Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Louveau

Ultrafiltres absolus et problèmes d'extraction de sous-suites

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 8, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 8, 11 p.
20 décembre 1973

ULTRAFILTRES ABSOLUS ET PROBLÈMES D'EXTRACTION DE SOUS-SUITES

par Alain LOUVEAU

Introduction.

Le but de cet exposé est l'utilisation des ultrafiltres dans les problèmes d'extraction de sous-suites de l'analyse fonctionnelle.

Les résultats que nous obtenons sont essentiellement déjà connus : ce ne sont que de légères améliorations des théorèmes combinatoires de Silver et Mathias. Cependant l'éclairage diffère : tandis que Silver et Mathias utilisaient des méthodes de logique pour la démonstration de leurs théorèmes, les méthodes utilisées ici sont purement topologiques, ainsi que leurs applications à l'analyse fonctionnelle.

Notons $\mathcal{P}(\underset{\sim}{N})$, $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, $\mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$ respectivement, les parties de N , les parties infinies, les parties finies, les parties de cardinal n de $\underset{\sim}{N}$. Un problème d'extraction de sous-suites se ramène immédiatement à un problème sur $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$: Etant donné un ensemble de parties $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, à quelles conditions $\mathfrak{X}$ vérifie-t-il

$$\forall\ Y\ ,\ Y \in \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})\ ,\quad \exists\ X\ ,\ X \in \mathcal{P}_\infty(Y)\ \text{ et }\ X \in \mathfrak{X}\ ?$$

Les théorèmes combinatoires connus sont des conditions suffisantes portant sur $\mathfrak{X}$ pour qu'il vérifie cette propriété. Le plus classique d'entre eux est le théorème de Ramsey. Nous étudierons dans la première partie ce théorème et ses extensions par Williams, Galvin et Prikry, puis par Silver. La seconde partie sera consacrée à l'étude des rapports entre ces problèmes d'extraction et les ultrafiltres, c'est-à-dire au théorème de Mathias, et, par l'introduction d'une topologie adaptée sur $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, à la démonstration de ces théorèmes. Enfin, la dernière partie traitera des extensions possibles de ces résultats et indiquera leurs possibilités d'application aux problèmes d'extraction de l'analyse fonctionnelle.

1. Les théorèmes de Ramsey et de Silver.

Le théorème combinatoire classique de Ramsey porte sur des ensembles définis par des conditions sur les parties finies de $\underset{\sim}{N}$.

THÉORÈME 1 (RAMSEY [6]). - <u>Soit</u> $(\mathfrak{A}_0 , \mathfrak{A}_1)$ <u>une partition de</u> $\mathcal{P}_2(\underset{\sim}{N})$. <u>Il existe un sous-ensemble infini</u> X <u>de</u> $\underset{\sim}{N}$ <u>et un indice</u> $i = 0$ <u>ou</u> 1 <u>tels que</u> $\mathcal{P}_2(X) \subset \mathfrak{A}_i$.

Ce théorème s'étend facilement à $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$, $n \in \underset{\sim}{N}$. Par contre, il ne s'étend pas à $\mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, et pour l'étendre à $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, ce qui est l'objet du théorème de Silver, nous avons besoin de la définition suivante.

DÉFINITION 2. - Soit $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$. $\mathfrak{X}$ est dit Ramsey s'il vérifie la condition

$$\forall X \in \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N}) , \quad \exists Y \in \mathcal{P}_\infty(X) \text{ tel que } \mathcal{P}_\infty(Y) \subset \mathfrak{X} \text{ ou } \mathcal{P}_\infty(Y) \subset \complement\mathfrak{X} .$$

Cette définition amène plusieurs remarques : D'une part elle est symétrique en $\mathfrak{X}$ et $\complement\mathfrak{X}$, donc la famille des ensembles Ramsey est stable par complémentaire.

En second lieu, il est facile, avec l'axiome du choix, de construire un ensemble non Ramsey :

Si $(X_\xi)_{\xi<\aleph}$ est un bon-ordre sur $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, où $\aleph$ est le premier ordinal de cardinalité c , on définit par récurrence deux éléments Y_ξ et Z_ξ pour chaque $\xi < \aleph$, tels que $Y_\xi \in \mathcal{P}_\infty(X_\xi)$, $Z_\xi \in \mathcal{P}_\infty(X_\xi)$ et pour tout $\eta < \xi$, $Y_\xi \neq Z_\xi$, $Y_\xi \neq Y_\eta$, $Y_\xi \neq Z_\eta$, $Z_\xi \neq Y_\eta$ et $Z_\xi \neq Z_\eta$. Ceci est possible puisque

$$\text{card } \mathcal{P}_\infty(X_\xi) = c .$$

On vérifie aisément que si $\mathfrak{X} = \{Y_\xi , \ \xi < \aleph\}$, $\mathfrak{X}$ n'est pas Ramsey.

L'axiome du choix est fondamental dans cette construction, puisque Mathias a démontré que la proposition "Tout ensemble de $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$ est Ramsey" est compatible avec les axiomes de la théorie ZF (Cf. [5]).

La construction montre que dans ZFC , une extension du théorème de Ramsey à $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$ nécessite des hypothèses supplémentaires sur $\mathfrak{X}$. C'est le cas du théorème suivant.

THÉORÈME 3 (SILVER [7]). - Soit $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, $\mathfrak{X}$ analytique pour la topologie produit $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$. Alors $\mathfrak{X}$ est Ramsey.

Ce théorème a été démontré originellement en plusieurs étapes : Pour $\mathfrak{X}$ ouvert par N. WILLIAMS (Cf. [3], p. 45), pour $\mathfrak{X}$ borélien par GALVIN et PRIKRY grâce à un lemme combinatoire permettant de passer aux unions dénombrables, puis pour $\mathfrak{X}$ analytique par SILVER grâce à des méthodes de logique. Après avoir prouvé que le résultat était indépendant des axiomes supplémentaires ajoutés, SILVER construit un modèle de la théorie des ensembles dans lequel le lemme de Galvin et Prikry s'étend aux unions de $\aleph_1$ ensembles, et donc est en particulier applicable aux ensembles analytiques.

Nous obtiendrons ce théorème comme corollaire d'un théorème plus général de la seconde partie (théorème 16), par des méthodes très différentes.

Auparavant, nous allons donner un premier exemple d'utilisation du théorème de Silver, qui n'a aucun intérêt comme résultat, mais qui illustre bien la puissance de ce théorème, et ses difficultés d'application. Nous allons démontrer le théorème de Ramsey à partir du théorème de Silver.

Pour ce faire, nous ne pouvons pas utiliser le théorème de Silver directement, c'est-à-dire en prenant pour $\mathfrak{X}$ l'ensemble des parties vérifiant les conclusions du théorème 1. C'est une remarque générale : dès que $\mathfrak{X}$ est héréditaire, c'est-à-dire stable par sous-ensembles, le théorème de Silver devient un truisme.

On pose alors : $\mathfrak{X}$ est l'ensemble des parties infinies X telles que, si x_0 est le premier élément de X, il existe un indice $i(x_0) = 0$ ou 1 tel que

$$\forall\, x \in X\ ,\quad x \neq x_0\ ,\qquad (x_0\ ,\ x) \in \mathfrak{a}_{i(x_0)}\ .$$

$\mathfrak{X}$ est fermé dans $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, donc nous pouvons appliquer le théorème de Silver à $\mathfrak{X}$, et comme on vérifie facilement qu'on ne peut avoir $\mathcal{P}_\infty(X) \subset \complement\mathfrak{X}$, il existe donc X infini, tel que $\mathcal{P}_\infty(X) \subset \mathfrak{X}$.

En particulier, si $X = \{x_n\ ,\ n \in \underset{\sim}{N}\}$ les parties $X_n = \{x_p\ ,\ p \geqslant n\}$ sont dans $\mathfrak{X}$, donc il existe $i(x_n)$ tel que $(x_n\ ,\ x_p) \in \mathfrak{a}_{i(x_n)}$, pour $p > n$. L'application $x_n \longmapsto i(x_n)$ définit une partition de X en deux ensembles X_0 et X_1. L'un de ces ensembles est infini, et d'après la construction, convient.

2. Ultrafiltres extracteurs et le théorème de Mathias.

Lorsqu'on possède l'outil des ultrafiltres, il est naturel de se demander si la condition " Y infini", imposée dans les problèmes d'extraction, ne peut être remplacée par " $Y \in \mathcal{U}$ ", où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non trivial sur $\underset{\sim}{N}$. L'intérêt de ce remplacement réside dans le fait, d'une part qu'en cas de choix successifs, les ensembles obtenus seront compatibles, c'est-à-dire d'intersection non vide, et d'autre part que la définition des ensembles Ramsey va être remplacée par une définition plus maniable, car ne comportant plus un ensemble de c conditions (dû à la disparition du " $\forall X$ ") c'est une sorte de localisation du problème.

DÉFINITION 4. - <u>Soit</u> $\mathcal{U}$ <u>un ultrafiltre sur</u> $\underset{\sim}{N}$, <u>non trivial</u>, <u>et</u> $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$. <u>On dira que</u> $\mathcal{U}$ <u>est extracteur pour</u> $\mathfrak{X}$, <u>et que</u> $\mathfrak{X}$ <u>est</u> $\mathcal{U}$-<u>Ramsey</u>, <u>si la condition suivante est réalisée</u>

$$\exists\, X \in \mathcal{U}\ \ \underline{\text{tel que}}\ \ \mathcal{P}_\infty(X) \subset \mathfrak{X}\ \ \underline{\text{ou}}\ \ \mathcal{P}_\infty(X) \subset \complement\mathfrak{X}\ .$$

Cette définition nous amène à étudier l'ensemble des ultrafiltres extracteurs pour un problème donné.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$ <u>un ensemble de Ramsey</u>. <u>L'ensemble des ultrafiltres extracteurs pour</u> $\mathfrak{X}$ <u>forme un ouvert partout dense de</u> $\beta\underset{\sim}{N} \dot{-} \underset{\sim}{N}$.

<u>Démonstration</u>. - Il est équivalent de dire que $\mathcal{U}$ est extracteur pour $\mathfrak{X}$, et que $\mathcal{U} \in \overline{X} - X$, où X vérifie $\mathcal{P}_\infty(X) \subset \mathfrak{X}$ ou $\mathcal{P}_\infty(X) \subset \complement\mathfrak{X}$, et $\overline{X}$ désigne l'adhérence de X dans $\beta\underset{\sim}{N}$. Donc l'ensemble des ultrafiltres extracteurs, réunion de ces $(\overline{X} - X)$, est ouvert dans $\beta\underset{\sim}{N} \dot{-} \underset{\sim}{N}$. Il reste à remarquer que la condition " $\mathfrak{X}$ est Ramsey" signifie exactement que cet ouvert est dense.

D'après cette proposition, et en utilisant un théorème classique de Blass [1], sur les intersections de $\aleph_1$ ouverts denses de $\beta\underset{\sim}{N} \dot{-} \underset{\sim}{N}$, nous obtenons le résultat suivant.

COROLLAIRE 6. - <u>Toute famille de</u> $\aleph_1$ <u>ensembles de Ramsey possède un ensemble d'ultrafiltres extracteurs dense dans</u> $\beta\underset{\sim}{N} \dot{-} \underset{\sim}{N}$.

<u>Remarque</u>. - Ce qui précède introduit le problème suivant : Existe-t-il des ultrafiltres universellement extracteurs, c'est-à-dire extracteurs pour tout ensemble de Ramsey ? La réponse est non. En effet, il est immédiat de vérifier que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{N}$ non trivial, alors $\mathcal{U}$, en tant que sous-ensemble de $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, est Ramsey, et que l'ensemble de ses extracteurs est $(\beta\underset{\sim}{N} \dot{-} \underset{\sim}{N}) \dot{-} \{\mathcal{U}\}$. Un tel manque d'universalité des ultrafiltres dans les problèmes d'analyse fonctionnelle est classique. Par exemple, on ne peut pas non plus trouver d'ultrafiltre tel que la limite suivant cet ultrafiltre d'une suite de fonctions continues, même sur un espace métrique compact, ait de bonnes propriétés. En effet, sur $\mathcal{P}(\underset{\sim}{N})$, si $\mathcal{U}_n$ désigne l'ultrafiltre de base $\{n\}$, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre quelconque, la suite des fonctions continues $1_{\mathcal{U}_n}$ vérifie $\lim_{\mathcal{U}} 1_{\mathcal{U}_n} = 1_{\mathcal{U}}$, et la fonction $1_{\mathcal{U}}$ n'est pas mesurable pour la mesure de Haar.

Le corollaire 6 est cependant intéressant, moyennant l'hypothèse du continu, car, dans la pratique, seules des classes plus restreintes d'ensembles de Ramsey interviennent, de cardinal c , donc pour lesquelles ce corollaire est applicable.

C'est en particulier le cas pour les ensembles analytiques. Pour cette famille d'ensembles, le théorème de Ramsey, le corollaire 6 et l'hypothèse du continu impliquent que l'ensemble des ultrafiltres extracteurs pour tout ensemble analytique est dense dans $\beta\underset{\sim}{N} \dot{-} \underset{\sim}{N}$. Le mérite supplémentaire du théorème de Mathias, démontré indépendamment des résultats précédents, est de décrire cet ensemble : c'est l'ensemble des ultrafiltres absolus.

THÉORÈME 7 (MATHIAS [5]). - <u>Soit</u> $\mathfrak{X}$ <u>un ensemble analytique</u>, $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, <u>et soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>un ultrafiltre absolu</u>. <u>Alors</u> $\mathfrak{X}$ <u>est</u> $\mathfrak{F}$-<u>Ramsey.</u>

Réciproquement, si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre extracteur pour tout $\mathfrak{X}$ analytique, il est facile de voir que $\mathfrak{F}$ est absolu. Il suffit pour cela d'utiliser le résultat suivant (Cf. [4]) : Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre vérifiant : Pour toute partition $(\mathfrak{A}_0 , \mathfrak{A}_1)$ de $\mathcal{P}_2(\underset{\sim}{N})$, il existe $X \in \mathfrak{F}$ et un indice $i = 0$ ou 1 tels que $\mathcal{P}_2(X) \subset \mathfrak{A}_i$; alors $\mathfrak{F}$ est absolu. Comme l'ensemble $\mathfrak{X}$ associé à ce problème est fermé dans $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, ceci prouve notre remarque.

La démonstration du théorème 7 par MATHIAS, comme celle de Silver, utilise des méthodes de logique, en particulier de forcing. Nous allons démontrer ce résultat, et même un résultat un peu plus général, par une méthode topologique fondée sur les analogies du problème avec des problèmes de mesurabilité et de propriété de Baire.

La méthode utilise les idées initiales de Williams, Galvin et de Prikry ([3], p. 45). Ceux-ci ont eu l'idée d'introduire une famille d'ensembles plus restreinte que la famille des Ramsey, ou des $\mathfrak{F}$-Ramsey, mais possèdant de bien meilleures propriétés de stabilité. On peut remarquer en effet que la classe des $\mathfrak{F}$-Ramsey, où

$\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre non trivial, n'est pas stable par les unions dénombrables. Il suffit de prendre une suite $(X_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ d'ensembles de $\mathfrak{F}$, $\bigcap_n X_n = \emptyset$, et de considérer pour chaque n

$$\mathfrak{X}_n = \mathcal{P}_\infty(X_n) \cup \mathfrak{X} ,$$

où $\mathfrak{X}$ est l'ensemble non-Ramsey construit dans la première partie. Chaque $\mathfrak{X}_n$ est $\mathfrak{F}$-Ramsey, et $\mathfrak{X} = \bigcap \mathfrak{X}_n$ ne l'est pas.

Dans la suite, $\mathfrak{F}$ sera un ultrafiltre absolu donné. Si $I \in \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, et $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, on notera

$$\mathfrak{X}_I = \{Y \ , \ Y \in \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N} \dot{-} I) \ \text{ et } \ I \cup Y \in \mathfrak{X}\} .$$

DÉFINITION 8.

1° On note $\mathcal{C}_\mathfrak{F} = \{\mathfrak{X} \ , \ \mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$ et $\forall \ I \in \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, $\mathfrak{X}_I$ est $\mathfrak{F}$-Ramsey$\}$. Un élément de $\mathcal{C}_\mathfrak{F}$ est dit complètement $\mathfrak{F}$-Ramsey.

2° Pour tout $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, on pose $m(\mathfrak{X}) = \{I \in \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N}) \ , \ \exists \ X \in \mathfrak{F} \ , \ \mathcal{P}_\infty(X) \subset \mathfrak{X}_I\}$.

L'application m est croissante, $m(\emptyset) = \emptyset$, $m(\mathfrak{X}) \cap m(\ ) = m(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y})$. De plus, d'après les définitions, $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}_\mathfrak{F}$ est équivalent à

$$m(\mathfrak{X}) \cup m(\complement\mathfrak{X}) = \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N}) .$$

Nous allons maintenant montrer que la famille $\mathcal{C}_\mathfrak{F}$ est très riche, en caractérisant ses éléments de manière topologique. Ceci va être obtenu par étapes.

DÉFINITION 9 : Les topologies $\mathcal{T}_\mathfrak{F}$. - Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre absolu sur $\underset{\sim}{N}$. Nous poserons $\mathcal{O}_{I,A} = \{X \ ; \ I \subset X \subset I \cup A\}$, où $I \in \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, $A \in \mathfrak{F}$, et de même $\mathcal{O}^\infty_{I,A}$ et $\mathcal{O}^f_{I,A}$ en restreignant $\mathcal{O}_{I,A}$ à $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$ et $\mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$ respectivement. La topologie sur $\mathcal{P}(\underset{\sim}{N})$ (resp. $\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$, $\mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$) dont une base d'ouverts est formée des $\mathcal{O}_{I,A}$, $I \in \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, $A \in \mathfrak{F}$ (resp. $\mathcal{O}^\infty_{I,A}$ et $\mathcal{O}^f_{I,A}$) sera notée $\mathcal{T}_\mathfrak{F}$ (resp. $\mathcal{T}^\infty_\mathfrak{F}$, $\mathcal{T}^f_\mathfrak{F}$).

Dans [4], nous avions démontré que la topologie $\mathcal{T}^f_\mathfrak{F}$, sur $\mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, était extrêmement discontinue, et que, $\mathfrak{F}$ étant absolu, vérifiait :

(1) Pour que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$ soit ouvert pour $\mathcal{T}_\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que, pour tout $I \in \mathcal{M}$, l'ensemble $\{i \ , \ \{i\} \cup I \in \mathcal{M}\}$ soit un élément de $\mathfrak{F}$.

De cette propriété [qui est d'ailleurs caractéristique des ultrafiltres absolus], nous allons déduire la proposition suivante, qui n'est qu'une variante du résultat initial de Williams :

PROPOSITION 10. - Soit $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$. Alors, $m(\mathfrak{X})$ est ouvert et fermé pour $\mathcal{T}^f_\mathfrak{F}$.

Démonstration. - Si $I \in m(\mathfrak{X})$, $\exists \ A \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{O}^\infty_{I,A} \subset \mathfrak{X}$. Alors, de façon évidente, $\mathcal{O}^f_{I,A} \subset m(\mathfrak{X})$, donc $m(\mathfrak{X})$ est ouvert.

Pour démontrer que $m(\mathfrak{X})$ est fermé, nous allons découper $\mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$ en trois ensembles :

$$\mathcal{M}_1 = m(\mathfrak{X}) \cup m(\complement\mathfrak{X}) \ ,$$
$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{T}^f_{\mathfrak{F}} - \mathrm{Int}(\complement\mathcal{M}_1) \ ,$$
$$\mathcal{M}_3 = \complement\,(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) \ ,$$

et nous allons prouver que $\mathcal{M}_3$ est ouvert (donc vide). Ceci suffit, car $\mathcal{M}_2$ est ouvert et fermé, donc $\mathcal{M}_1$ sera fermé, et comme $m(\complement\mathfrak{X})$ est ouvert, $m(\mathfrak{X})$ sera fermé.

Utilisons la propriété (1) : Soit $I \in \mathcal{M}_3$. L'un des trois ensembles

$$A_i = \{n \ ; \ I \cup \{n\} \in \mathcal{M}_i\} \ , \qquad i = 1 \ , 2 \ , 3 \ ,$$

est un élément de $\mathfrak{F}$.

On ne peut avoir $A_2 \in \mathfrak{F}$, car $\mathcal{M}_2$ est $\mathcal{T}^f_{\mathfrak{F}}$-fermé, donc ceci entraînerait $I \in \mathcal{M}_2$.

Si $A_1 \in \mathfrak{F}$, alors il est facile de voir qu'il existe $A \subset A_1$ tel que

$\forall\ i \in A \ , \ \exists\ A_i \in \mathfrak{F} \ , \ A_i \subset A \ , \ \mathcal{O}^f_{I\cup\{i\},A_i} \subset \mathfrak{X}$ (par exemple, ce pourrait être $\complement\mathfrak{X}$).

Mais $\mathfrak{F}$ étant absolu, il existe $A' \in \mathfrak{F}$, $A' \subset A$ tel que

$$\forall\ i \in A' \ , \ \forall\ j \in A' \ , \qquad j > i \Rightarrow j \in A_i \qquad \text{(Cf. [4])} \ .$$

Alors,

$$\mathcal{O}^f_{I,A'} \subset \bigcup_{i\in A'} \mathcal{O}^f_{I\cup\{i\},A_i} \subset \mathfrak{X} \ , \text{ et } \ I \in \mathcal{M}_1 \ .$$

Donc on a nécessairement $A_3 \in \mathfrak{F}$, et $\mathcal{M}_3$ est ouvert, ce qui prouve la proposition.

COROLLAIRE 11. - <u>Soit</u> $\mathfrak{X}$ <u>un</u> $\mathcal{T}^\infty_{\mathfrak{F}}$<u>-ouvert</u>. <u>Alors</u>, $m(\mathfrak{X}) = \mathcal{T}_{\mathfrak{F}}\text{-adh}(\mathfrak{X}) \cap \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$.

<u>Démonstration</u>. - Si $I \in m(\mathfrak{X})$, $\exists\ A \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{O}^\infty_{I,A} \subset \mathfrak{X}$. Par suite, pour tout $A' \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{O}_{I,A'} \cap \mathfrak{X} \supset \mathcal{O}^\infty_{I,A\cap A'} \neq \emptyset$, donc $I \in \mathcal{T}_{\mathfrak{F}} - \mathrm{adh}(\mathfrak{X})$. Réciproquement, si $I \in \mathcal{T}_{\mathfrak{F}}\ \mathrm{adh}(\mathfrak{X}) \cap \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, nous allons démontrer que $I \in \mathcal{T}^f_{\mathfrak{F}}\ \mathrm{adh}\ m(\mathfrak{X})$. Comme $m(\mathfrak{X})$ est $\mathcal{T}^f_{\mathfrak{F}}$-fermé, d'après la proposition 10, ceci démontrera le corollaire.

Soit alors $A \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{O}^\infty_{I,A} \cap \mathfrak{X}$ est un ouvert non vide par hypothèse. Donc,

$$\exists\ J \in m(\mathfrak{X} \cap \mathcal{O}^\infty_{I,A}) \ .$$

Comme $m(\mathcal{O}^\infty_{I,A}) = \mathcal{O}^f_{I,A}$, $J \in m(\mathfrak{X}) \cap \mathcal{O}^f_{I,A}$. Ceci prouve que $I \in \mathcal{T}^f_{\mathfrak{F}} - \mathrm{adh}(m(\mathfrak{X}))$.

COROLLAIRE 12. - <u>Soit</u> $\mathfrak{X}$ <u>un</u> $\mathcal{T}^\infty_{\mathfrak{F}}$<u>-ouvert</u>. <u>Alors</u>, $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$.

<u>Démonstration</u>. - Si $I \notin m(\mathfrak{X})$, d'après ce qui précède, $I \notin \mathcal{T}_{\mathfrak{F}}\ \mathrm{adh}(\mathfrak{X})$, donc il existe $A \in \mathfrak{F}$, $\mathcal{O}_{I,A} \cap \mathfrak{X} = \emptyset$, et par suite $I \in m(\complement\mathfrak{X})$.

Le lemme qui suit reprend les idées du lemme de Galvin et Prikry (Cf. [7]).

LEMME 13. - <u>Soient</u> $\mathfrak{X}_n$ <u>une famille dénombrable d'ensembles complètement</u> $\mathfrak{F}$-<u>Ramsey</u>. <u>Alors il existe</u> $A \in \mathfrak{F}$ <u>tel que</u> $\mathfrak{X}_n \cap \mathcal{P}_\infty(A)$ <u>soit ouvert pour tout</u> n .

Démonstration. - Comme les $\mathfrak{X}_n$ sont complètement $\mathfrak{F}$-Ramsey, on peut faire correspondre, à tout $I \in \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, un ensemble $A_I \in \mathfrak{F}$ tel que

$$\mathcal{O}^{\infty}_{I,A_I} \subset \mathfrak{X}_{|I|} \quad \text{ou} \quad C\mathfrak{X}_{|I|} .$$

Comme $\mathfrak{F}$ est absolu, il existe $A \in \mathfrak{F}$ vérifiant :

$$\forall\ I \in \mathcal{P}_f(A) , \qquad A \dot{-} [0 , \sup I] \subset A_I .$$

Montrons que A convient :

Si $X \in \mathfrak{X}_n \cap \mathcal{P}_\infty(A)$, et si $I = (x_1 , \dots , x_n)$, où $x_1 , \dots , x_n$ sont les n premiers éléments de X, alors on a nécessairement

$$I \in \mathcal{P}_f(A) \text{ , donc } X - I \subset A_I \text{ , et par suite } \mathcal{O}^{\infty}_{I,A_I} \subset \mathfrak{X}_n$$

ce qui prouve que $\mathcal{O}^{\infty}_{I,A_I} \cap \mathcal{P}_\infty(A) \subset \mathfrak{X}_n \cap \mathcal{P}_\infty(A)$, donc que $\mathfrak{X}_n \cap \mathcal{P}_\infty(A)$ est ouvert.

Remarques.

1° En appliquant ce lemme aux $C\mathfrak{X}_n$, on voit que l'on peut supposer les $\mathfrak{X}_n \cap \mathcal{P}_\infty(A)$ ouverts et fermés.

2° Ce lemme permet de démontrer facilement que tout $\mathcal{C}^f_{\mathfrak{F}}$-borélien est dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$. Nous allons donner un autre corollaire de ce lemme, moins évident.

DÉFINITION 14. - Nous noterons $\mathcal{C}^*_{\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} ;\ m(C\mathfrak{X}) = \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})\}$.

On a évidemment, $\mathcal{C}^*_{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$, et $\mathcal{C}^*_{\mathfrak{F}}$ est un idéal.

COROLLAIRE 15. - $\mathcal{C}^*_{\mathfrak{F}}$ est un σ-idéal.

Démonstration. - Soient $\mathfrak{X}_n \in \mathcal{C}^*_{\mathfrak{F}}$, et appliquons le lemme 13 aux $(\mathfrak{X}_n)_I$, où $I \in \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$. Ceci est possible puisque $(\mathfrak{X}_n)_I \in \mathcal{C}^*_{\mathfrak{F}}$. Il existe donc $A \in \mathfrak{F}$ tel que $(\mathfrak{X}_n)_I \cap \mathcal{P}_\infty(A)$ soit ouvert et fermé. Mais $(\mathfrak{X}_n)_I \cap \mathcal{P}_\infty(A) \in \mathcal{C}^*_{\mathfrak{F}}$, donc

$$(\mathfrak{X}_n)_I \cap \mathcal{P}_\infty(A) = \emptyset .$$

Donc $(\bigcup_n \mathfrak{X}_n)_I \cap \mathcal{P}_\infty(A) = \emptyset$, c'est-à-dire $I \notin m(\bigcup \mathfrak{X}_n)$. Comme $\bigcup \mathfrak{X}_n \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ et $m(\bigcup \mathfrak{X}_n) = \emptyset$, $\bigcup \mathfrak{X}_n \in \mathcal{C}^*_{\mathfrak{F}}$.

C. Q. F. D.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de cet exposé.

THÉORÈME 16. - Soit $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N})$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$.

(2) $\mathfrak{X}$ possède la propriété de Baire pour $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathfrak{F}}$.

Démonstration.

1° (1) $\Rightarrow$ (2). $\mathfrak{X} = \overline{\mathfrak{X}}^{\infty} \dot{-} (\overline{\mathfrak{X}}^{\infty} \dot{-} \mathfrak{X})$, où $\overline{\mathfrak{X}}^{\infty}$ est l'adhérence de $\mathfrak{X}$ pour $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathfrak{F}}$. Comme $\overline{\mathfrak{X}}^{\infty}$ est fermé, il possède la propriété de Baire.

$\overline{\mathfrak{X}}^{\infty} - \mathfrak{X}$ est de $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}^{\infty}$-intérieur vide. Donc $m(\overline{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}) = \emptyset$. Et comme $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$, et $\overline{\mathfrak{X}}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ d'après le corollaire 12, $\overline{\mathfrak{X}}^{\infty} - \mathfrak{X} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$. Donc $\overline{\mathfrak{X}}^{\infty} - \mathfrak{X} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^{*}$.

Nous allons démontrer que tout élément de $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^{*}$ est $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}^{\infty}$-rare, ce qui démontrera le résultat. Soit donc $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^{*}$. Comme $m(\complement\mathfrak{X}) = \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})$, on peut choisir, pour tout I, un élément $A_I \in \mathfrak{F}$ tel que $\mathcal{O}_{I,A_I}^{\infty} \subset \complement\mathfrak{X}$. Mais alors

$$\overline{\mathfrak{X}}^{\infty} \subset \bigcap_{I\in\mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N})} \complement\mathcal{O}_{I,A_I}^{\infty} = \mathfrak{X} ,$$

et par suite $\overline{\mathfrak{X}}^{\infty} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^{*}$. Comme les éléments de $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^{*}$ sont d'intérieur vide, $\overline{\mathfrak{X}}^{\infty}$ est rare.

C. Q. F. D.

2° (2) $\Rightarrow$ (1). Il suffit de prouver que les $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}^{\infty}$-ouverts et les $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}^{\infty}$-maigres sont dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$. Le premier résultat provient du corollaire 12, et le second du corollaire 15, car les ensembles rares sont évidemment dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^{*}$, et celui-ci est un σ-idéal.

<u>Remarque</u>. - La démonstration du théorème prouve incidemment que dans $\mathcal{P}_{\infty}(\underset{\sim}{N})$ muni de $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}^{\infty}$, tout maigre est rare.

COROLLAIRE 17.

(1) $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ <u>est stable par l'opération</u> A .

(2) <u>Si</u> $\mathfrak{A}$ <u>désigne la tribu engendrée par l'opération</u> A <u>et l'opération</u> $\complement$ <u>à partir des ouverts de la topologie</u> $\mathcal{T}$ <u>sur</u> $\mathcal{P}_{\infty}(\underset{\sim}{N})$, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$.

(3) <u>Théorème de Mathias</u>.

(4) (+ <u>existence d'un ultrafiltre absolu</u>) : <u>théorème de Silver</u>.

<u>Démonstration</u>. - On a évidemment (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Enfin, (1) est vrai car la propriété de Baire est stable par l'opération A dans tout espace topologique.

<u>Remarques</u>.

1° Ce corollaire aurait pu être obtenu un peu plus rapidement avec l'aide des corollaires 12 et 15 et de l'ensemble $\tilde{\mathfrak{X}}$ construit dans la démonstration du théorème, en utilisant un résultat de théoric des ensembles de E. Szpilzajn-Marczewski [8].

2° Comme nous l'avons déjà indiqué, l'hypothèse de l'existence d'un ultrafiltre absolu peut être éliminée, par des méthodes classiques, dans (4).

3° La partie (2) de ce corollaire est une amélioration du résultat de Mathias. Mais cette amélioration est très légère, puisqu'il est bien connu que tous les éléments de $\mathfrak{A}$ sont à la fois P.C.A et complémentaires de P.C.A. Nous allons revenir, dans la troisième partie, au problème des extensions possibles de ces théorèmes.

3. Extensions et applications.

(a) Extensions des théorèmes.

D'après les résultats du corollaire 17, le théorème de Silver peut être étendu de la façon suivante :

Définissons la classe $\mathcal{C}$ des complètement Ramsey par analogie avec les classes $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$:

$$\mathcal{C} = \{\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N}) \ , \ \forall\, I \in \mathcal{P}_f(\underset{\sim}{N}) \ , \ \mathfrak{X}_I \text{ est Ramsey}\} \ .$$

En utilisant 17, (2), on voit immédiatement que

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \ .$$

Mais comme nous le remarquions, les éléments de $\mathcal{A}$ sont PCA et CPCA, donc cette extension est assez faible. Peut-on obtenir le théorème de Silver pour des classes plus générales ? SILVER a montré que ceci dépendait des axiomes supplémentaires ajoutés à ZFC : (Cf. [7]).

- L'hypothèse de constructibilité de GÖDEL permet de construire un ensemble PCA et CPCA qui n'est pas Ramsey. Donc dans ZFC + (V = L), notre résultat est essentiellement optimal.

- L'hypothèse de l'existence d'un cardinal mesurable permet au contraire de démontrer que tout PCA (donc tout CPCA) est complètement Ramsey. De plus, dans ce cas, on ne peut aller plus loin : il existe un PCPCA et CPCPCA qui n'est pas Ramsey.

Les mêmes problèmes se posent pour la classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$:

Il est facile de voir que l'hypothèse $V = L$ entraîne l'existence d'un ultrafiltre absolu $\mathfrak{F}$ PCA et CPCA. Comme $\mathfrak{F} \notin \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$, ceci montre que nos résultats sont alors essentiellement optima.

Par contre, dans l'hypothèse de l'existence d'un cardinal mesurable, les ensembles PCA sont Ramsey, donc d'après le théorème de Blass et l'hypothèse du continu, il existe des ultrafiltres extracteurs pour cette famille. Ces ultrafiltres sont évidemment absolus, mais le problème est ouvert de savoir si tous les ultrafiltres absolus conviennent.

Ce problème est à relier au problème de définir (sans utiliser de constantes dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\underset{\sim}{N}))$, ni d'hypothèse supplémentaire à ZFC + existence d'un ultrafiltre absolu) un sous-ensemble strict de l'ensemble des ultrafiltres absolus.

Nous allons maintenant donner des applications de ces théorèmes.

(b) Applications du théorème de Mathias aux ultrafiltres absolus.

Dans sa thèse [5], MATHIAS avait donné des exemples d'application de son théorème. Celui-ci a en particulier permis de démontrer le résultat suivant.

Tout filtre analytique n'est pas rare.

SALOMON, dans sa thèse, en a déduit un autre corollaire :

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre analytique. Pour que $\mathfrak{F}$ puisse être prolongé en un ultrafiltre absolu, il faut et il suffit que $\mathfrak{F}$ soit à base dénombrable (l'hypothèse de l'existence d'un ultrafiltre absolu est évidemment nécessaire pour démontrer la condition suffisante).

Nous allons donner un troisième exemple d'application, qui répond à un problème de G. CHOQUET (Cf. [2]).

Un recouvrement $\mathcal{R} = (R_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ de $\underset{\sim}{N}$ est dit mince s'il vérifie

$$\forall\, X \in \mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N}) \ , \ \exists\, Y \in \mathcal{P}_\infty(X) \ \text{ tel que } \ \exists\, n \quad Y \subset R_n \ , \text{ ou } \ \forall\, n, \ \overline{\overline{Y \cap R_n}} \leq 1 \ .$$

L'ensemble des recouvrements minces a pour cardinal 2^c, et G. CHOQUET espérait, en choisissant une sous-classe de cardinal c, opérer une distinction à l'intérieur des ultrafiltres absolus. Ceci n'est pas possible. En effet :

PROPOSITION 18. - <u>Tout ultrafiltre absolu</u> $\mathfrak{F}$ <u>est extracteur pour la classe des recouvrements minces, c'est-à-dire</u>

$$\forall\, \mathcal{R} \ \underline{\text{recouvrement mince de}} \ \underset{\sim}{N} \ , \ \exists\, A \in \mathfrak{F} \ \underline{\text{tel que}} \ \exists\, n \ , \ A \subset R_n \ \underline{\text{ou}} \ \forall\, n \ , \ \overline{\overline{A \cap R_n}} \leq 1 \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de remarquer que si

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{R}} = \{X \ , \ \exists\, n \ , \ X \subset R_n \ \text{ ou, } \ \forall\, n \ , \ \overline{\overline{X \cap R_n}} \leq 1\}$$

est un K_σ de $(\mathcal{P}_\infty(\underset{\sim}{N}) \ , \mathcal{T})$, donc $\mathfrak{X}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ d'après le corollaire 17, et, d'autre part, que la propriété de $\mathcal{R}$ d'être mince assure que l'extraction par $\mathfrak{F}$ a lieu dans $\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$ et non dans $\complement\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$.

(c) <u>Applications du théorème de Silver</u>.

Comme nous l'avons indiqué dans la première partie, le théorème de Silver est en fait un théorème d'existence de sous-suites, et ce résultat est utilisable dans un grand nombre de problèmes d'analyse fonctionnelle.

Dans un autre article, nous donnerons des applications de ce théorème à des problèmes du type suivant :

THÉORÈME (CHATTERJEE-GAPOSHKIN). - <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite de fonctions d'un espace</u> $L_1(\mu)$, $\|f_n\| \leq 1$. <u>Il existe alors une sous-suite</u> (f_{n_k}) <u>de la suite</u> f_n <u>telle que toutes les sous-suites extraites de</u> (f_{n_k}) <u>convergent simplement</u> μ-<u>presque-partout en moyenne de Césaro vers une fonction</u> f <u>de</u> $L_1(\mu)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLASS (A. R.). - Orderings of ultrafilters, Doct. Diss. math. Sc., Harvard 1970.

[2] CHOQUET (G.). - Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\underset{\sim}{N}$, Bull. Sc. math., 2e série, t. 92, 1968, p. 143-153.

[3] KLEINBERG (E. M.). - Infinitary combinatorics, "Cambridge summer school in mathematic logic", p. 361-418. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 337).

[4] LOUVEAU (A.). - Sur un article de S. Sirota, Bull. Sc. math., 2e série, t. 96, 1972, p. 3-7.

[5] MATHIAS (A. R. D.). - Doctoral Dissertation, Cambridge 1971 (Grande-Bretagne).

[6] RAMSEY (F. D.). - On a problem of formal logic, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 30, 1930, p. 264-286.

[7] SILVER (J.). - Every analytic set is Ramsey, J. Symbolic logic, t. 35, 1970, p. 60-64.

[8] SZPILRAJN-MARCZEWSKI (E.). - Sur l'équivalence des suites d'ensembles et l'équivalence des fonctions, Fund. Math., Warszawa, t. 26, 1936, p. 302-326.

(Texte reçu le 26 janvier 1974)

Alain LOUVEAU
92 rue du Dessous des Berges
75013 PARIS