Gustave Choquet

Sur un théorème du type Banach-Steinhaus pour les convexes topologiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. nº C4, p. C1-C5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A19_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, Communication n° 4, 5 p.

SUR UN THÉORÈME DU TYPE BANACH-STEINHAUS POUR LES CONVEXES TOPOLOGIQUES

par Gustave CHOQUET

Dans un exposé récent, Michèle MASTRANGELO [1] a énoncé un théorème du type Banach-Steinhaus pour le dual conique d'un cône convexe topologique. Nous allons reprendre ici cette idée, en simplifiant les hypothèses, en remplaçant les cônes convexes par des convexes généraux, et $\underset{\sim}{R}$ par un e. v. t. quelconque.

L'outil de base de cette généralisation sera la notion de point topologiquement interne d'un convexe topologique.

Pour terminer nous montrerons par un exemple que les convexes topologiques, même tirés de l'Analyse classique, peuvent ne pas être plongeables dans des e. v. t.

DÉFINITION 1. - On appelle convexe tout ensemble X muni d'une application

$$\varphi : \quad (x , y , \alpha) \dashrightarrow (\alpha x + (1 - \alpha)y) \quad \text{de} \quad X \times X \times [0 , 1]$$

dans X, définie canoniquement à partir d'une injection de X sur une partie convexe d'un espace vectoriel sur $\underset{\sim}{R}$.

Pour tout $a \in X$ et tout $\alpha \in [0 , 1]$, on notera $h(a , \alpha)$ l'homothétie $x \dashrightarrow \alpha x + (1 - \alpha)a$ de X dans lui-même ayant pour centre a et pour rapport α.

DÉFINITION 2. - On appelle convexe topologique tout convexe X muni d'une topologie telle que l'application canonique φ de l'espace topologique $X \times X \times [0,1]$, dans X soit continue.

Chacune des homothéties $h(a , \alpha)$ est alors continue.

DÉFINITION 3. - Pour un convexe topologique X, un point $a \in X$ est dit topolo-logiquement interne (top. int.) si, pour tout $\alpha \in]0 , 1]$ et pour tout $V \in \mathcal{V}_a$, on a aussi $h(a , \alpha)(V) \in \mathcal{V}_{(a)}$.

Il est utile d'observer, pour l'étude de cette notion, qu'un point top. int. de X ne peut pas être point d'accumulation de points extrémaux de X.

Exemples.

1° Pour un convexe compact polyédral X de $\underset{\sim}{R}^n$, tout point de X est top. int.; plus généralement, il en est de même de tout convexe fermé de $\underset{\sim}{R}^n$ qui est polyédral en ce sens que l'ensemble de ses points extrémaux est fermé-discret et que son cône asymptote est intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

On démontre qu'inversement, tout convexe fermé et localement compact d'un

e. l. c. s., dont tout point est top. int., est de dimension finie et polyédral (pour un X compact, ceci résulte de la remarque qui suit la définition 3).

2° Dans un ouvert convexe d'un e. v. t., tout point est top. int.

3° Dans $\ell^2(\underset{\sim}{N})$, muni de la topologie faible, l'enveloppe convexe de la boule unité et d'un point extérieur à cette boule, admet ce point comme seul point top. int.

Plus généralement, dans un convexe compact X, tout point isolé de l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux est top. int. dans X.

PROBLÈME 4. - Déterminer les convexes topologiques plongeables dans un e. l. c. s., et dont tout point soit top. int.

Pour démontrer le théorème 11 du type Banach-Steinhaus, nous aurons besoin de plusieurs lemmes.

DÉFINITION 5. - Soit $(\ell_i)_{i\in I}$ une famille d'applications (pas nécessairement continues) d'un espace topologique X dans un e. v. t. Y (sur $\underset{\sim}{R}$) ; soit $a \in X$ et soit V un voisinage de 0 dans Y. On dit que cette famille est V-bornée au voisinage du point a, s'il existe un voisinage U de a dans X tel que $\bigcup_i \ell_i(U)$ soit absorbé par V.

On dit que la famille est bornée au voisinage de a, si elle est V-bornée pour tout $V \in \mathcal{V}(0)$.

Si la famille est bornée au voisinage de a, évidemment $\{\ell_i(a) \ ; \ i \in I\}$ est une partie bornée de Y. Par contre, il est rare que $\bigcup_i \ell_i(U)$ soit un ensemble borné, même si la famille se réduit à une seule ℓ continue.

LEMME 6. - Si une famille (ℓ_i) d'applications affines d'un convexe topologique X dans un e. v. t. Y est V-bornée (resp. bornée) au voisinage d'un point de X, elle l'est aussi au voisinage de tout point de X.

Preuve. - Donnons-nous $a, b \in X$, et supposons que la famille donnée soit V-bornée au voisinage de a.

Soit W équilibré appartenant à $\mathcal{V}(0)$ tel que $W + W \subset V$; par hypothèse, il existe $A \in \mathcal{V}_{(a)}$ tel que $\mathfrak{A} = \bigcup_i \ell_i(A)$ soit absorbé par W.

D'après la continuité des homothéties $h(a, \alpha)$, il existe un $\alpha \in]0, 1]$ et un voisinage $B \in \mathcal{V}_b$ tel que $h(a, \alpha)(B) \subset A$.

Pour tout $y \in B$, posons : $x = h(a, \alpha)(y) = \alpha y + (1 - \alpha)a$. On en tire, pour tout $i \in I$:

$$\ell_i(x) = \alpha\ell_i(y) + (1 - \alpha)\ell_i(a) ,$$

d'où :

$$\alpha \ell_i(y) = \ell_i(x) - (1-\alpha)\ell_i(a) \in \ell_i(A) - (1-\alpha)\ell_i(A) \; ;$$

on a donc :

$$\mathcal{B} = \cup_i \ell_i(B) \subset \alpha^{-1}\,\mathcal{A} - (\alpha^{-1} - 1)\mathcal{A} \; .$$

Comme $\mathcal{A}$ est absorbé par W, $\mathcal{B}$ est absorbé par $W + W$, donc aussi par V.

LEMME 7. - Si une famille (ℓ_i) d'applications affines d'un convexe topologique X dans un e. v. t. Y est bornée au voisinage d'un point top. int. x de X, cette famille est équicontinue au point x.

Preuve. - Donnons-nous un $V \in \mathcal{V}_{(a)}$; il existe un W équilibré appartenant à $\mathcal{V}_{(a)}$ tel que $W + W \subset V$; par hypothèse, il existe aussi un $A \in \mathcal{V}_{(a)}$ et un scalaire $\alpha > 1$ tel que $\cup_i \ell_i(A) \subset \alpha W$.

Pour tout $i \in I$ et tout $x \in A$, on a donc $\ell_i(x) - \ell_i(a) \in \alpha W - \alpha W \subset \alpha V$. Comme a est top. int., on a $B = h(a, \alpha^{-1})(A) \in \mathcal{V}_{(a)}$. Pour tout $i \in I$ et tout $x \in A$, on a bien $\ell_i(x) - \ell_i(a) \in V$.

COROLLAIRE 8. - Toute fonction affine réelle bornée (au sens usuel) sur X est continue en chacun des points top. int. de X.

Ce corollaire constitue le lien (bien connu dans le cadre des espaces normés) entre continuité et caractère borné des fonctions affines réelles.

LEMME 9. - Soit X un convexe topologique non maigre, et soit (ℓ_i) une famille d'applications affines continues de X dans un e. v. t. Y.

Si pour un $V \in \mathcal{V}_{(a)}$, chacun des ensembles $L(x) = \{\ell_i(x) \; ; \; i \in I\}$ est absorbé par V, la famille (ℓ_i) est V-bornée au voisinage de tout point de X.

Preuve. - Supposons, ce qui ne change rien, que V est fermé et équilibré (remplacer par exemple V par la fermeture du plus grand sous-ensemble équilibré de V).

Pour tout $x \in X$, notons $f(x)$ la borne inférieure des scalaires $\alpha \geq 0$ tels que $L(x) \subset \alpha V$. Par hypothèse, f est partout finie, et on vérifie aisément que f est s. c. i. ; donc puisque X n'est pas maigre, il existe un ouvert non-vide ω de X et un scalaire $k > 0$ tel que $f(\omega) \leq k$. La famille (ℓ_i) est V-bornée au voisinage de chaque point de ω (puisque $L(\omega) \subset kV$), donc aussi au voisinage de chaque point de X, d'après le lemme 6.

Remarque 10. - Pour un e. v. t. X, il revient au même de dire que X est non-maigre ou de Baire ; par contre, nous ignorons si cette équivalence est vraie pour un convexe topologique, d'où le choix dans l'énoncé 9 d'unehypothèse a.priori plus faible. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal.

THÉORÈME 11. - Soit X un convexe topologique non-maigre, et soit (ℓ_i) une famille d'applications affines continues de X dans un e. v. t. arbitraire Y. Si pour tout $x \in X$, $\{\ell_i(x) ; i \in I\}$ est borné dans Y, alors la famille (ℓ_i) est équicontinue en tout point topologiquement interne de X.

Preuve. - Par hypothèse, pour tout $V \in \mathcal{V}_{(0)}$, chacun des $L_{(x)}$ est absorbé par V ; donc d'après le lemme 9, la famille (ℓ_i) est bornée au voisinage de tout point de X ; d'après le lemme 7, elle est équicontinue en tout point top. int.

Remarque 12. - Il n'est pas commode de formuler une généralisation du théorème 11 et des lemmes qui le précèdent à un cadre où l'e. v. t. Y serait remplacé par un convexe topologique.

Une des difficultés vient de ce qu'un convexe topologique Y ne semble muni en général d'aucune structure uniforme naturelle.

PROBLÈME 13. - Etude générale des convexes topologiques, et en particulier de ceux qui sont compacts (par exemple Krein-Milman).

Exemple 14. - Voici un exemple intéressant de cône convexe topologique : X est le cône convexe des fonctions s. c. i. sur $[0 , 1]$, à valeurs dans $\underset{\sim}{R}^+$.

On le munit de la topologie de la convergence "simple s. c. i.", associée à la structure uniforme séparée sur X définie par la famille des écarts δ_x ou $\delta_{[a,b]}$ ainsi définis :

- Pour tout $x \in [0 , 1]$, $\delta_x(f , g) = |f(x) - g(x)|$.
- Pour tout $[a , b] \subset [0 , 1]$, $\delta_{[a,b]}(f,g) = |\inf.f([a,b])-\inf.g([a,b])|$.

Cette structure uniforme n'est pas complète et cependant X est de Baire et même α-favorable. On vérifie que X, muni de la topologie correspondante est bien un convexe topologique, et même un cône convexe topologique, en ce sens que l'application $(x , y , \alpha , \beta) \dashrightarrow (\alpha x + \beta y)$ de $X^2 \times \underset{\sim}{R}_+^2$ dans X est continue. Cette topologie est localement convexe, en ce sens qu'elle admet une base d'ouverts convexes.

Nous allons signaler quelques singularités de cette topologie ; désignons pour cela par f_0 l'élément de X défini par :

$$f_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad f_0(x) = 1/x \quad \text{pour} \quad x \neq 0 .$$

1° La translation $g \dashrightarrow f_0 + g$ qui est une bijection continue de X sur (f_0+X) n'est pas bicontinue ; en effet, soit g_n une fonction continue ≥ 0, valant 1 sur $[1/n , 1]$ et au point 0, avec $g_n(1/2n) = 0$.

La suite $(f_0 + g_n)$ converge vers $f_0 + 1$, et cependant la suite (g_n) ne converge pas vers 1 (en fait elle n'a aucun point adhérent).

2° Posons $X_0 = \{g \in X ; 2f_0 - g \in X\}$. Le convexe X_0 admet pour centre f_0, mais dans ce convexe topologique, la symétrie σ de centre f_0 définie par $g + \sigma(g) = 2f_0$ n'est pas continue.

En effet, avec les notations ci-dessus, alors que la suite (g_n) ne converge pas vers 1, $\sigma(g_n) = (2f_0 - g_n)$ converge vers $(2f_0 - 1)$.

3° L'homothétie $h(2f_0, 1/2)$ de centre $2f_0$, qui est une bijection continue de X sur $(f_0 + X)$, n'est pas bicontinue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MASTRANGELO (Michèle). - Linéarisation de la notion de convexité par rapport à un ensemble de fonctions, 13e année, 1973/74, n° 10, 12 p.

(Texte reçu le 29 novembre 1974)

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92160 ANTONY