SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

BERNARD MAUREY

Théorèmes de Nikišin

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 10, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 10, 5 p.

17 janvier 1974

THÉORÈMES DE NIKIŠIN

par Bernard MAUREY

Cet exposé reprend pour l'essentiel des résultats de E. M. NIKIŠIN ([1] et [2]).

Soit $(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$ un espace de probabilité. On désignera par $L^0(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions mesurables réelles. Cet espace est muni de la topologie de la convergence en probabilité, dont un système fondamental de voisinages de zéro est défini par les ensembles :

$$V_{\alpha,\varepsilon} = \{f \in L^0 \ ; \ \mu\{|f| > \varepsilon\} \leqslant \alpha\} \ , \quad \varepsilon > 0 \ , \quad \alpha \in \left]0 , 1\right[\ .$$

On notera la jauge de $V_{\alpha,1}$ de la façon suivante :

$$J_\alpha(f , \mu) = J_\alpha(f(\omega) , d\mu(\omega)) = \inf\{c \geqslant 0 \ ; \ \mu\{|f| > c\} \leqslant \alpha\} \ .$$

Par ailleurs, on utilisera les espaces " L^p-faibles" : on notera $\Lambda_p(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables f telles que $\Lambda_p(f , \mu) < \infty$, où l'on a posé :

$$\Lambda_p(f , \mu) = \sup_{c>0} c[\mu\{|f| > c\}]^{1/p} \qquad (p \in \left]0 , \infty\right[) \ .$$

(Cet espace est noté classiquement $L^{p,\infty}(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$.)

On a trivialement, pour tout $\alpha \in \left]0 , 1\right[$:

$$J_\alpha(f , \mu) \leqslant \alpha^{-1/p} \Lambda_p(f , \mu) \leqslant \alpha^{-1/p} \|f\|_{L^p} \ .$$

Les théorèmes de Nikišin concernent les opérateurs linéaires d'un espace de Banach à valeurs dans un espace $L^0(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$. Nous dirons qu'un opérateur linéaire u d'un espace de Banach E dans $L^0(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$ est "presque borné de E dans $\Lambda_p(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$ " si l'on a

$$\forall \ \varepsilon \in \left]0 , 1\right[\ , \quad \exists \ C_\varepsilon \ , \quad \exists \ \Omega_\varepsilon \subset \Omega \ , \quad \mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$$

et

$$\forall \ x \in E \ , \quad \Lambda_p(u(x) \ \chi_{\Omega_\varepsilon} , \mu) \leqslant C_\varepsilon \|x\| \ .$$

La même définition garde un sens si u est simplement un opérateur positivement homogène, c'est-à-dire que :

$$\forall \ x \in E \ , \quad \forall \ \lambda > 0 \ , \quad u(\lambda x) = \lambda \ u(x) \ .$$

THÉORÈME 1. - *Soient E un espace vectoriel normé, $(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$ un espace de probabilité, u un opérateur positivement homogène de E dans $L^0(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$, et $q \in \left]0 , +\infty\right[$. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(a) *L'opérateur u est presque borné de E dans $\Lambda_q(\Omega , \mathcal{C} , \mu)$* .

(b) $\forall \ \alpha \in \left]0 , 1\right[\ , \quad \exists \ R_\alpha \ , \quad \forall \ (x_1 , \ldots , x_n) \in E$:

$$J_\alpha(\sup_{1\leq i\leq n} |u(x_i)| \, , \mu) \leq R_\alpha(\Sigma_{i=1}^n \|x_i\|^q)^{1/q} .$$

<u>Démonstration</u>. - L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est facile, et laissée au lecteur. Inversement, soit $\alpha \in \,]0 \, , 1[$, et soit R_α tel que l'hypothèse de (b) soit réalisée.

Nous dirons qu'une partie $A \in \mathcal{T}$ est un N-ensemble si $\mu(A) > 0$, et si, $\exists\, x \in E$, $\|x\| \leq 1$, et pour μ presque tout $\omega \in A$,

$$(\mu(A))^{1/q} \, |u(x)(\omega)| > R_\alpha .$$

Supposons tout d'abord que B soit un ensemble tel que $B \in \mathcal{T}$, et qu'il n'existe aucun N-ensemble disjoint de B . On a alors :

$$(*) \qquad \forall\, x \in E \, , \quad \Lambda_q(u(x)\, \chi_{B^c} \, , \mu) \leq R_\alpha \|x\|$$

(où B^c désigne le complémentaire de B).

En effet, soit $x \in E$, $\|x\| \leq 1$, et posons :

$$A = \{\omega \notin B \, ; \; |u(x)(\omega)| > c\} \, , \quad c > 0 .$$

Si l'on avait $\mu(A) > (R_\alpha/c)^q$, A serait un N-ensemble disjoint de B , ce que nous avons exclu, et par conséquent (*) est vérifiée.

Nous pouvons voir maintenant l'idée de la démonstration : si l'on peut trouver un N-ensemble "maximal" dans un certain sens, il suffira de prendre pour Ω_α son complémentaire, et de montrer que $\mu(\Omega_\alpha)$ est assez grande.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des familles de N-ensembles deux à deux disjoints, ordonné par l'inclusion des familles de parties. Si $\mathcal{E}$ est vide, on conclut facilement en utilisant (*), appliqué à $B = \emptyset$. Sinon on voit que $\mathcal{E}$ est inductif. Soit (B_i) un élément maximal de $\mathcal{E}$. La famille (B_i) est dénombrable puisque $\mu(B_i) > 0$ pour chaque i et puisque les B_i sont deux à deux disjoints. On peut donc considérer l'ensemble $B = \bigcup B_i \in \mathcal{T}$. Pour chaque indice i , il existe $x_i \in E$, $\|x_i\| \leq 1$, tel que : sur B_i

$$(\mu(B_i))^{1/q} \, |u(x_i)| > R_\alpha ,$$

donc sur B

$$\sup_i \, |u((\mu(B_i))^{1/q} \, x_i)| > R_\alpha .$$

Mais d'après (b) :

$$J_\alpha(\sup_i \, |u((\mu(B_i))^{1/q} \, x_i)| \, , \mu) \leq R_\alpha(\Sigma \, \mu(B_i)\|x_i\|^q)^{1/q} \leq R_\alpha ,$$

ce qui implique $\mu(B) \leq \alpha$. Si nous posons $\Omega_\alpha = B^c$, nous aurons $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq \alpha$, et en vertu de la maximalité de (B_i) , et de (*) :

$$\forall\, x \in E \, , \quad \Lambda_q(u(x)\, \chi_{\Omega_\alpha} \, , \mu) \leq R_\alpha \|x\| ,$$

ce qui montre que u est presque borné de E dans $\Lambda_q(\Omega \, , \mathcal{T} \, , \mu)$.

Nous allons maintenant introduire une classe d'espaces normés E tels que tout opérateur linéaire continu (et plus généralement quasi linéaire) de E dans un espace $L^0(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ vérifie la condition (b) du théorème 1.

On désignera par $(\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t), \dots)$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité (X, P), indépendantes, et prenant les valeurs $+1$ et -1 avec la probabilité $1/2$ (variables de Bernoulli). La suite $(\varepsilon_i(t))$ est une suite symétrique de variables aléatoires, ce qui se traduit ainsi : pour toute suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de nombres égaux à ± 1, la loi de la variable aléatoire à valeurs dans $\underset{\sim}{R}^n$, définie par $t \to (\alpha_1 \varepsilon_1(t), \dots, \alpha_n \varepsilon_n(t))$, est égale à la loi de $t \to (\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t))$. [Rappelons que la loi d'une variable aléatoire f sur (X, P) est simplement la mesure image $f(P)$.]

Soit $q \in]0, 2]$. On dira qu'un espace normé E est de type q-Bernoulli si l'application linéaire qui associe à une suite (x_i) d'éléments de E (dont un nombre fini de termes seulement sont non nuls) la série $\sum x_i \varepsilon_i(t)$ est continue de $\ell^q(E)$ dans $L^0(X, P, E)$, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \quad \exists C_\alpha, \quad \forall (x_i) \in E : \quad J_\alpha(\|\sum x_i \varepsilon_i(t)\|, dP(t)) \leq C_\alpha (\sum \|x_i\|^q)^{1/q}.$$

Tout espace normé est évidemment de type 1-Bernoulli. Il est également immédiat que les sous-espaces et les quotients d'un espace normé de type q-Bernoulli sont encore de type q-Bernoulli, et que la propriété de type se conserve par isomorphisme linéaire.

On démontre facilement, en utilisant les inégalités classiques de Khinčin.

PROPOSITION. - <u>Soit</u> $p \in [1, \infty[$. <u>Tout espace</u> L^p <u>est de type</u> q-<u>Bernoulli</u>, <u>pour tout</u> q <u>tel que</u> $0 < q \leq \min(p, 2)$.

Nous dirons qu'un opérateur u d'un espace normé E dans un espace $L^0(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est quasi linéaire si :

(a) $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \underset{\sim}{R}, \quad |u(\lambda x)| = |\lambda u(x)|,$

(b) $\exists K, \quad \forall x, y \in E, \quad |u(x+y)| \leq K(|u(x)| + |u(y)|).$

Voici une façon d'obtenir des opérateurs quasi linéaires : soient G un espace normé, et v un opérateur linéaire de E dans $L^0(\Omega, \mathcal{T}, \mu, G)$. On définit un opérateur quasi linéaire u en posant

$$u(x)(\omega) = \|v(x)(\omega)\|.$$

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> $q \in [1, 2]$, <u>et</u> E <u>un espace normé de type</u> q-<u>Bernoulli</u>. <u>Tout opérateur quasi linéaire borné</u> u <u>de</u> E <u>dans un espace</u> $L^0(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ <u>est presque borné de</u> E <u>dans</u> $\Lambda_q(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

<u>Démonstration</u>. - Puisque u est quasi linéaire, il existe une constante K telle que

$$\forall x, y \in E, \quad |u(x)| \leq K/2(|u(x+y)| + |u(x-y)|).$$

Soient $(x_1 , \dots , x_n) \in E$, et $(\varepsilon_1(t) , \dots , \varepsilon_n(t))$ une suite de variables de Bernoulli sur (X , P) . On a, pour chaque i fixé et pour tout $t \in X$, en posant $A(t) = \sum_{j\neq i} x_j \varepsilon_j(t)$:

$$|u(x_i)| = |u(x_i \varepsilon_i(t))| \leqslant K/2(|u(x_i \varepsilon_i(t) + A(t))| + |u(x_i \varepsilon_i(t) - A(t))|) .$$

On en déduit :

$$|u(x_i)| \leqslant K/2 \; J_{2/3}(|u(x_i \varepsilon_i(t) + A(t)| + |u(x_i \varepsilon_i(t) - A(t))| , dP(t))$$
$$\leqslant K/2 \; [J_{1/3}(|u(x_i \varepsilon_i(t)+A(t))|,dP(t))+J_{1/3}(|u(x_i \varepsilon_i(t)-A(t))|,dP(t))] .$$

La suite $(\varepsilon_i(t))$ étant une suite symétrique, les deux termes entre crochets sont égaux, donc :

$$|u(x_i)| \leqslant K \; J_{1/3}(|u(\sum x_j \varepsilon_j(t))| , dP(t)) ,$$

d'où

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant n} |u(x_j)| \leqslant K \; J_{1/3}(|u(\sum_{j=1}^n x_j \varepsilon_j(t))| , dP(t)) .$$

Pour conclure, nous utiliserons une inégalité qui exprime l'égalité algébrique et topologique des espaces

$$L^0(X , P , L^0(\Omega , \mu)) \quad \text{et} \quad L^0(\Omega , \mu , L^0(X , P)) :$$

Soient $\alpha , \beta , \gamma , \delta \in]0 , 1[$, tels que $\gamma + \delta \leqslant \alpha\beta$, et f une fonction mesurable sur $(X \times \Omega , P \otimes \mu)$. On a

$$J_\alpha(J_\beta(f(t , \omega) , dP(t)) , d\mu(\omega)) \leqslant J_\gamma(J_\delta(f(t , \omega) , d\mu(\omega)) , dP(t))$$

(cf. [3], proposition (XXIV, 2, 4).)

Soit $\alpha \in]0 , 1[$ donné. Choisissons $\gamma , \delta \in]0 , 1[$ tels que $\gamma + \delta \leqslant \alpha/3$. On aura, d'après ce qui précède, pour une suite $(x_1 , \dots , x_n)$ d'éléments de E :

$$J_\alpha(\sup |u(x_j)| , \mu) \leqslant K \; J_\alpha(J_{1/3}(u(\sum x_j \varepsilon_j(t))(\omega) , dP(t)) , d\mu(\omega))$$
$$\leqslant K \; J_\gamma(J_\delta(u(\sum x_j \varepsilon_j(t))(\omega) , d\mu(\omega)) , dP(t))$$
$$\leqslant KC_\delta \; J_\gamma(\|\sum x_j \varepsilon_j(t)\| , dP(t)) \quad \text{(puisque } u \text{ est borné)}$$
$$\leqslant KC_\delta \; C_\gamma(\sum \|x_j\|^q)^{1/q} \quad \text{puisque } E \text{ est de type } q\text{-Bernoulli,}$$

et il suffit maintenant d'appliquer le théorème 1 pour obtenir le théorème 2.

Indiquons une conséquence intéressante du théorème 2.

COROLLAIRE 1. - Soient G un groupe compact, m sa probabilité de Haar, et $q \in [1 , 2]$. Tout opérateur quasi linéaire borné invariant par translation de $L^q(G , m)$ dans $L^0(G , m)$ est de type faible (q , q) , c'est-à-dire borné de $L^q(G , m)$ dans $\Lambda_q(G , m)$.

Esquissons la démonstration : d'après le théorème 2 et la proposition, il existe une partie $G_\varepsilon \subset G$, telle que $m(G \mathbin{\dot{-}} G_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, et telle que la restriction de u à G_ε soit bornée de L^q dans Λ_q , soit :

$$\forall c > 0 , \quad \forall x \in L^q , \quad m\{\omega \in G_\varepsilon ; \; |u(x)(\omega)| > c\} \leqslant \left(\frac{C_\varepsilon \|x\|}{c}\right)^q .$$

L'opérateur u étant supposé invariant par translation, on a aussi, pour tout $g \in G$,

$$m\{\omega \in g.G_{\varepsilon} \; ; \; |u(x)(\omega)| > c\} \leq \left(\frac{C_{\varepsilon}\|x\|}{c}\right)^q .$$

En intégrant cette inégalité par rapport à g , on obtient :

$$\forall x \in L^q \, , \quad \forall c > 0 \, , \quad m\{|u(x)| > c\} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{C_{\varepsilon}\|x\|}{c}\right)^q ,$$

ce qui démontre le corollaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NIKIŠIN (E. M.). - Resonance theorems and super linear operators, Russian math. Surveys, t. 25, 1970, p. 125-187 ; et [en russe] Uspekhi Mat. Nauk, t. 25, 1970, n° 6, p. 129-191.

[2] NIKIŠIN (E. M.). - A resonance theorem and series in eigen functions of the Laplacian, Mathematics of the USSR-Izvestija, t. 6, 1972, p. 788-806 ; et [en russe] Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat., t. 36, 1972, p. 795-813.

[3] Séminaire L. Schwartz, 1969/70 : Applications radonifiantes. - Paris, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1970.

(Texte reçu le 16 mai 1974)

Bernard MAUREY
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75230 PARIS CEDEX 05