Mathieu Meyer

Représentations des espaces vectoriels réticulés

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 6, 12 p.

22 novembre 1973

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES VECTORIELS RÉTICULÉS (*)

par Mathieu MEYER

Introduction.

Si E est un espace vectoriel réticulé archimédien, on appelle espace de représentation algébrique de E, un espace localement compact Ω, tel qu'il existe un isomorphisme φ d'espaces ordonnés entre l'espace vectoriel $C_K(\Omega)$ des fonctions continues à support compact sur Ω, et un idéal d'ordre dense pour l'ordre de E ; Ω sera dit topologique si $\varphi(C_K(\Omega))$ est dense dans E, muni d'une topologie localement solide, localement convexe et séparée.

On se propose, ici, d'étudier l'existence et l'unicité de représentations de E comme fonctions numériques continues sur Ω, finies sur un ensemble dense de Ω.

Le paragraphe 1 est consacré au cas algébrique ; dans le §2, on étudie le dual E' de E dans le cas topologique, et les paragraphes 3 et 4 contiennent diverses applications, lorsque E est intercomplet ou complet.

1. Espaces de représentation algébrique.

Notations 1. - Dans ce paragraphe, E désignera un espace vectoriel réticulé sur R, et E^+ son cône positif ; on se reportera à [11], [15], et [18] pour certaines définitions et propriétés classiques concernant ces espaces.

Soit Ω un espace localement compact ; on note $C_K(\Omega)$ l'espace vectoriel réticulé des fonctions continues à support compact sur Ω, $C(\Omega)$ l'espace vectoriel réticulé des fonctions continues sur Ω.

$C^\infty(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\overline{R}$ finies sur un ensemble dense de Ω.

Définition 2.

Une suite $(f_n)_{n\in N}$ d'éléments de E est dite e-uniformément-convergente vers f, si pour un élément e de E^+,

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_0 \in N , \forall n \geq n_0 , |f - f_n| \leq \varepsilon e .$$

Une suite $(f_n)_{n\in N}$ d'éléments de E est dite e-uniformément de Cauchy, si

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_1 \in N , \forall n , m \geq n_1 , |f_m - f_n| \leq \varepsilon e .$$

E est dit uniformément complet, si, pour tout élément e de E^+, toute suite

---

(*) Pour plus de détails sur les démonstrations résumées ou omises ici, nous prions le lecteur de bien vouloir se reporter à notre thèse de 3e cycle [12].

e-uniformément de Cauchy est e-uniformément convergente.

On remarque que ces propriétés sont purement algébriques et ne font intervenir que la structure d'ordre sur E. Des exemples d'espaces uniformément complets sont les espaces σ-complètement-réticulés, et les espaces $C_K(\Omega)$ et $C(\Omega)$ pour Ω localement compact.

Définition 3. - Un espace localement compact Ω est dit espace de représentation algébrique de E s'il existe un isomorphisme d'espaces ordonnés entre $C_K(\Omega)$ et un idéal d'ordre dense pour l'ordre de E. Si, de plus, Ω est une somme topologique de compacts, Ω sera dit espace de représentation algébrique fort de E.

Par la suite on identifiera, pour simplifier les notations, $C_K(\Omega)$ à l'idéal d'ordre de E auquel il est isomorphe.

THÉORÈME 4. - Pour un espace vectoriel réticulé archimédien E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E possède un espace de représentation algébrique Ω,

(ii) Il existe dans E un idéal d'ordre, dense pour l'ordre, et uniformément complet.

Démonstration. - Il est clair que (i) implique (ii). L'implication inverse résulte de l'existence dans E, d'après [11] (p. 163, théorème 28), d'un système orthogonal maximal, c'est-à-dire d'une famille $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'éléments de E^+, telle que $|x| \wedge u_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in A$, entraîne $x = 0$. On identifie, à l'aide de [11] (p. 308, théorème 49-4), l'idéal d'ordre I, engendré par les $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$, aux fonctions continues à support compact sur un espace localement compact.

Notations 5.

(a) D'après PAPERT ([14], p. 115, théorème 3), pour qu'un espace vectoriel réticulé et normé E soit isomorphe pour l'ordre et pour la norme à $C_K(\Omega)$, Ω localement compact, il faut et il suffit qu'il ait les propriétés suivantes :

(i) $(x , y \geq 0) \Rightarrow (\|x \vee y\| = \sup(\|x\| , \|y\|))$,

(ii) Il existe une famille filtrante croissante d'éléments de E^+, $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ tels que

$$e_\alpha > 0 , \quad \|e_\alpha\| = 1 , \quad \forall \alpha \in A ,$$

$$(\alpha < \beta) \Rightarrow (e_\alpha \leq e_\beta) ,$$

$$(\alpha < \beta , \quad \alpha < \gamma) \Rightarrow (e_\alpha \wedge (e_\beta - e_\gamma) = 0) ,$$

(iii) $(\|x\| = 1) \Rightarrow (\exists \alpha \in A , \quad |x| \leq e_\alpha)$,

(iv) Si $(x_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy telle que, pour tout n, $|x_n| \leq y$, alors x_n converge.

(b) Si E est un espace vectoriel réticulé ayant un espace de représentation algébrique Ω , alors $C_K(\Omega)$ est un idéal d'ordre dense pour l'ordre de E , vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv). On notera, pour tout x de E^+ ,

$$x_{n,\alpha} = x \wedge ne_\alpha \ , \quad \forall\, n \in N \ , \quad \forall\, \alpha \in A \ .$$

D'après [11] (p. 114, théorème 22-3), $\forall\, x \in E^+$,

$$x = \sup_{n\in N,\alpha\in A} x \wedge ne_\alpha = \sup_{n\in N,\alpha\in A} x_{n,\alpha} \ .$$

THÉORÈME 6. - Soit E un espace vectoriel réticulé archimédien possédant un espace de représentation algébrique Ω : il existe un isomorphisme i d'espaces ordonnés de E dans $C^\infty(\Omega)$ tel que

$$C_K(\Omega) \subset iE \subset C^\infty(\Omega) \ .$$

Démonstration. - On définit, d'après les notations 5, pour tout $x \in E^+$,

$$x = \sup_{n\in N,\alpha\in A}(x_{n,\alpha})$$

comme fonction numérique sur Ω . On démontre que x est une fonction continue, et, E étant archimédien, finie sur un ouvert dense. Cette représentation s'étend à tout E , et on vérifie qu'elle est linéaire, bijective et bipositive.

Remarques 7.

(a) Le théorème 6 est analogue à ceux de JOHNSON-KIST ([10] et [11]) et de YOSIDA. Nous avons fait l'hypothèse supplémentaire que E possède un espace de représentation algébrique pour nous assurer que

$$C_K(\Omega_A) \subset iE \subset C^\infty(\Omega_A) \ .$$

(b) Nous avons donné, au théorème 4, la construction canonique d'un espace de représentation algébrique fort. C'est à partir de cette construction que VULIKH [18], pour les espaces complètement réticulés, et HACKENBROCK [8], pour les espaces σ-complètement-réticulés, démontrent ce théorème. Nous nous sommes inspirés de leur méthode, pour des espaces réticulés archimédiens généraux, méthode qui évite de faire appel à la théorie des idéaux maximaux ou premiers comme à celle des valuations ([17], §1).

THÉORÈME 8. - Soient Ω et Ω' deux espaces de représentation algébrique d'un espace vectoriel réticulé archimédien E ; il existe un homéomorphisme entre une partie ouverte dense de Ω et une partie ouverte dense de Ω' .

Démonstration.

(a) Soit I (resp. I') l'idéal dense pour l'ordre de E , isomorphe à $C_K(\Omega)$ (resp. $C_K(\Omega')$) ; $I \cap I'$ est aussi un idéal d'ordre de E dense pour l'ordre dans E , et nous allons montrer qu'il existe un espace localement compact Ω'' tel que $I'' = I \cap I'$ soit isomorphe pour l'ordre à $C_K(\Omega'')$.

(i) Si Ω et Ω' sont des espaces de représentation algébrique forts, I et I' sont les idéaux d'ordre engendrés par des systèmes orthogonaux maximaux soit

$(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(V_j)_{j\in G}$, et sont uniformément complets. L'idéal I'' est engendré par $(u_\alpha \wedge V_\gamma)_{\alpha,\gamma\in A\times G}$, donc, d'après la démonstration, (ii) $\Rightarrow$ (i) du théorème 4, il y a un isomorphisme d'espaces ordonnés entre I'' et $C_K(\Omega'')$, où Ω'' est un espace localement compact somme directe topologique de compacts.

(ii) Si Ω et Ω' sont quelconques, considérons les familles $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(f_\beta)_{\beta\in B}$, possèdant les propriétés des notations 5 (a), et I'' l'idéal engendré par les $(e_\alpha \wedge f_\beta)_{\alpha,\beta\in A\times B}$. On montre alors que, I'' , normé par $\|x\|=\sup(\|x\|_A,\|x\|_B)$ où $\|x\|_A$ est la norme de x dans I , et $\|x\|_B$ celle de x dans I' , possède les propriétés des notations 5 (a) avec la famille,

$$\{(e_\alpha \wedge f_\beta)_{\alpha,\beta\in A\times B} \| e_\alpha \wedge f_\beta\| = 1\} .$$

(b) Ω'' est isomorphe à un ouvert dense de Ω et de Ω' . En effet, I'' , isomorphe à $C_K(\Omega'')$, se prolonge dans un idéal d'ordre dense pour l'ordre de I , isomorphe à $C_K(\Omega)$, par homomorphisme injectif et bipositif. Soit

$$T = \{t \in \Omega \ ; \ \exists\, x \in I'' , \ x(t) > 0\} .$$

T est un espace localement compact, ouvert et dense dans Ω . De plus, il y a un isomorphisme d'espaces ordonnés entre $C_K(T)$ et $C_K(\Omega'')$. D'après [13] (p. 109, théorème 4), T et Ω'' sont homéomorphes. De même, une partie ouverte dense T' de Ω' est homéomorphe à Ω'' . T et T' sont donc homéomorphes.

Remarques 9.

(a) Il n'y a pas de résultats plus forts, même si Ω et Ω' sont compacts, comme on le voit dans [15], §1.

(b) Le (a) (ii) du théorème 11 contient le (a) (i), mais la démonstration permet de donner des applications simples.

D'après VULIKH ([18], V, 4-2), un espace vectoriel complètement réticulé est isomorphe algébriquement et, pour l'ordre, à un idéal dense de $C^\infty(Q)$, où Q est un compact stonien.

On peut montrer très simplement à partir du théorème 11, l'unicité de ce compact que VULIKH montre à l'aide des propriétés des bandes :

Si Q et Q' sont deux tels compacts, d'après [13] (lemme 12), il existe deux espaces de représentation algébrique Ω et Ω' denses dans Q et Q' ; d'après le théorème 11, deux parties ouvertes denses de Ω_1 et Ω'_1 de Ω et Ω' sont homéomorphes. Q et Q' étant stoniens, on a alors :

$$\beta\Omega_1 = \beta\Omega'_1 = \beta\Omega = \beta\Omega' = Q = Q' \quad ([4], 6.M, p. 96).$$

On peut montrer des résultats analogues pour les espaces σ-réticulés à unité faible (Un élément de E^+ , soit e tel que $(|x| \wedge e = 0) \Rightarrow (x = 0)$).

Il peut être intéressant d'étudier dans quelle mesure l'image de E dans $C^\infty(\Omega)$ est un idéal d'ordre de $C^\infty(\Omega)$; il est clair que cette propriété dépend du choix de l'espace de représentation de E .

Exemples 10.

(a) Si E est complètement réticulé, alors, pour tout système orthogonal maximal de E, on obtient, si Ω est l'espace localement compact somme de compacts correspondants, un idéal de $C^\infty(\Omega)$ par la représentation du théorème 8.

(b) Si E est σ-complètement-réticulé et si E possède un système orthogonal maximal tel que, pour tout x de E, le cardinal de $\{\alpha \in A\ ;\ |x| \wedge u_\alpha \neq 0\}$ soit dénombrable, tout élément positif de E s'écrit comme supremum dénombrable de fonctions à support compact.

Ceci se produit en particulier si E possède une unité faible ou un système orthogonal maximal composé d'une famille dénombrable d'éléments deux à deux disjoints.

Nous n'avons pas trouvé cependant d'exemples d'espaces σ-complètement-réticulés qui ne se représentent sur aucun espace de représentation algébrique Ω, comme un idéal de $C^\infty(\Omega)$.

2. Espaces de représentation topologique.

Notations 11. - Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel réticulé. On supposera que E^b, l'espace vectoriel réticulé des formes linéaires relativement bornées sur E, sépare les points de E.

On a $E^b = E^b_+ - E^b_+$, où E^b_+ est le cône convexe des formes linéaires positives sur E. Un tel espace est archimédien d'après [9] (p. 79, 3.1).

On munit E d'une topologie localement convexe, localement solide τ, c'est-à-dire d'une topologie de "locally convex lattice" selon la terminologie en usage dans [9], [15] et [16], auxquels nous nous reporterons.

Le dual de E pour la topologie τ est un idéal de E^b, et une bande si τ est tonnelée, d'après [16] (7.4, p. 237). Nous serons amenés à considérer la topologie de l'ordre τ_0 sur E, c'est-à-dire la topologie localement convexe et solide la plus fine pour laquelle tout intervalle d'ordre est borné : c'est aussi, d'après [16] (6.4, p. 233), la topologie de Mackey sur E associée à E^b.

Définition 12. - Un espace localement compact Ω est dit τ-espace de représentation topologique de E s'il existe un isomorphisme d'espaces ordonnés entre $C_K(\Omega)$ et un idéal τ-dense de E. Si, de plus, Ω est somme topologique de compacts, Ω sera dit τ-espace de représentation topologique fort.

LEMME 13. - *Soit Ω un espace de représentation algébrique de E, avec les notations 5, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Ω *est un* τ-*espace de représentation topologique* ;

(ii) $\forall\ x \in E^+$, $x = \tau - \lim_{n\in N,\alpha\in A} x_{n,\alpha}$,

(iii) $\forall\ f \in (E', \tau)^+$, $f(x) = \sup_{n\in N,\alpha\in A} f(x_{n,\alpha})$.

Démonstration. - Il est facile de voir qu'un idéal τ-dense, F de E, est un idéal dense pour l'ordre de E, donc qu'un τ-espace de représentation topologique est aussi algébrique. Il est clair que (ii) $\Longrightarrow$ (i) et que (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

(a) (iii) $\Longrightarrow$ (ii) : En effet, d'après [16] (7.4, p. 237), $E' = E'_+ - E'_+$.

Si, $\forall\ f \in (E', \tau)^+$, $f(x) = \sup_{n\in N, \alpha\in A} f(x_{n,\alpha})$, $(x_{n,\alpha})_{n\in N, x\in A}$ est un filtre de Cauchy croissant qui converge vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. D'après [16] (4.3, p. 233), $(x_{n,\alpha})$ converge aussi vers son suprémum x pour la topologie τ.

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii) : Soit $x \in E^+$; x est limite d'un filtre de Cauchy $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de l'idéal F dense dans E ; on peut supposer, τ étant localement solide, que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante croissante de $E^+ \cap F$, majorée par x. Or si $0 \leq x_i \leq x$ et $x_i \in F$, $\exists\ n\in N$, et $\alpha \in A$ tels que $0 \leq x_i \leq x_{n,\alpha} \leq x$. On en déduit que $(x_{n,\alpha})_{n\in N, x\in A}$ converge aussi vers son suprémum x pour la topologie τ.

Remarques 14.

(a) Si Ω est un τ-espace de représentation topologique (resp. fort), Ω est un espace de représentation algébrique (resp. fort).

(b) Pour toute topologie τ', localement convexe localement solide compatible avec τ, un τ-espace de représentation topologique est aussi un τ'-espace d'après le lemme 13.

THÉORÈME 15. - Si E possède un τ-espace de représentation topologique Ω, il y a un isomorphisme d'espaces ordonnés entre $E' = (E, \tau)'$ et un idéal $\hat{E}'$ de $M(\Omega)$, l'espace vectoriel réticulé des mesures de Radon sur Ω, et $\hat{E}'$ est dense dans $M(\Omega)$ pour la topologie faible $\sigma[M(\Omega), C_K(\Omega)]$.

Démonstration. - D'après le théorème 6 et la remarque 14 (a), E se représente comme fonctions continues de Ω dans $\overline{R}$ finies sur un ensemble dense. Avec les notations 5 et le lemme 13 :

$$\forall\ x \in E^+, \quad \forall\ \mu \in E'_+, \quad \mu(x) = \sup_{n\in N, \alpha\in A} \mu(x_{n,\alpha}),$$

ce qui peut s'écrire, dans $C^\infty(\Omega)$, par l'isomorphisme :

$$\forall\ f \in (iE)^+, \quad \mu(f) = \sup_{n\in N, \alpha\in A} \mu(f_{n,\alpha}) = \sup_{0 \leq g \leq f, g\in C_K(\Omega)} \mu(g).$$

On en déduit que μ est un élément de $M_E(\Omega)$, l'idéal de $M(\Omega)$ constitué des mesures intégrant toutes les fonctions de iE. Soit

$$E_1'^+ = \{\mu \in E_+^b ; \quad \forall\ x \in E^+, \quad \mu(x) = \sup_{n\in N, \alpha\in A} \mu(x_{n,\alpha})\},$$

et posons $E'_1 = E_1'^+ - E_1'^+$.

Il est clair qu'il y a un isomorphisme d'espaces ordonnés entre E'_1 et $M_E(\Omega)$, et que E'_1 est un idéal de E'. D'après [16] (7.4, p. 237), E' est un idéal de

E^b ; E' est donc aussi un idéal de E'_1 , isomorphe à $M_E(\Omega)$, idéal de $M(\Omega)$; on en conclut qu'il y a un isomorphisme d'espaces ordonnés entre E' et un idéal de $M(\Omega)$, contenu dans $M_E(\Omega)$.

De plus, par dualité, il est facile de voir que cet idéal est faiblement dense dans $M(\Omega)$.

Le théorème 15 a permis de représenter non seulement le dual E' de E comme un idéal de mesures de Radon, mais aussi E'_1 . Si $E' = E^b$ et, en particulier, si $\tau = \tau_0$, la topologie de l'ordre sur E , on peut écrire le résultat suivant.

COROLLAIRE 16. - Si E possède un τ_0-espace de représentation topologique, alors E^b est bipositivement isomorphe à l'idéal de $M(\Omega)$ constitué des mesures intégrant toutes les fonctions de $iE \subset C^\infty(\Omega)$.

Remarque 17. - L'existence de τ-espaces de représentation topologique nécessite celle d'espaces de représentation algébrique, mais il est clair qu'un espace de représentation n'est pas en général topologique.

3. Intercomplétion.

(A) Définitions et applications.

Dans les théorèmes 4 et 6, nous avons représenté E comme espace vectoriel de fonctions continues finies sur un ensemble dense, sur un espace localement compact Ω . Nous nous intéresserons ici aux propriétés de cet espace vectoriel, en introduisant la notion topologique d'intercomplétion, due à G. CHOQUET. Nous supposerons toujours ici que E est un espace vectoriel réticulé muni d'une topologie τ localement convexe et solide.

Définition 18. - On dit qu'un espace E est τ-intercomplet si tout filtre de Cauchy pour la topologie faible $\sigma(E , E')$, ayant une base formée d'intervalles d'ordre, converge faiblement vers un point e de E .

On peut encore écrire cette définition comme suit :

Si A (resp. B) est une famille filtrante croissante (resp. décroissante) de points de E , telle que :

$$\sup[L(a) \ , \ a \in A] = \inf[L(b) \ , \ b \in B] \ , \ \forall \ L \in E'_+ \ ,$$

il existe un élément e de E tel que $a \leq e \leq b$, $\forall\ a \in A$, $\forall\ b \in B$.

Remarque 19.

(a) Cette définition est une généralisation de [7] (Déf. 7), où $E'_+ = E^b_+$.

(b) Pour toute topologie localement convexe solide, τ' , compatible avec τ , un espace τ-intercomplet est τ'-intercomplet : l'intercomplétion ne dépend que de E'_+ .

PROPOSITION 20. - <u>Un espace</u> τ-<u>intercomplet est uniformément complet.</u>

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de voir que pour tout u de E^+, l'idéal E_u, engendré par u, est complet pour la norme jauge de u. D'après [5] (7.4.5), E_u est un isomorphisme d'espaces ordonnés avec un sous-espace vectoriel réticulé, uniformément dense de $C(K_u)$, où K_u est compact. D'après [5] (7.4.5.2), toute fonction de $C(K_u)$ est limite uniforme de suites croissante et décroissante d'éléments de E_u. On a donc

$$a_n \leq e \leq b_n \ , \quad e \in C(K_u) \ , \quad a_n \ , \ b_n \in E_u \ ,$$

et

$$\forall\ n \geq n_0 \ , \quad |b_n - a_n| \leq |b_n - e| + |e - b_n| \leq \frac{\varepsilon u}{2} + \frac{\varepsilon u}{2} \leq \varepsilon u$$

ce qui permet de conclure par l'intercomplétion que e est un élément de E_u.

PROPOSITION 21. - <u>Si</u> E <u>est</u> τ-<u>intercomplet, et</u> a <u>un</u> τ-<u>espace de représentation topologique, alors, par le théorème</u> 6, iE <u>est un idéal de</u> $C^\infty(\Omega)$.

<u>Démonstration</u>. - On reprend les notations 5 et celles du lemme 13, Soit $0 \leq g \leq f$, $f \in (iE)^+$ et $g \in C_+^\infty(\Omega)$. Avec les notations du théorème 6, soit $g_{n,\alpha} = g \wedge ne_\alpha$ et $f_{n,\alpha} = f \wedge ne_\alpha$. On a $f_{n,\alpha} = ix_{n,\alpha}$, $f = ix$, et $x = \tau - \lim x_{n,\alpha}$. Puisque $g_{n,\alpha} \in C_K(\Omega)$, il existe $y_{n,\alpha}$ dans E^+ tel que $g_{n,\alpha} = iy_{n,\alpha}$. On montre que les familles $(x_{n,\alpha} - y_{n,\alpha})$ et $(x - y_{n,\alpha})$, $\alpha \in A$, $n \in \underline{N}$ sont respectivement filtrantes croissantes et décroissantes avec n et α, et que

$$\sup_{n,\alpha} L(x_{n,\alpha} - y_{n,\alpha}) = \inf_{n,\alpha} L(x - y_{n,\alpha}) \ ;$$

on conclut par l'intercomplétion.

<u>Définition</u> 22. - Dans un espace vectoriel réticulé E, on appelle <u>unité faible</u> un élément e de E^+ tel que $|x| \wedge e = 0$ entraîne $x = 0$ (Une unité faible est un système orthogonal maximal réduit à un point.). Si, de plus, (E, τ) est localement convexe, localement solide, on appelle <u>point</u> τ-<u>quasi-intérieur</u> une unité faible qui engendre un idéal τ-dense.

Il est clair qu'il y a bijection entre la classe des points τ-quasi-intérieurs et celle des τ-espaces de représentation <u>compacts</u>.

THEOREME 23. - <u>Si</u> E <u>est</u> τ-<u>intercomplet, et</u> a <u>un point</u> τ-<u>quasi-intérieur, tous les</u> τ-<u>espaces de représentation topologique compacts sont homéomorphes</u>.

<u>Démonstration</u>. - On reprend celle de Schaeffer dans [17] avec la τ-intercomplétion.

<u>Remarque</u> 24. - On peut relier les résultats obtenus sur les espaces localement convexes, localement solides, avec point τ-quasi-intérieur à la représentation des cônes biréticulés ayant une base ([5], ch. 3). En effet, d'après [7] (théorème 3), pour qu'un cône convexe faiblement complet X soit biréticulé, il faut et il

suffit qu'il soit un prédual réticulé, c'est-à-dire qu'il existe une bijection linéaire bicontinue de X sur le cône E_b^+ des formes linéaires positives sur un espace vectoriel réticulé E, E_b^+ étant muni de la topologie faible. De plus ([7], théorème 9), pour que E soit isomorphe à $L_c(E_b^+)$ en tant qu'espace vectoriel ordonné, il faut et il suffit que E soit τ_0-intercomplet (où τ_0 est la topologie de l'ordre).

On déduit donc la représentation (donnée au théorème 3.27 de [5]) du théorème 8, pour la représentation de $L_c(X)$, du théorème 18, pour celle de X comme idéal de mesures de Radon, et du théorème 27, pour l'unicité du compact de représentation.

(B) Critères d'intercomplétion et contre-exemples.

THÉORÈME 25. - *Si E est τ-complet pour une topologie τ localement convexe et solide, E est τ-intercomplet.*

Démonstration. - On utilise la deuxième forme de la définition 18 ([9], 1.7.3, p. 29) et [16] (Cor. 2, p. 149).

Exemples 26.

(a) Un espace τ_0-intercomplet et non τ_0-complet. - Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini, et $t \in \beta X - X$, où βX est le compactifié de Stone-Čech de X. On pose $\Omega = X - \{t\}$. Alors, d'après [1] (1.1, exercice 2), $C_K(\Omega)$ n'est pas complet pour la topologie limite inductive des (E_K), K parcourant les compacts de Ω, et E_K étant l'espace de Banach des fonctions continues sur Ω à support dans $\complement K$, normé par la norme uniforme.

Cette topologie s'identifie en fait, d'après [1] (1.1, ex. 2), à la topologie de la convergence uniforme sur Ω. Or, d'après [15] (exemple 3, p. 236), c'est aussi la topologie de l'ordre sur $C_K(\Omega)$. Il est clair que $C_K(\Omega)$ est intercomplet. On a donc mis en évidence un espace τ_0-intercomplet, non complet pour la topologie de l'ordre.

(b) Un espace uniformément complet non τ-intercomplet. - Cet exemple, dû à G. CHOQUET, nous a été communiqué par A. GOULLET de RUGY. Soit E l'espace vectoriel des fonctions f, définies sur $[0, 1]$, hors d'un ensemble dénombrable D_f majorées en valeur absolue par une somme finie $\sum_{i=1}^{i=n} (1/(|x - a_i|))\alpha_i$, où $0<\alpha_i<1$, et $a_i \in [0, 1]$, et $a_i \in D_f$, et continues en tout point du complémentaire de D_f. E est réticulé pour l'ordre ordinaire et uniformément complet. De plus, on démontre que toute forme linéaire positive sur E s'identifie à une mesure de Radon positive unique sur $[0, 1]$, qui ne charge pas K, l'ensemble de Cantor. Soit alors α une fonction définie sur $[0, 1]$, nulle sur K, avec $-1 < \alpha < 1$, continue en tout point de K, mais n'ayant de limite en aucun point de K, alors, pour tout $\mu \in E'_+$,

$$\mu(\alpha) = \lim \mu(f_i) = \lim \mu(g_j) ,$$

où les f_i et g_j sont les filtres croissants et décroissants des fonctions continues et bornées sur $[0\ ,\ 1]$, minorant et majorant α . Alors, si E était intercomplet, E contiendrait α .

Nous n'avons pas trouvé d'espaces σ-complètement réticulés, non intercomplets.

PROPOSITION 27 ([7], Prop. 10). - Un espace vectoriel réticulé F est isomorphe à $L_c(E_b^+)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur E_b^+ si, et seulement si :

(a) F est intercomplet,

(b) Il existe une injection i de E dans F , conservant l'ordre, telle que

i(E) est cofinal dans F ,

i(E) est dense dans F pour la topologie $\sigma(F\ ,\ F^b)$.

THÉORÈME 28. - Soit E un espace vectoriel réticulé, muni de la topologie de l'ordre τ_0 , supposée séparée ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est intercomplet,

(ii) Par le plongement canonique de E dans $\tilde{E}$, le complété de E pour la topologie d'ordre, E est un idéal de $\tilde{E}$,

(iii) Tous les intervalles d'ordre de E sont τ_0-complets.

Démonstration. - C'est une conséquence de [9] (1.4.1, p. 24), et de [3] (1.4, p. 137).

4. Applications diverses.

THÉORÈME 29. - Si E est τ-complet, et possède un τ-espace de représentation topologique, E est en isomorphisme bicontinu d'espaces ordonnés avec la complétion de $C_K(\Omega)$, pour une topologie définie par une famille de semi normes $(P_i)_{i\in I}$ telles que

$$P_i(f) = \sup_{\mu\in K_i} \mu(|f|)\ ,$$

où les K_i sont des convexes compacts héréditaires de $\mathfrak{M}^+(\Omega)$, engendrant un idéal dense de $\mathfrak{M}^+(\Omega)$.

Démonstration. - C'est une conséquence de [16] (cor. 4, p. 127), de [9] (1.7.3, p. 29), et du théorème 15.

COROLLAIRE 30. - Si E est complet pour la topologie de l'ordre, et a un espace de représentation Ω pour cette topologie, il y a un isomorphisme bicontinu d'espaces ordonnés entre E et la complétion de $C_K(\Omega)$ pour la topologie de Mackey, définie par la dualité entre iE et $M_E(\Omega)$, l'idéal de $M(\Omega)$, espace vectoriel des mesures de Radon intégrant toutes les fonctions de iE .

Démonstration. - C'est une conséquence du théorème précédent et du corollaire 16.

Remarque 31. - D'après [9] (p. 134), tout espace de Fréchet réticulé et normal pour une topologie τ est tel que $\tau = \tau_0$ la topologie de l'ordre.

Le corollaire 37 s'applique donc à ces espaces et, en particulier, aux "Banach lattices" dont les représentations fortes (Définition 15) sont étudiées dans [17] (Théorème 2).

Exemple 32. - Soit A un M-espace de Kakutani possédant un espace de représentation topologique Ω. Alors, il y a isomorphisme bicontinu d'espaces de Banach ordonnés entre A et

$$\mathcal{C}_\varphi(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \ , \ \forall\ \varepsilon > 0 \ , \ \exists\ h \in C_K^+(\Omega) \ , \ |f| \leq \varepsilon\varphi + h\} \ ,$$

où φ est une fonction semi continue inférieurement strictement positive sur Ω, et où $\mathcal{C}_\varphi(\Omega)$ est normé par

$$\|f\| = \sup_{x\in\Omega} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)} \ .$$

On montre aussi qu'alors le structurel de A est homéomorphe à une partie dense de Ω. Puisque, d'après [6] (théorème 3.41 et Prop. 3.42), il existe des M-espaces à structurel non régulier, on met ainsi en évidence des espaces de Banach réticulés, localement solides, sans espace de représentation topologique.

Définition 33. - Dans un espace vectoriel réticulé E, localement convexe, et solide pour une topologie τ, on appelle τ-système orthogonal topologique, un système orthogonal maximal engendrant un idéal τ-dense.

Il est clair, d'après le théorème 4, que l'existence d'un tel système est équivalente à celle d'un τ-espace de représentation topologique fort (Définition 12).

Définition 34. - On dit qu'un espace vectoriel réticulé, E possède la propriété σ si, pour toute suite $(u_n)_{n\in N}$, d'éléments de E^+, il existe un élément u de E^+, et une suite $(\lambda_n)_{n\in N}$ de R^+ tels que

$$0 \leq u_n \leq \lambda_n u \ , \ \forall\ n \in N \ .$$

PROPOSITION 35. - Dans un espace τ-intercomplet, possédant la propriété σ, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un τ-espace de représentation topologique fort,

(ii) Il existe un τ-espace de représentation topologique paracompact.

COROLLAIRE 36. - Soit E un espace τ-intercomplet, possédant la propriété σ ; si E a un espace de représentation topologique dénombrable à l'infini, E a un point τ-quasi-intérieur et un espace de représentation topologique compact.

Remarque 37. - Ces résultats généralisent celui de [17] (Prop. 6). Il est facile de voir qu'un espace de Fréchet réticulé normal possède la propriété σ (et est intercomplet d'après le théorème 25).

Cependant, si E ne possède pas la propriété σ , la proposition 35 n'est pas toujours vraie, même si E est complet pour la topologie de l'ordre :

$C_K(R)$ n'a pas d'espace de représentation topologique fort pour la topologie de l'ordre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chap. 1 à 4, 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[2] BOURBAKI (N.). - Topologie générale, Chap. 1 et 2, 4e édition. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1142 ; Bourbaki, 2).

[3] DUHOUX (M.). - Le complété d'un treillis localement solide, Bull. Soc. math. Belgique, t. 24, 1972, p. 133-151.

[4] GILLMANN (L.) and JERISON (M.). - Rings of continous functions. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (University Series in higher Mathematics).

[5] GOULLET de RUGY (A.). - La théorie des cônes biréticulés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 21, 1971, fasc. 4, p. 1-64.

[6] GOULLET de RUGY (A.). - La structure idéale des M-espaces, J. Math. pures et appl., t. 51, 1972, p. 331-373.

[7] GOULLET de RUGY (A.). - Une nouvelle définition des cônes biréticulés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[8] HACKENBROCK (W.). - Zur Darstellungstheorie σ-vollständiger Vektorverbände, Math. Z., t. 128, 1972, p. 115-128.

[9] JAMESON (G.). - Ordered linear spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 141).

[10] JOHNSON (D. G.) and KIST (J. E.). - Rime ideals in vector lattices, Canad. J. of Math., t. 20, 1968, p. 517-528.

[11] LUXEMBURG (W. A. J.) and ZAANEN (A. C.). - Riesz spaces. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1971.

[12] MEYER (Mathieu). - Représentations fonctionnelles des espaces vectoriels réticulés, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Paris VI, 1974.

[13] MEYER (Mathieu). - Un théorème de représentation des L^p-espaces (à paraître).

[14] PAPERT (D.). - A representation theory for lattice-groups, Proc. London math. Soc., t. 12, 1962, p. 100-120.

[15] PERESSINI (A. L.). - Ordered topological vector spaces. - New York, Harper and Row, 1967 (Harper's Series in modern Mathematics).

[16] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces, 3rd printing. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).

[17] SCHAEFER (H. H.). - Representation of Banach lattices of continuous functions, Math. Z., t. 125, 1972, p. 215-232.

[18] VULIKH (B. Z.). - Introduction to the theory of partially ordered spaces. English Translations. - Groningen, Walters-Noordhoff, 1967.

(Texte reçu le 10 juin 1974)

Mathieu MEYER
2 rue Tronchet
75008 PARIS