compter chacun d'eux qu'une seule fois pour obtenir le résultat désiré. Nous allons utiliser ceci avec $q = p - 1$, puis, à la fin de la preuve du lemme 6, avec $q = 2(p - 1)$. Remarquons dès à présent que, dans ce dernier cas, si O est invariant par la symétrie $(x , y) \longrightarrow (y , x)$ (où $x , y \in \underset{\sim}{R}^{p-1}$), il en est de même de la partition obtenue.

Ces notations étant fixées, soient Ω un ouvert convexe de $\underset{\sim}{R}^{p-1}$, et f une fonction numérique différentiable, définie dans Ω , et vérifiant la condition :

$\forall x \in \Omega$, $\exists \eta , \ell , L > 0$ tels que

(o) $$(\|x-a\| \leqslant \eta) \Longrightarrow (\ell\|x-a\|^2 \leqslant f(x)-f(a)-Df_a(x-a) \leqslant L\|x-a\|^2)$$

(ce qui est le cas, par exemple, dès que f admet en tout point une hessienne non dégénérée).

Il est immédiat de voir que f est convexe. On sait alors qu'elle est C_1 puisqu'elle est différentiable [2]. Soit k un entier > 0, et soit

(1) $$F_k = \{x \in \Omega \; ; \; d(x, C\Omega) \geq 2^{-k+1} \text{ et } \|h\| \leq 2^{-k} \Longrightarrow 2^{-k}\|h\|^2 \leq f(x+h)-f(x)-Df_x(h) \leq 2^k\|h\|^2\} .$$

F_k est fermé, et la réunion des F_k est Ω, d'après (0).

Soient μ, μ', μ'' trois mesures positives, μ étant portée par le graphe de f, μ' et μ'' par son surgraphe.

Désignant par $\mu|_A$ la restriction de la mesure à l'ensemble A, définissons :

$$\alpha' = \mu'|_{\overline{f}(\Omega)} , \quad \beta' = \mu' - \alpha' \; ; \quad \alpha'' = \mu''|_{\overline{f}(\Omega)} , \quad \beta'' = \mu'' - \alpha''$$

$$\nu = \theta(\mu) , \quad \nu' = \theta(\alpha') , \quad \nu'' = \theta(\alpha'')$$

(Rappelons que θ désigne la projection canonique de $\underset{\sim}{R}^p$ sur $\underset{\sim}{R}^{p-1}$).

Avec ces notations nous avons le résultat suivant :

LEMME 1. - <u>Supposons que</u> $\mu * \mu = \mu' * \mu''$ <u>au voisinage de</u> $2\overline{f}(\Omega)$ (<u>où</u> $2\overline{f}(\Omega) = \{2x \; ; \; x \in \overline{f}(\Omega)\}$).

<u>Alors il existe des constantes</u> M_k <u>telles que, pour tout borélien</u> B <u>contenu dans</u> F_k , <u>on ait</u>

(2) $$\nu^2(B) \leq M_k \, \nu'(B) \, \nu''(B) .$$

<u>Démonstration</u>. - Fixons $k > 0$. Définissons

$$S_n = \{(x, t) \; ; \; x \in \Omega , \; t \leq f(x) + 2^{-2n+k+1}\}$$

et

(3) $$\beta'_n = \theta(\beta'|_{S_n}) \; ; \quad \beta''_n = \theta(\beta''|_{S_n}) .$$

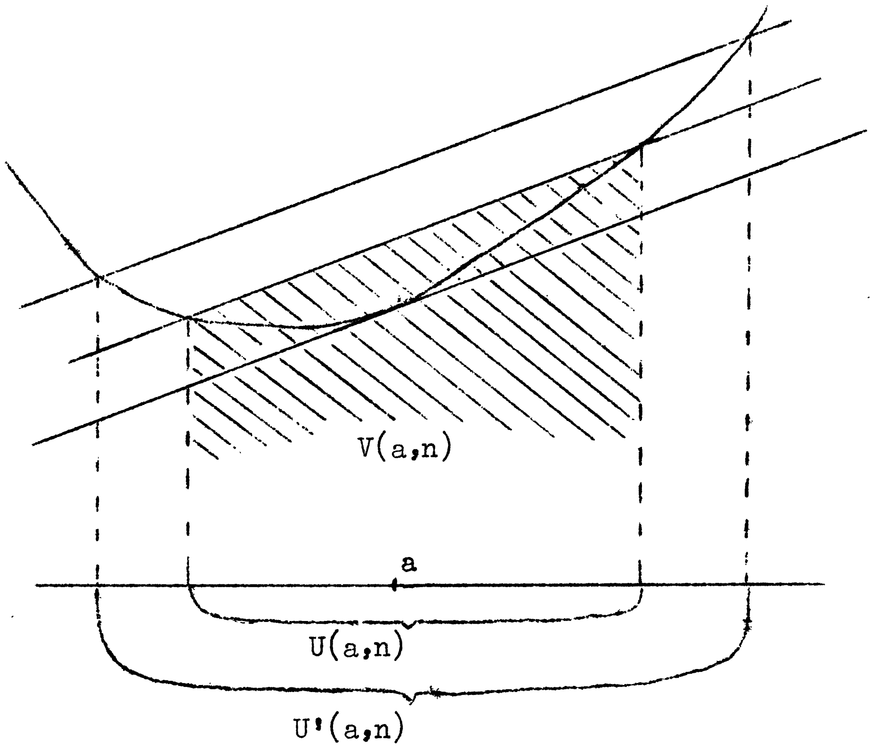
Posons, pour a Ω et $n > 0$,

(4) $$U_{(a,n)} = \{x \in \Omega \; ; \; f(x) \leq f(a)+Df_a(x-a)+2^{-2n+k}\}$$

(5) $$U'_{(a,n)} = \{x \in \Omega \; ; \; f(x) \leq f(a)+Df_a(x-a)+2^{-2n+k+1}\}$$

(6) $$V_{(a,n)} = \{(x,t) \in \underset{\sim}{R}^p \; ; \; x \in U_{(a,n)} \text{ et } t \leq f(a)+Df_a(x-a)+2^{-2n+k}\} .$$

$p = 1$:



Pour établir (2), on peut se borner au cas où B est compact. Soit 0 un voisinage, relativement compact dans Ω, de B. L'ensemble $2\overline{f(0)}$ est compact, et contenu dans un voisinage $0'$ de S où $\mu * \mu$ et $\mu' * \mu''$ coïncident. Il existe donc n_1 tel que

(7) $$(x \in 0 \ , \ t \leqslant f(x) + 2^{-2n_1+k}) \Longrightarrow ((2x \ , \ 2t) \in 0') \ .$$

D'après la compacité de B, il existe $n_2 \geqslant \sup(n_1, 2k+1)$ tel que

(8) $$(a \in B) \Longrightarrow (B(a \ , \ 2^{-n_2+k+1}) \subset 0) \ .$$

Soit n un entier fixe, $n \geqslant n_2$. Si a est dans B, nous avons, d'après (1) :

$$\omega_n(a) \subset B(a \ , \ 2^{-n}) \subset U(a \ , \ n) \ .$$

D'autre part, il est aisé de vérifier que la convexité de f et (1) impliquent, pour x dans Ω,

$$(\|x - a\| \geqslant 2^{-k}) \Longrightarrow (f(x) - f(a) - Df_a(x - a) \geqslant 2^{-3k}) \ .$$

Si x est dans $U'(n \ , \ a)$, on a aussi :

$$2^{-3k} \leqslant 2^{-2n+k+1} \ , \text{ donc } \ 2^{-4k} \leqslant 2^{-2n+1} \ ,$$

ce qui contredit $n \geqslant 2k + 1$. Il s'ensuit que $x \notin U'(n \ , \ a)$, ce qui montre que

$$U'(n \ , \ a) \subset B(a \ , \ 2^{-k}) \ .$$

Si x est dans $U'(n \ , \ a)$, d'après (1) et (5), nous aurons alors :

$$2^{-k}\|x - a\|^2 \leqslant 2^{k+1-2n} \ ,$$

d'où

$$\|x - a\| \leqslant 2^{-n+k+1} ,$$

ce qui montre que

(9) $$U'(n , a) \subset B(a , 2^{-n+k+1}) .$$

B se recouvre par une famille d'ensembles $\omega_n(a)$ disjoints (où n est toujours fixe). Soit $B = \bigcup_{i\in I} \omega_n(a_i)$ (où $a_i \in B$). Posons, pour alléger les notations,

$$U_i = U(a_i , n) \ ; \ U_i' = U'(a_i , n) \ ; \ V_i = V(a_i , n) .$$

Si x et y sont deux points de U_i , $\overline{f}(x) + \overline{f}(y)$ est dans $2V_i$. On a donc :

(10) $$\nu^2(\omega_n(a_i)) \leqslant \nu(U_i)^2 \leqslant \mu * \mu(2V_i) .$$

D'après (8) et (9), U_i' est inclus dans 0 . Si $(x , t) \in V_i$, alors

$$t \leqslant f(x) + 2^{-2n+k} .$$

D'après (7), il s'ensuit donc que $2V_i \subset 0'$, donc que $\mu * \mu(2V_i) = \mu' * \mu''(2V_i)$.

Si deux points (x , t) et (x' , t') du surgraphe de f ont leur milieu dans V_i , il est aisé de voir qu'ils sont tous deux dans V_i' , où

$$V_i' = \{(x , t) \ ; \ x \in U_i' , \ t \leqslant f(x) + 2^{-2n+k+1}\} .$$

Ainsi

$$\mu' * \mu''(2V) \leqslant \mu'(V_i') \, \mu''(V_i') \leqslant (\nu'(U_i') + \beta_n'(U_i'))(\nu''(U_i') + \beta_n''(U_i'))$$

ce qui, conjugué avec (10), donne :

$$\nu(\omega_n(a_i)) \leqslant [(\nu' + \beta_n')(U_i')(\nu'' + \beta_n'')(U_i')]^{\frac{1}{2}} ;$$

d'où

(11) $$\nu(B) \leqslant \sum_{i\in I} \nu(\omega_n(a_i)) \leqslant [(\sum_{i\in I}(\nu' + \beta_n')(U_i'))(\sum_{i\in I}(\nu'' + \beta_n'')(U_i'))]^{\frac{1}{2}}$$

d'après l'inégalité de Schwartz.

Soit $N_k = [2 \times 2^{k+1} + 1]^{p-1}$. Nous allons montrer qu'aucun point de Ω n'est contenu dans plus de N_k ensembles U_i' . On sait déjà que $U_i \subset B(b_i , 2^{-n+k+1})$. Si $x \in B(b_i , 2^{-n+k+1})$, alors $b_i \in B(x , 2^{-n+k+1})$. Il suffit donc de remarquer que cette dernière boule rencontre au plus N_k ensembles $\omega_n(a)$, fait dont la preuve aisée est laissée au lecteur.

Pour toute mesure positive λ , on a donc :

$$\sum_{i\in I} \lambda(U_i') \leqslant N_k \, \lambda(\bigcup_{i\in I} U_i') ,$$

puisque la somme des fonctions indicatrices des U_i' est majorée par N_k fois la fonction indicatrice de $\bigcup_{i\in I} U_i'$. Si l'on pose $N_k^2 = M_k$, (11) implique, puisque $\bigcup_{i\in I} U_i' \subset 0$,

$$\nu^2(B) \leqslant M_k[\nu'(0) + \beta_n'(0)][\nu''(0) + \beta_n''(0)] .$$

Ceci est vrai pour tout $n \geq n_2$. Or

$$\lim_{n\to\infty} \beta'_n(0) = \lim_{n\to\infty} \beta''_n(0) = 0 .$$

D'où

$$\nu^2(B) \leq M_k\ \nu'(0)\ \nu''(0) .$$

Comme 0 est un voisinage quelconque de B, la preuve du lemme 1 est terminée.

COROLLAIRE 2. - ν <u>est absolument continue par rapport à</u> ν' et à ν''.

<u>Démonstration</u>. - Si $\nu'(A) = 0$, alors, pour tout k, $\nu(A_n \cap F_k) = 0$. Comme $A = \bigcup_k A_n \cap F_k$, on a encore $\nu(A) = 0$.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant établir, ce qui est le point essentiel, que l'on peut prendre $M_k = 1$, quel que soit k. La démonstration comporte plusieurs étapes. Nous aurons besoin du lemme suivant, qui possède d'ailleurs un intérêt en soi.

LEMME 3. - <u>Soit</u> λ <u>une mesure positive sur</u> $\underset{\sim}{R}^q$, <u>telle que tout compact soit de mesure finie</u>. <u>Soient</u> σ <u>un entier positif</u>, <u>et</u> $\tau = (2\sigma + 1)^q$. <u>L'ensemble des points</u> a <u>de</u> $\underset{\sim}{R}^q$, <u>tels que</u>

$$\exists\ n_0\ ;\ n \geq n_0 \Longrightarrow (1 + \tau)\lambda(\omega_n(a)) \leq \lambda(B(a\ ,\ \sigma 2^{-n})) ,$$

<u>est de mesure nulle pour</u> λ.

<u>Démonstration</u>. - On peut se borner au cas où n_0, est indépendant de a. Soit A l'ensemble des a vérifiant la condition de l'énoncé. Montrons d'abord qu'il est borélien. Pour ceci, il suffit d'établir que, pour chaque n, la fonction

$$a \dashrightarrow \lambda(B(a\ ,\ \sigma 2^{-n})) - (1 + \tau)\lambda(\omega_n(a))$$

est borélienne. Or $\lambda(\omega_n(a))$ est constante sur chaque $\omega_n(a)$, donc borélienne. Ecrivons $\lambda = \lambda_d + \lambda_a$, où λ_d est diffuse, et λ_a atomique. La fonction

$$a \dashrightarrow \lambda_d(B(a\ ,\ \sigma 2^{-n}))$$

est continue donc borélienne. La fonction $a \dashrightarrow \lambda_a(B(a\ ,\ \sigma 2^{-n}))$ est somme d'une série de fonctions boréliennes (correspondant à chacun des atomes), donc encore borélienne. Nous pouvons ainsi nous borner à établir que A est de mesure intérieure nulle. Soient K un compact contenu dans A, et 0 un ouvert contenant K. Soit $n \geq n_0$ tel que

$$a \in K \Longrightarrow B(a\ ,\ \sigma 2^{-n}) \subset 0 .$$

K se recouvre par une famille d'ensembles $\omega_n(a_i)$ $(i \in I)$ disjoints et tels que

$$(1 + \tau)\lambda(\omega_n(a_i)) \leq \lambda(B(a_i\ ,\ \sigma 2^{-n})) ,$$

d'où il vient

$$(1+\tau)\lambda(K) \leqslant \sum_{i\in I} \lambda(B(a_i , \sigma 2^{-n})) .$$

Comme nous l'avons déjà remarqué lors de la preuve du lemme 1, tout point de $\underset{\sim}{R}^q$ est dans au plus τ boules $B(a_i , \sigma 2^{-n})$. Il s'ensuit que

$$(1+\tau)\lambda(K) \leqslant \tau\lambda(\cup_{i\in I} B(a_i , \sigma 2^{-n})) \leqslant \tau\lambda(0) ,$$

d'où $\lambda(K) \leqslant (\tau/(1+\tau))\, \lambda(0)$.

Si $\lambda(K) > 0$, on peut choisir 0 de sorte que $\lambda(0) < ((\tau+1)/\tau)\, \lambda(K)$, ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

Il est naturel de se demander si l'ensemble des a , tels que

$$\forall\, n_0 > 0 , \quad \exists\, n \geqslant n_0 : \quad (1+\tau)\lambda(\omega_n(a)) \leqslant \lambda(B(a , \sigma 2^{-n})) ,$$

est aussi de λ-mesure nulle. Il n'en est rien, comme le prouve l'exemple suivant, dû à J. SAINT-RAYMOND. On prend $q = 1$, $\sigma = 10$, et pour λ la mesure image, par l'application

$$(x_p)_{p\in \underset{\sim}{N}} \longrightarrow \sum_{p\in \underset{\sim}{N}} \frac{x_p}{3^p} \quad \text{de} \quad \{0 , 1\}^{\underset{\sim}{N}} \quad \text{dans} \quad \underset{\sim}{R} ,$$

de la mesure produit des mesures $(1/p)\delta_0 + ((p-1)/p)\delta_1$ où δ_0 et δ_1 désignent les mesures de Dirac en 0 et 1 respectivement. Les détails sont laissés au lecteur.

Fixons $k > 0$. Soit γ le plus petit réel positif tel que l'on ait

$$\nu^2(B) \leqslant \gamma^2\, \nu'(B)\, \nu''(B)$$

pour tout borélien B de F_k . Si $\nu(F_k) = 0$, alors $\gamma \leqslant 1$. Supposons donc $\nu(F_k) > 0$. Nous désirons prouver que supposer $\gamma > 1$ conduit à une contradiction, et nous ferons cette hypothèse dans la suite de ce paragraphe. Soit γ' un réel tel que $1 < \gamma' < \gamma$. Soit un réel $0 < \varepsilon < 1/2$. Par hypothèse, il existe un compact K de F_k tel que $\nu(K) > \gamma^2(1-\varepsilon/2)^2\, \nu'(K)\, \nu''(K)$. Soit $0'$ un voisinage relativement compact de K . Comme dans la preuve du lemme 1, on voit qu'il existe m_1 tel que, pour $n \geqslant m_1$ et a dans $0'$, $\mu * \mu$ et $\mu' * \mu''$ coïndicent sur $2V(a , n)$.

D'autre part, puisque ν est absolument continue par rapport à ν' et ν'' , il existe $\zeta > 0$ tel que :

$$\nu'(B) < \zeta \Longrightarrow \nu(B) < \frac{1}{10}\, \nu(K)$$

$$\nu''(B) < \zeta \Longrightarrow \nu(B) < \frac{1}{10}\, \nu(K)$$

pour tout borélien B .

Soit $0 < \eta < \zeta$ un réel. Il existe un ouvert 0 , contenant K , contenu dans $0'$ et tel que

$$\nu^2(0) > \gamma^2(1 - \frac{\varepsilon}{2})^2 \ \nu'(0) \ \nu''(0)$$

$$\nu(0) \leqslant (1 + \eta)\nu(K) \ ; \quad \nu'(0) \leqslant (1 + \eta)\nu'(K) \ ; \quad \nu''(0) \leqslant (1 + \eta) \ \nu''(K) \ .$$

Désignons par λ , λ' , λ'' les restrictions à K de ν , ν' , ν'' .

Soit $m_2 \geqslant m_1$ un entier fixe. Posons $s = 1 + (2 \times (3 \times 2^{k+1}) + 1)^{p-1}$. D'après le lemme (3), pour ν presque tout point a de K , il existe un entier $n \geqslant m_2$ tel que

(12) $\lambda(B(a \ , 3 \times 2^{-n+k+1})) \leqslant s\lambda(\omega_n(a))$ avec $B(a \ , 3 \times 2^{-n+k+1}) \subset 0$.

En particulier,

$$(13) \qquad \lambda(B(a \ , 3 \times 2^{-n+k+1})) \leqslant s\lambda(B(a \ , 2^{-n+k+1})) \ .$$

$$(14) \qquad \lambda(B(a \ , 2^{-n+k+1})) \leqslant s\lambda(\omega_n(a)) \ .$$

L'inégalité (13) permet, grâce au raisonnement classique du théorème de Vitali, de recouvrir K , à un ensemble de ν-mesure nulle près, par une réunion disjointe de boules $B_i = B(a_i \ , 2^{-n_i+k+1})$ qui vérifient (14).

Soit enfin r un entier positif. Nous allons prouver qu'il existe un indice i tel que

$$(15) \qquad \lambda(B_i) > 0 \ ; \ \lambda^2(B_i) \geqslant \gamma^2(1 - \varepsilon)^2 \ \lambda'(B_i) \ \lambda''(B_i) \ ,$$

$$(16) \qquad \beta_r'(B_i) \leqslant \frac{1}{\zeta} \ \|\beta_r'\| \ \lambda'(B_i) \ ,$$

$$(17) \qquad \beta_r''(B_i) \leqslant \frac{1}{\zeta} \ \|\beta_r''\| \ \lambda''(B_i) \ ,$$

$$(18) \qquad \nu(B_i) \leqslant (1 + 10\eta)\lambda(B_i) \ ,$$

$$(19) \qquad \nu'(B_i) \leqslant (1 + \eta/\zeta)\lambda'(B_i) \ ,$$

$$(20) \qquad \nu''(B_i) \leqslant (1 + \eta/\zeta)\lambda''(B_i) \ .$$

Pour ce faire, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 4. - <u>Soit</u> C <u>un borélien de</u> F_k <u>tel que</u> $\nu^2(C) \geqslant \gamma^2(1 - \varepsilon')^2 \ \nu'(C) \ \nu''(C)$. <u>Soit</u> E <u>un borélien de</u> C <u>tel que</u> $\nu^2(E) \leqslant \gamma^2(1 - \varepsilon'')^2 \ \nu'(C) \ \nu''(C)$ $(0<\varepsilon'<\varepsilon'')$. <u>Alors on a</u>

$$(21) \qquad \nu'(E) \ \nu''(E) \leqslant (\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''})^2 \ \nu'(C) \ \nu''(C) \ ,$$

<u>et</u>

$$(22) \qquad \nu(E) \leqslant \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \ \nu(B) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Notons $\psi(D) = \gamma \sqrt{\nu'(D) \ \nu''(D)}$ pour D borélien. Si D_1 et D_2 sont disjoints :

$$\psi(D_1) + \psi(D_2) = \gamma[\sqrt{\nu'(D_1) \ \nu'(D_1)} + \sqrt{\nu''(D_2) \ \nu''(D_2)}]$$
$$\leqslant \gamma \sqrt{[\nu'(D_1) + \nu'(D_2)][\nu''(D_1) + \nu''(D_2)]} = \psi(D_1 \cap D_2) \ .$$

Posons $F = C \setminus E$.

$$\nu(C) \leqslant \nu(F)+\nu(E) \leqslant \psi(F)+(1-\varepsilon'')\psi(E) \leqslant (1-\varepsilon')(\psi(F)+\psi(E))+\varepsilon' \psi(F)+(\varepsilon'-\varepsilon'')\psi(E) .$$

D'où

$$\nu(C) \leqslant (1-\varepsilon')\psi(C) + \varepsilon' \psi(F) + (\varepsilon' - \varepsilon'')\psi(E) .$$

Or $\nu(C) \geqslant (1-\varepsilon')\psi(C)$ par hypothèse. D'où :

$$\varepsilon' \psi(F) + (\varepsilon' - \varepsilon'')\psi(E) \geqslant 0 \text{ , puis } \varepsilon'' \psi(E) \leqslant \varepsilon'(\psi(E) + \psi(F)) \leqslant \varepsilon' \psi(C) ,$$

ce qui est la première partie du résultat. On en tire

$$\frac{1}{1-\varepsilon''} \nu(E) \leqslant \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \frac{1}{1-\varepsilon'} \nu(C)$$

ce qui termine tout puisque $\varepsilon' < \varepsilon''$.

La réunion $\mathcal{B}$ des B_i , qui nient (15), est telle que

$$\lambda^2(\mathcal{B}) \leqslant \gamma^2(1-\varepsilon)^2 \lambda'(\mathcal{B}) \lambda''(\mathcal{B}) \text{ , d'après l'inégalité de Schwartz.}$$

D'après le lemme 4, on a donc

$$\nu(\mathcal{B} \cap K) = \lambda(\mathcal{B}) \leqslant \frac{1}{2} \nu(K) .$$

La réunion des B_i , qui nient (16) (resp. (17)), a une mesure pour λ' (resp. λ'') inférieure à ζ , donc une mesure pour $\lambda < (1/10)\nu(K)$.

On voit aisément qu'il en est de même pour la réunion des B_i qui nient (18) (resp. (19), (20)). Ainsi la réunion des B_i qui ne vérifient pas l'une des conditions (15) à (20) a une mesure pour $\lambda < \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 1$. Il existe donc un indice i_0 tel que B_{i_0} vérifie les conditions (15) à (20). Appliquons ce résultat avec $r = m_2$. Pour alléger les notations, posons $n = n_{i_0}$ (qui est donc $\geqslant m_2$) ; $B = B_{i_0}$; $a = a_{i_0}$; $\omega = \omega_{n_{i_0}}(a_{i_0})$; $U = U(a_{i_0}, n_{i_0})$; $U' = U'(a_{i_0}, n_{i_0})$; $V = V(a_{i_0}, n_{i_0})$. On sait que $\omega \subset U \subset U' \subset B$.

Notons φ l'application de $\Omega \times \Omega$ dans $\underset{\sim}{R}^p$: $(x , y) \longrightarrow (\overline{f}(x) + \overline{f}(y))/2$,

$$\mu * \mu(2V) = \nu \otimes \nu(\varphi^{-1}(V)) \geqslant \nu \otimes \nu(\omega \times \omega) = \nu^2(\omega) .$$

$$\mu' * \mu''(2V) = \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) + \alpha' * \beta''(2V) + \alpha'' * \beta'(2V) + \beta' * \beta''(2V) .$$

Comme il a déjà été remarqué lors de la preuve du lemme 1, si deux points (x,t) et (x' , t') du surgraphe de f ont leur somme dans $2V$, on a

$$x , x' \in U' \quad \text{et} \quad t \leqslant f(x) + 2^{-2m_2+k+1} , \quad t' \leqslant f(x') + 2^{-2m_2+k+1} .$$

On a ainsi

$$\mu' * \mu''(2V) \leqslant \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) + \nu'(B)\beta''_{m_2}(B) + \nu''(B) \beta'_{m_2}(B) + \beta'_{m_2}(B) \beta''_{m_2}(B) .$$

D'après (16) et (17),

$$\mu' * \mu''(2V) \leqslant \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) + \frac{1}{\zeta} \nu'(B) \nu''(B)[\|\beta''_{m_2}\| + \|\beta'_{m_2}\| + \frac{1}{\zeta} \|\beta'_{m_2}\|\|\beta'_{m_2}\|] .$$

D'autre part, nous avons

$$\nu'(B) \nu''(B) \leqslant (1 + \frac{\eta}{\zeta})^2 \lambda'(B) \lambda''(B) \leqslant 4\lambda'(B) \lambda''(B)$$

d'après (19) et (20), et puisque $\eta < \zeta$. Ainsi, d'après (15) on a

$$\nu'(B)\ \nu''(B) \leqslant \lambda^2(B) \times \frac{1}{\gamma^2(1-\varepsilon)^2} \times 4 \leqslant \frac{16}{\gamma^2}\lambda^2(B) \quad (\text{rappelons que } \varepsilon < \tfrac{1}{2}).$$

D'après (13), on en déduit que

$$\nu'(B)\ \nu''(B) \leqslant \frac{16s^2}{\gamma^2}\lambda^2(\omega) \leqslant \frac{16s^2}{\gamma^2}\mu * \mu(2V) .$$

Ainsi, puisque $\lim_{m\to\infty}\|\beta''_m\| = \lim_{m\to\infty}\|\beta''_m\| = 0$, si m_2 a été choisi assez grand, l'on aura :

$$\mu' * \mu''(2V) \leqslant \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) + (1 - \frac{1}{\gamma'^2})\ \mu * \mu(2V) .$$

Comme l'on a $\mu' * \mu''(2V) = \mu * \mu(2V)$, ceci implique que

$$\nu \otimes \nu(\varphi^{-1}(V)) = \mu * \mu(2V) < \gamma'^2\ \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) .$$

Nous allons maintenant prouver que, si ε et η sont assez petits, on a

$$\nu \otimes \nu(\varphi^{-1}(V)) \geqslant \gamma'^2\ \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) ,$$

ce qui est la contradiction cherchée.

Commençons par établir un lemme affirmant que λ' et λ'' sont "presque" proportionnelles sur B .

LEMME 5. - <u>Soient</u> $(E_i)_{i\geqslant 1}$ <u>une suite de boréliens disjoints et contenus dans</u> B . <u>Alors on a</u> :

$$\sum_{i\geqslant 1}(\sqrt{\lambda'(E_i)/\lambda'(B)} - \sqrt{\lambda''(E_i)/\lambda''(B)})^2 \leqslant 2\varepsilon .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $E_0 = B \setminus \bigcup_{i\geqslant 1} E_i$

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 0}\left(\sqrt{\frac{\lambda'(E_i)}{\lambda'(B)}} - \sqrt{\frac{\lambda''(E_i)}{\lambda''(B)}}\right)^2 &= 2 - 2\sum_{i\geqslant 0}\sqrt{\lambda'(E_i)\ \lambda''(E_i)}/\sqrt{\lambda'(B)\ \lambda''(B)} \\ &\leqslant 2 - 2\sum_{i\geqslant 0}(1/\gamma)\lambda(E_i)/\sqrt{\lambda'(B)\ \lambda''(B)} \\ &\leqslant 2[1 - \frac{1}{\gamma}\lambda(B)/\sqrt{\lambda'(B)\ \lambda''(B)}] \leqslant 2[1-(1-\varepsilon)] = 2\varepsilon .\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

L'ouvert $\varphi^{-1}(V)$ est <u>symétrique</u> dans $\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^{p-1}$. On peut l'écrire comme une réunion disjointe de produits $\omega_i \times \omega'_i$ $(i \in I)$, où ω_i et ω'_i sont de la forme $\omega_n(a)$ $(n \in \mathbb{N}$, $a \in \Omega)$, et de sorte que le produit $\omega_i \times \omega'_i$ et le produit $\omega'_i \times \omega_i$ apparaissent simultanément (Nous avons remarqué ceci lors des préliminaires). Soit J l'ensemble des i tels que l'on ait

$$(23) \qquad \begin{cases}\lambda^2(\omega'_i) \geqslant \gamma^2(1-\sqrt{\varepsilon})^2\ \lambda'(\omega'_i)\ \lambda''(\omega'_i) \\ \lambda^2(\omega_i) \geqslant \gamma^2(1-\sqrt{\varepsilon})^2\ \lambda'(\omega_i)\ \lambda''(\omega_i)\end{cases}$$

Nous avons

$$(24) \qquad \begin{aligned}\nu \otimes \nu(\varphi^{-1}(V)) &= \sum_{i\in I}\nu(\omega_i)\ \nu(\omega'_i) \geqslant \sum_{i\in J}\lambda(\omega_i)\ \lambda(\omega'_i) \\ &\geqslant \sum_{i\in J}\gamma^2(1-\sqrt{\varepsilon})^2\sqrt{\lambda'(\omega_i)\ \lambda''(\omega_i)\ \lambda'(\omega'_i)\ \lambda''(\omega'_i)}\end{aligned}$$

Pour <u>minorer</u> cette quantité, introduisons les éléments suivants de $\ell^2(J)$

$$X = (\sqrt{\lambda'(\omega_i)\ \lambda''(\omega'_i)})_{i\in J} \qquad Y = (\sqrt{\lambda'(\omega'_i)\ \lambda''(\omega_i)})_{i\in J} .$$

Si $\omega_j \times \omega'_j = \omega'_i \times \omega_i$ (pour chaque i existe un tel j), alors grâce à la symétrie de la condition (23) on voit que $i \in J$ si, et seulement si, $j \in J$. Ainsi :

$$\sum_{i\in J} \lambda'(\omega_i)\ \lambda''(\omega'_i) = \sum_{i\in J} \lambda'(\omega'_i)\ \lambda''(\omega_i)$$

ce qui signifie exactement que $\|X\| = \|Y\|$. On a successivement :

$$(25) \qquad \sum_{i\in J} \sqrt{\lambda'(\omega_i)\ \lambda''(\omega'_i)\ \lambda'(\omega'_i)\ \lambda''(\omega_i)} = (X , Y) = \|X\|^2 - \tfrac{1}{2}(X - Y)^2$$

$$\begin{aligned}(X-Y)^2 &= \sum_{i\in J}(\sqrt{\lambda'(\omega_i)\ \lambda''(\omega'_i)} - \sqrt{\lambda'(\omega'_i)\ \lambda''(\omega_i)})^2 \\ &= \lambda'(B) \sum_{i\in J}[(\sqrt{\frac{\lambda'(\omega_i)}{\lambda'(B)}} - \sqrt{\frac{\lambda''(\omega_i)}{\lambda''(B)}})\ \sqrt{\lambda''(\omega'_i)} - (\sqrt{\frac{\lambda'(\omega'_i)}{\lambda'(B)}} - \sqrt{\frac{\lambda'(\omega'_i)}{\lambda''(B)}})\ \sqrt{\lambda''(\omega_i)}]^2\end{aligned}$$

Or pour tous réels a et b on a $(a - b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$. D'où on a

$$\begin{aligned}(X - Y)^2 &\leqslant 2\lambda'(B) \sum_{i\in J} \lambda''(\omega'_i)(\sqrt{\lambda'(\omega_i)/\lambda'(B)} - \sqrt{\lambda''(\omega_i)/\lambda''(B)})^2 \\ &\quad + 2\lambda'(B) \sum_{i\in J} \lambda''(\omega_i)(\sqrt{\frac{\lambda'(\omega'_i)}{\lambda'(B)}} - \sqrt{\frac{\lambda''(\omega'_i)}{\lambda''(B)}})^2 \\ &\leqslant 4\lambda'(B) \sum_{i\in J} \lambda''(\omega'_i)(\sqrt{\lambda'(\omega_i)/\lambda'(B)} - \sqrt{\lambda''(\omega_i)/\lambda''(B)})^2\end{aligned}$$

puisque les familles $(\omega_i \times \omega'_i)_{i\in J}$ et $(\omega'_i \times \omega_i)_{i\in J}$ coïncident.

Soit L un sous-ensemble fini de J. Il existe un m tel que les ensembles $(\omega_i)_{i\in L}$ soient de la forme $\omega_n(a)$ avec $n \leqslant m$, donc réunion d'un nombre fini d'ensembles disjoints de la forme $\omega_m(a)$. D'autre part la fonction d'ensemble, définie sur les boréliens, qui à A associe $(\sqrt{(\lambda'(A)/\lambda'(B))} - \sqrt{(\lambda''(A)/\lambda''(B))})^2$ est sous-additive sur les boréliens disjoints comme le prouve un calcul direct. Ainsi, pour majorer

$$\sum_{i\in L} \lambda''(\omega'_i)(\sqrt{\frac{\lambda'(\omega_i)}{\lambda'(B)}} - \sqrt{\frac{\lambda''(\omega_i)}{\lambda''(B)}})^2 ,$$

on peut supposer que deux ensembles ω_i sont, soit disjoints, soit identiques (puisqu'il en est ainsi pour les ensembles de la forme $\omega_m(a)$, m fixé). Lorsque i reste tel que ω_i soit fixé, les ω'_i correspondants sont disjoints, puisqu'il en est de même des produits $\omega_i \times \omega'_i$. Ainsi

$$\sum_{i\in L} \lambda''(\omega'_i)(\sqrt{\frac{\lambda'(\omega_i)}{\lambda'(B)}} - \sqrt{\frac{\lambda''(\omega_i)}{\lambda''(B)}})^2 \leqslant \lambda''(B) \sum_{\omega_i}(\sqrt{\frac{\lambda'(\omega_i)}{\lambda''(B)}} - \sqrt{\frac{\lambda''(\omega_i)}{\lambda''(B)}})^2 \leqslant 2\varepsilon\ \lambda''(B)$$

d'après le lemme 5, et puisque l'on peut supposer que deux ensembles ω_i distincts sont disjoints. Comme L est une partie finie quelconque de I, nous obtenons :

$$(26) \qquad (X - Y)^2 \leqslant 4\varepsilon\lambda'(B)\ \lambda''(B) \leqslant 4\varepsilon/\gamma^2(1 - \varepsilon)^2\ \lambda^2(B) \leqslant 16\varepsilon\ \ \lambda^2(B)$$

(puisque $\varepsilon < 1/2$ et $\gamma > 1$).

Nous allons maintenant minorer $\|X\|^2$. Soit E la réunion des ω_i tels que $\lambda^2(\omega_i) \leqslant \gamma^2(1 - \sqrt{\varepsilon})^2\ \lambda'(\omega_i)\ \lambda''(\omega_i)$. L'ensemble E est réunion disjointe de certains de ces ω_i (ceux qui ne sont contenus dans aucun autre). D'où

$$\lambda^2(E) \leqslant \gamma^2(1-\sqrt{\varepsilon})^2\, \lambda'(E)\, \lambda''(E)\ .$$

D'après le lemme 4, on a

$$\lambda'(E)\, \lambda''(E) \leqslant \varepsilon \lambda'(B)\, \lambda''(B)\ , \tag{27}$$

i est dans J sauf si $\omega_i \subset E$, ou si $\omega'_i \subset E$, c'est-à-dire que

$$\bigcup_{i\in J} \omega_i \times \omega'_i \supset \varphi^{-1}(V) \setminus (E \times B \cup B \times E)\ .$$

A fortiori,

$$\begin{aligned} \|X\|^2 = \textstyle\sum_{i\in J} \lambda'(\omega_i)\, \lambda''(\omega'_i) &\geqslant \lambda' \otimes \lambda''(\varphi^{-1}(V)) - \lambda'(E)\, \lambda''(B) - \lambda'(B)\, \lambda''(E) \\ &\geqslant \lambda' \otimes \lambda''(\varphi^{-1}(V)) - \lambda'(B)\, \lambda''(B)\Big[\frac{\lambda'(E)}{\lambda'(B)} + \frac{\lambda''(E)}{\lambda''(B)}\Big]\ . \end{aligned}$$

D'après le lemme 5,

$$\Big(\sqrt{\frac{\lambda'(E)}{\lambda'(B)}} - \sqrt{\frac{\lambda''(E)}{\lambda''(B)}}\Big)^2 \leqslant 2\varepsilon\ ,$$

d'où

$$\frac{\lambda'(E)}{\lambda''(B)} + \frac{\lambda''(E)}{\lambda''(B)} \leqslant 2\varepsilon + 2\sqrt{\frac{\lambda'(E)\ \lambda''(E)}{\lambda'(B)\ \lambda''(B)}} \leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\ ,\ \text{d'après (27).}$$

D'où il vient

$$\|X\|^2 \geqslant \lambda'\otimes\lambda''(\varphi^{-1}(V)) - 4\sqrt{\varepsilon}\ \lambda'(B)\ \lambda''(B) \geqslant \lambda'\otimes\lambda''(\varphi^{-1}(V)) - 16\sqrt{\varepsilon}\ \lambda(B)\ . \tag{28}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \lambda'\otimes\lambda''(\varphi^{-1}(V)) &= \nu'\otimes\nu''(\varphi^{-1}(V)) - (\nu'-\lambda')\otimes\lambda''(\varphi^{-1}(V)) - \lambda'\otimes(\nu''-\lambda'')(\varphi^{-1}(V)) \\ &\qquad - (\nu' - \lambda') \otimes (\nu'' - \lambda'')(\varphi^{-1}(V)) \\ &\geqslant \nu'\otimes\nu''(\varphi^{-1}(V)) - (\nu'-\lambda')(B)\ \lambda''(B) - \lambda'(B)(\nu''-\lambda'')(B) \\ &\qquad - (\nu' - \lambda')(B)(\nu'' - \lambda'')(B) \\ &\geqslant \nu'\otimes\nu''(\varphi^{-1}(V)) - \lambda'(B)\ \lambda''(B)\Big[2\,\frac{\eta}{\zeta} + \frac{\eta^2}{\zeta^2}\Big] \end{aligned}$$

d'après (19) et (20). Et puisque $\eta < \zeta$, on a

$$\begin{aligned} \lambda' \otimes \lambda''(\varphi^{-1}(V)) &\geqslant \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) - \frac{3\eta}{\zeta}\, \lambda'(B)\, \lambda''(B) \\ &\geqslant \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) - \frac{12\eta}{\zeta}\, \lambda^2(B)\ . \end{aligned}$$

Ce résultat, conjugué à (26) et (28), donne enfin

$$\|X\|^2 - \frac{1}{2}\,(X - Y)^2 \geqslant \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) - \lambda^2(B)\Big(24\sqrt{\varepsilon} + \frac{12\eta}{\zeta}\Big)\ .$$

Mais $\lambda^2(B) \leqslant s^2\, \lambda^2(\omega) \leqslant s^2\, \lambda\otimes\lambda(\varphi^{-1}(V)) \leqslant \gamma^2\, s^2\, \lambda'\otimes\lambda''(\varphi^{-1}(V)) \leqslant \gamma^2\, s^2\, \nu'\otimes\nu''(\varphi^{-1}(V))$
(En effet,

$$\begin{aligned} \lambda \otimes \lambda(\varphi^{-1}(V)) &= \textstyle\sum_i \lambda(\omega_i)\ \lambda(\omega'_i) \\ &< \textstyle\sum_i \gamma^2 \sqrt{\lambda'(\omega_i)\ \lambda'(\omega'_i)\ \lambda''(\omega_i)\ \lambda''(\omega'_i)} \\ &< \gamma^2\ \lambda' \otimes \lambda''(\varphi^{-1}(V)) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Schwartz).

On a ainsi

$$\|X\|^2 - \frac{1}{2}(X - Y)^2 \geq \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V))[1 - \gamma^2 s^2(24\sqrt{\varepsilon} + \frac{12\eta}{\zeta})] .$$

Compte tenu de (24) et (25), il vient

$$\nu \otimes \nu(\varphi^{-1}(V)) \geq \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) \times \gamma^2(1 - \sqrt{\varepsilon})^2 [1 - \gamma^2 s^2(24\sqrt{\varepsilon} + \frac{12\eta}{\zeta})] .$$

Si ε et η ont été choisis de sorte que

$$\gamma'^2/\gamma^2 \leq (1 - \sqrt{\varepsilon})^2 [1 - \gamma^2 s^2(24\sqrt{\varepsilon} + \frac{12\eta}{\zeta})]$$

(il faut choisir ε très petit, puis K, ce qui détermine ζ, et choisir ensuite η/ζ très petit. Notons bien que γ, γ' et s, sont indépendants de tous ces choix). On a alors

$$\nu \otimes \nu(\varphi^{-1}(V)) \geq \gamma'^2 \nu' \otimes \nu''(\varphi^{-1}(V)) ,$$

ce qui constitue la contradiction annoncée. Nous avons donc établi que, pour tout borélien B de F_k,

$$\nu^2(B) \leq \nu'(B)\,\nu''(B) .$$

LEMME 6. - *Pour tout borélien* B *de* Ω, *on a*

$$\nu^2(B) \leq \nu'(B)\,\nu''(B) . \tag{28}$$

Démonstration. - $B = \bigcup_k B \cap F_k$. D'où :

$$\nu^2(B) = \sup_k \nu^2(B \cap F_k) \leq \sup_k \nu'(B \cap F_k)\, \nu''(B \cap F_k) = \nu'(B)\,\nu''(B) .$$

C. Q. F. D.

Ce lemme est le point décisif.

3. Le résultat principal.

Rappelons que l'on appelle *surface convexe* de $\underset{\sim}{R}^p$ la frontière (supposée non vide) d'un corps convexe de $\underset{\sim}{R}^p$, et *carte convexe* la donnée d'un triplet (u, Ω, f), où Ω est un ouvert de $\underset{\sim}{R}^{p-1}$, f une fonction convexe de Ω dans $\underset{\sim}{R}$, et u une isométrie de $\underset{\sim}{R}^p$. Le *support* d'une telle carte est l'ensemble $u^{-1}(\overline{f}(\Omega))$. Ceci étant, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 7. - *Soient* S *une surface convexe de* $\underset{\sim}{R}^p$, π, π', π'' *trois probabilités. Supposons vérifiées les conditions suivantes* :

1° *Il existe un ouvert* T *de* S, *portant* π, *possédant un recouvrement par des supports de cartes convexes* $c_i = (u_i, \Omega_i, f_i)$ *telles que, dans* Ω_i, f_i *vérifie la condition* (0) :

(0) $\forall\, \alpha \in \Omega_i$, $\exists\, \eta, \ell, L > 0$,

$$\ell\|x-a\| < \eta \Longrightarrow \ell\|x-a\|^2 \leq f_i(x) - f_i(a) - Df_{i_{(a)}}(x-a) \leq L\|x-a\|^2$$

2° π' *et* π'' *sont portées par l'enveloppe convexe de* S.

<u>Alors, si</u> $\pi * \pi = \pi' * \pi''$ <u>au voisinage de</u> $2T$, <u>on peut affirmer que</u> $\pi=\pi'=\pi''$.

La méthode de [1] (chap. 4) s'applique à quelques modifications de détail près, pour prouver ce résultat moyennant le lemme 6. Nous ne la reproduisons pas

Remarquons que dans [1] chap. 4, la condition (0) est seulement supposée vérifiée presque partout. Le fait que nous l'imposions partout est dans la nature des choses: la fonction définie dans $\underset{\sim}{R}^+ \times \underset{\sim}{R}$ $(x , y) \longrightarrow x^{-1/2} y^2$ ext convexe, possède presque partout une hessienne non dégénérée, mais n'est pas strictement convexe. Le théorème 7 ne s'applique pas aux mesures portées par le graphe de f (Prendre des mesures de Dirac).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTZNER (Philippe). - Sur les formes quadratiques aléatoires et les variables du χ^2 généralisé, Thèse Sc. math. Strasbourg 1971.

[2] BUSEMANN (H.). - Convex surfaces. - New York, Interscience Publishers, 1958 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 6).

(Texte reçu le 20 mai 1975)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, E.R.A. au C.N.R.S. n° 294
Université Pierre et Marie Curie (Paris-VI)
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05