JEAN SAINT-RAYMOND

Dérivation par rapport à une application. Existence d'exaves markoviens

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° C2, p. C1-C9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A17_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, Communication n° 2, 9 p.

Décembre 1973

DÉRIVATION PAR RAPPORT À UNE APPLICATION. EXISTENCE D'EXAVES MARKOVIENS

par Jean SAINT-RAYMOND

Ce travail fait suite à un exposé de T. HINDI sur un article de A. PELCZYNSKI [3] consacré au théorème de Milutin. On y donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surjection continue d'un espace métrique compact possède un exave markovien, et on en déduit que le segment $[0, 1]$ est un espace de Milutin. On introduit pour cela les notions de dérivation d'un espace par rapport à une application continue et de coeur d'une application continue.

Tous les espaces considérés seront supposés métrisables. Néanmoins, les définitions et certains résultats s'étendent sans difficulté à des cas plus généraux. On se placera toujours dans la situation suivante : E et Z sont deux espaces métrisables, et p est une application continue de E dans Z.

THÉORÈME 1. - *Il existe dans E une plus grande partie S_0 telle que la restriction de p à S_0 soit une application ouverte de S_0 dans Z.*

Soit $\mathbb{S}$ la famille de toutes les parties S de E telles que $p|_S$ soit ouverte. Une partie S appartient à $\mathbb{S}$ si, et seulement si, pour tout ouvert V de E, $p(V \cap S)$ est ouvert dans Z. Si nous posons

$$S_0 = \bigcup_{S \in \mathbb{S}} S ,$$

et si V est ouvert dans E, on a

$$p(V \cap S_0) = \bigcup_{S \in \mathbb{S}} p(V \cap S) .$$

Cet ensemble est donc ouvert dans Z. Donc S_0 appartient à $\mathbb{S}$, dont il est le plus grand élément.

DÉFINITION 2. - *On appelle coeur de l'application p la plus grande partie de E à laquelle la restriction de p soit ouverte.*

THÉORÈME 3. - *Pour tout point z de Z, la trace du coeur de p sur $p^{-1}(z)$ est fermée. De plus, le coeur est un G_δ dans E.*

Soient S_0 le coeur de p, z un point de Z, et x un point adhérant à $S_0 \cap p^{-1}(z)$. Puisque, pour tout ouvert V de E, on a

$$p[(S_0 \cup \{x\}) \cap V] = p(S_0 \cap V) \text{ ouvert dans } E .$$

On a donc $(S_0 \cup \{x\}) \in \mathbb{S}$, donc aussi $S_0 \cup \{x\} \subset S_0$, c'est-à-dire $x \in S_0$. Il en résulte que $S_0 \cap p^{-1}(z)$ est fermé.

Posons maintenant, pour tout entier k :

$$S_0^k = \{x \in E \; ; \; \exists \, x' \in S_0 \, , \; p(x) = p(x') \; \text{ et } \; d(x \, , x') < 2^{-k}\} \; .$$

Puisque, pour tout z de Z, $S_0 \cap p^{-1}(z)$ est fermé, on obtient

$$S_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_0^k \; .$$

Nous montrons maintenant que S_0^k est ouvert dans E. Soit x un point de S_0^k. Il existe x' dans S_0 avec

$$p(x) = p(x') \quad \text{et} \quad d(x \, , x') < 2^{-k} \; .$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $d(x \, , x') < \varepsilon < 2^{-k}$. Si V est la boule ouverte de centre x et de rayon ε, $W = p(S_0 \cap V)$ est un ouvert contenant $p(x') = p(x)$. Alors

$$p^{-1}(W) \cap B(x \, , 2^{-k} - \varepsilon)$$

est un voisinage de x, contenu dans S_0^k : en effet, si y appartient à cet ensemble, il existe y' tel que :

$$y' \in S_0 \cap V \; ; \quad p(y') = p(y) \; .$$

On a alors

$$d(y \, , y') \leq d(y \, , x) + d(x \, , y') < (2^{-k} - \varepsilon) + \varepsilon = 2^{-k}$$

ce qui prouve que y appartient à S_0^k, donc que S_0^k est ouvert. Il en résulte que S_0 est un G_δ.

On peut observer que si x est un point de S_0, et si V est un ouvert contenant x, on a

$$p(V) \supset p(V \cap S_0) \quad \text{ouvert contenant} \quad p(x) \; .$$

Il en résulte que l'image par p de tout voisinage de x est un voisinage de $p(x)$. Ceci nous conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 4. - *On appelle dérivé de E par rapport à p l'ensemble des points x de E tels que l'image par p de tout voisinage de x soit un voisinage de $p(x)$.*

On définit de même, par récurrence transfinie, pour tout ordinal α, le dérivé d'ordre α de E par rapport à p.

DÉFINITION 5. - *Si α possède un prédécesseur β, on appelle dérivé d'ordre α de E par rapport à p, le dérivé par rapport à la restriction de p du dérivé d'ordre β de E.*

Si α est un ordinal de deuxième espèce, on appelle dérivé d'ordre α de E par rapport à p, l'intersection des dérivés de E d'ordre inférieur à α.

PROPOSITION 6. - *Pour tout z de Z et pour tout ordinal α, la trace sur $p^{-1}(z)$ du dérivé d'ordre α de E est fermée.*

<u>De plus</u>, <u>le coeur de</u> p <u>est l'intersection des dérivés de</u> E .

Pour démontrer la première affirmation, il suffit de montrer que $p^{-1}(z)$ coupe le dérivé de E suivant un ensemble fermé. Nous noterons $E^{(\alpha)}$ le dérivé d'ordre α de E . Soit x un point adhérent à $p^{-1}(z) \cap E^{(1)}$. Soit V un ouvert contenant x . Il existe donc $x' \in p^{-1}(z) \cap E^{(1)} \cap V$, et $p(V)$ est un voisinage de $p(x')$, donc de $p(x)$; ceci montre que x appartient à $E^{(1)}$.

La remarque qui précède la définition 4, montre que le coeur S_0 de p est contenu dans $E^{(1)}$. Nous démontrons par récurrence transfinie que, pour tout α , $S_0 \subset E^{(\alpha)}$. Supposons que, pour tout $\beta < \alpha$, on ait $S_0 \subset E^{(\alpha)}$. Le résultat est immédiat si α est de deuxième espèce. Si α possède un prédécesseur α' , si x est dans $S_0 \subset E^{(\alpha')}$, si V' est un ouvert de $E^{(\alpha')}$ contenant x , il existe V ouvert de E tel que $V' = V \cap E^{(\alpha')}$. Alors

$$p(x) \in p(V \cap S_0) \subset p(V \cap E^{(\alpha')}) = p|_{E^{(\alpha')}}(V') ,$$

et puisque $p(V \cap S_0)$ est ouvert, $p|_{E^{(\alpha')}}(V')$ est un voisinage de $p(x)$, ce qui montre que $x \in E^{(\alpha'+1)} = E^{(\alpha)}$.

De ceci résulte que

$$S_0 \subset \bigcap_\alpha E^{(\alpha)} .$$

Inversement, la suite transfinie $E^{(\alpha)}$, décroissante, stationne à partir d'un certain ordinal α_0 . Soient alors V ouvert dans E et $z \in p(V \cap E^{(\alpha_0)})$. Si x appartient à $V \cap E^{(\alpha_0)} \cap p^{-1}(z)$, puisque x appartient à $E^{(\alpha_0+1)} = E^{(\alpha_0)}$, $p(V \cap E^{(\alpha_0)})$ est un voisinage de $z = p(x)$, donc de chacun de ses points. On en conclut que $E^{(\alpha_0)}$ appartient à la famille $\mathcal{S}$, donc que

$$E^{(\alpha_0)} \subset S_0 \subset \bigcap_\alpha E^{(\alpha)} \subset E^{(\alpha_0)} ,$$

ce qui termine la démonstration.

PROPOSITION 7. - <u>Pour tout ordinal</u> α , <u>le dérivé</u> $E^{(\alpha+1)}$ <u>est un</u> G_δ <u>dans</u> E .

Considérons, pour tout entier k , un recouvrement ouvert $(V_i^k)_{i\in I}$ de E par des ouverts de diamètre inférieur à 2^{-k} . Alors, pour tout k :

$$U_k = \bigcup_{i\in I} V_i^k \cap p^{-1}[\operatorname{Int}_Z p(V_i^k \cap E^{(\alpha)})]$$

est un ouvert dans E , si $\operatorname{Int}_Z A$ désigne l'intérieur dans Z de la partie A de Z . De plus, si x appartient à $E^{(\alpha+1)}$, il existe un i tel que $x \in V_i^k$; alors $p(V_i^k \cap E^{(\alpha)})$ est un voisinage de $p(x)$, ce qui montre que x appartient à U_k .

Inversement, soit $x \in \bigcap_{k=1}^\infty U_k$. Il existe pour tout k un point x_k dans $E^{(\alpha)}$ et un $i \in I$ tels que

$$x_k \in V_i^k ; \quad x_p \in V_i^k ; \quad p(x_k) = p(x) .$$

Donc $d(x , x_k) \leq 2^{-k}$. Et puisque $E^{(\alpha)} \cap p^{-1}(p(x))$ est fermé, il en résulte que x appartient à $E^{(\alpha)}$. Si V' est un voisinage de x dans $E^{(\alpha)}$, il existe un $k \in \underset{\sim}{N}$ tel que

$$E^{(\alpha)} \cap B(x\,,\,2^{1-k}) \subset V' \;.$$

Puisque x appartient à U_k, il existe $i \in I$ tel que

$$x \in V_i^k \cap p^{-1}[\operatorname{Int}_z p(V_i^k \cap E^{(\alpha)})] \;.$$

On a alors

$$V_i^k \cap E^{(\alpha)} \subset E^{(\alpha)} \cap B(x\,,\,2^{1-k}) \subset V' \;,$$

et $p(V_i^k \cap E^{(\alpha)})$ est voisinage de $p(x)$, donc aussi $p(V')$. On en conclut que x appartient au dérivé de $E^{(\alpha)}$. Donc

$$E^{(\alpha+1)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \;.$$

On a bien montré que $E^{(\alpha+1)}$ est un G_δ dans E.

COROLLAIRE 8. - <u>S'il existe dans</u> $[0\,,\,\alpha[$ <u>un ensemble cofinal dénombrable,</u> $E^{(\alpha)}$ <u>est un</u> G_δ <u>dans</u> E.

Ceci résulte immédiatement du fait qu'une intersection dénombrable de G_δ est un G_δ et qu'il existe dans $[0\,,\,\alpha[$ un ensemble cofinal dénombrable d'ordinaux de première espèce.

THÉORÈME 9. - <u>Si</u> E <u>est à base dénombrable, il existe un ordinal fini ou dénombrable</u> α_0 <u>tel que</u> $E^{(\alpha_0+1)}$ <u>soit le coeur de</u> p.

Soit (ω_n) une base dénombrable de la topologie de E. Soit V un ouvert de E. Nous posons, pour tout α

$$\begin{cases} U_\alpha = \operatorname{Int}_z p(E^{(\alpha)} \cap V) \\ W_\alpha = p^{-1}(U_\alpha) \;. \end{cases}$$

Il résulte de la définition de $E^{(\alpha+1)}$ que

$$U_{\alpha+1} \subset p(E^{(\alpha+1)} \cap V) \subset \operatorname{Int}_z p(E^{(\alpha)} \cap V) = U_\alpha$$

donc

$$W_{\alpha+1} \subset W_\alpha \;.$$

Soit Ω le premier ordinal non dénombrable. Posons

$$\Delta = \{n \in \underset{\sim}{N}\;;\;\; \omega_n \subset \bigcap_{\alpha<\Omega} W_\alpha\} \;.$$

Pour tout n n'appartenant pas à Δ, il existe $\alpha_n < \Omega$ tel que $\omega_n \not\subset W_{\alpha_n}$. Posons

$$\alpha(V) = \sup_{n\notin\Delta} \alpha_n < \Omega \;.$$

Alors, pour tout n tel que $\omega_n \subset W_{\alpha(V)}$, on a nécessairement, puisque la suite transfinie W_α est décroissante, $n \in \Delta$; donc

$$(\omega_n \subset W_{\alpha(V)}) \Rightarrow (\omega_n \subset \bigcap_{\alpha<\Omega} W_\alpha) \;.$$

Puisque (ω_n) est une base de E , il en résulte que $W_{\alpha(V)} = \bigcap_{\alpha<\Omega} W_\alpha$, et que la suite W_α stationne.

Il existe donc, pour chaque ouvert ω_q , un ordinal $\alpha(\omega_q)$, au delà duquel la suite $\mathrm{Int}_z\, p(E^{(\alpha)} \cap \omega_q)$ est stationnaire. Soit $\alpha_0=\sup_q \alpha(\omega_q) < \Omega$. On a alors, pour tout q :

$$\mathrm{Int}_z\, p(E^{(\alpha_0+1)} \cap \omega_q) = \mathrm{Int}_z\, p(E^{(\alpha_0)} \cap \omega_q) \subset p(E^{(\alpha_0+1)} \cap \omega_q)$$
$$\subset \mathrm{Int}_z\, p(E^{(\alpha_0)} \cap \omega_q) \; .$$

Chaque $p(E^{(\alpha_0+1)} \cap \omega_q)$ est donc ouvert. Il en résulte que, pour tout ouvert V de E , $p(E^{(\alpha_0+1)} \cap V)$ est ouvert, donc que $E^{(\alpha_0+1)}$ appartient à $\mathbb{S}$, et par suite est égal au coeur S_0 .

THÉORÈME 10. - S'il existe une application étroitement (1) continue définie sur Z qui, à chaque point z de Z , fait correspondre une mesure μ_z de Radon non nulle portée par $p^{-1}(z)$, l'image par p du coeur de p est égale à Z .

Posons $S = \bigcup_{z\in Z} \mathrm{Supp}\, \mu_z \subset E$. Nous allons montrer que S appartient à $\mathbb{S}$, donc que $p(S_0) \supset p(S) = Z$. Soient $x \in S$ et V ouvert contenant x . Posons $z=p(x)$. Puisque, pour tout $z' \neq z$, $\mathrm{Supp}\, \mu_{z'} \subset p^{-1}(z') \subset E - p^{-1}(z)$ et que $x \in S$, on a $x \in \mathrm{Supp}\, \mu_z$. Il existe donc φ continue bornée sur E telle que $\mathrm{Supp}\, \varphi \subset V$ et que $\int \varphi \, d\mu_z \neq 0$. Puisque $z \longmapsto \mu_z$ est vaguement continue, l'ensemble

$$U = \{t \in Z \; ; \; \int \varphi \, d\mu_t \neq 0\}$$

est un ouvert contenant z . De plus, si $t \in U$, on a nécessairement

$$S \cap p^{-1}(t) \cap V \supset (\mathrm{Supp}\, \mu_t) \cap V \supset (\mathrm{Supp}\, \mu_t) \cap (\mathrm{Supp}\, \varphi) \neq \emptyset$$

donc

$$U \subset p(V \cap S) \; .$$

Il en résulte que $p(V \cap S)$ est ouvert dans Z , donc que S appartient à $\mathbb{S}$.

THÉORÈME 11. - Si p est une application continue de l'espace métrique complet E sur l'espace métrique Z , et si Z est l'image du coeur de p , il existe une application étroitement continue μ de Z à valeurs dans l'espace des mesures de Radon positives de masse 1 sur E telle que, pour tout z de Z , $\mu(z)$ soit portée par $p^{-1}(z)$.

En restreignant p au coeur S_0 , et en remplaçant la distance par une distance équivalente, pour laquelle le G_δ , S_0 , est complet, on se ramène au cas où p est ouverte.

Dans ce cas, l'application multivoque de Z dans $\mathfrak{M}^1_+(S_0)$ qui à z associe

---

(1) La topologie de la convergence étroite sur l'ensemble des mesures de Radon, bornées sur E , est la topologie faible associée à l'espace des fonctions continues bornées sur E (Cf. [1], §5, n° 3).

$\mathfrak{M}^1_+(p^{-1}(z))$, qui est un convexe étroitement fermé de $\mathfrak{M}^1_+(S_0)$ est étroitement s. c. i. de l'espace paracompact Z dans $\mathfrak{M}^1_+(S_0)$: en effet, soient $\nu \in \mathfrak{M}^1_+(p^{-1}(z))$, et W un voisinage étroit de ν . Il existe dans W une mesure discrète ν_1 portée par $p^{-1}(z)$:

$$\nu_1 = \sum_{i=1}^n c_i \, \varepsilon_{s_i} \quad \text{avec} \quad c_i \geq 0 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1 \ , \quad s_i \in p^{-1}(z) \ .$$

Il existe alors des voisinages ouverts V_i des points s_i tels que si $s_i' \in V_i$, $i = 1 , 2 , \dots , n$, on ait

$$\sum_{i=1}^n c_i \, \varepsilon_{s_i'} \in W \ .$$

Puisque $U_1 = \bigcap_{i=1}^n p(V_i)$ est un voisinage de z , et que, pour tout $z' \in U_1$, il existe $s_i' \in p^{-1}(z') \cap V_i$, on a bien montré que l'application $z \longmapsto \mathfrak{M}^1_+(p^{-1}(z))$ est étroitement s. c. i.

En vertu du théorème de sélection de MICHAËL [2] , il nous suffit de prouver que $\mathfrak{M}^1_+(S_0)$ est affinement homéomorphe à un convexe fermé d'un espace de Fréchet.

Il existe, pour tout entier k , une partition $(\varphi_s^k)_{s\in S_0}$ de l'unité localement finie, sur S_0 , subordonnée au recouvrement par les boules de rayon 2^{-k} . Nous désignerons par Φ_k l'application de $\mathfrak{M}^1(S_0)$ dans $\ell^1_{S_0}$ définie par

$$\Phi_k(\nu) = \left(\int \varphi_s^k \, d\nu\right)_{s\in S_0}$$

et par Φ l'application de $\mathfrak{M}^1(S_0)$ dans $(\ell^1_{S_0})^{\underset{\sim}{N}} = F$ définie par

$$\Phi(\nu) = (\Phi_k(\nu))_{k\in \underset{\sim}{N}} \ .$$

Nous montrons maintenant que Φ , qui est affine, est un homéomorphisme sur un convexe fermé de F , qui est lui-même un produit dénombrable d'espaces de Banach.

Soient $k \in \underset{\sim}{N}$, $\nu \in \mathfrak{M}^1_+(S_0)$, et $\varepsilon > 0$. Il existe un compact T de S_0 tel que $\nu(T) > 1 - \varepsilon/4$. Soit J l'ensemble fini des $s \in S_0$ tels que $\varphi_s^k \neq 0$ et $T \cap \operatorname{Supp} \varphi_s^k \neq \emptyset$. Si $\nu' \in \mathfrak{M}^1_+(S_0)$ appartient au voisinage de ν défini par $\sum_{s\in J} |\nu(\varphi_s^k) - \nu'(\varphi_s^k)| < \frac{\varepsilon}{4}$, on a

$$\sum_{s\notin J} \nu(\varphi_s^k) \leq \nu(S_0 - T) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\sum_{s\in J} \nu'(\varphi_s^k) \geq \sum_{s\in J} \nu(\varphi_s^k) - \sum_{s\in J} |\nu(\varphi_s^k) - \nu'(\varphi_s^k)| > \left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{4} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{s\notin J} \nu'(\varphi_s^k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{s\in S_0} |\nu(\varphi_s^k) - \nu'(\varphi_s^k)| \leq \sum_{s\in J} |\nu(\varphi_s^k) - \nu'(\varphi_s^k)| + \sum_{s\notin J} \nu(\varphi_s^k) + \sum_{s\notin J} \nu'(\varphi_s^k)$$

$$\|\Phi_k(\nu) - \Phi_k(\nu')\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Il en résulte que chaque Φ_k est continue, donc que Φ est continue.

Pour terminer la démonstration du théorème, il nous suffit de montrer que, si $\nu_m \in \mathfrak{M}^1_+(S_0)$ et si $\Phi(\nu_m)$ est une suite qui converge dans F , la suite ν_m converge dans $\mathfrak{M}^1_+(S_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_k tel que

$$\forall\ m \geq N_k\ , \qquad \|\Phi_k(\nu_m) - \Phi_k(\nu_{N_k})\| < \varepsilon/2^{k+1}\ .$$

Il existe donc J_k fini dans S_0 tel que

$$\forall\ m \leq N_k\ , \qquad \sum_{s\in J_k} \nu_m(\varphi_s^k) \geq 1 - \varepsilon/2^{k+1}\ .$$

On en déduit que, $\forall\ m \in \underset{\sim}{N}$, $\sum_{s\in J_k} \nu_m(\varphi_s^k) \geq 1 - \varepsilon/2^k$. Si on pose

$$V_k = \bigcup_{s\in J_k} \operatorname{Supp} \varphi_s^k$$

on obtient

$$\forall\ m \in \underset{\sim}{N}\ , \quad \forall\ k \in \underset{\sim}{N}\ , \qquad \nu_m(V_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}\ .$$

Alors si on pose $T = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$, T est précompact et fermé, donc compact puisque S_0 est complet. De plus,

$$\forall\ m \in \underset{\sim}{N}\ , \qquad \nu_m(S_0 \setminus T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_m(S_0 \setminus V_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon\ .$$

L'ensemble $\{\nu_m\ ;\ m \in \underset{\sim}{N}\}$ vérifie donc la condition de Prokhorov, donc est relativement compact dans $\mathfrak{M}_+^1(S_0)$. Si ν est une valeur d'adhérence de (ν_m) dans $\mathfrak{M}_+^1(S_0)$, $\Phi(\nu) = \lim_{m\to\infty} \Phi(\nu_m)$. Quand nous aurons montré que Φ est injective, il en résultera que ν est unique, donc que $\nu = \lim_{m\to\infty} \nu_m$.

Supposons donc $\Phi(\nu) = \Phi(\nu')$. Soient T un compact, et V un voisinage de T tel que $\nu(V \setminus T) < \varepsilon$. Il existe k tel que $d(T\ ,\ \complement V) > 2^{-k}$. Alors si J est l'ensemble des s tels que $(\operatorname{Supp} \varphi_s^k) \cap T \neq \emptyset$, $\sum_{s\in J} \varphi_s^k$ vaut 1 sur T , et 0 sur $\complement V$. Il en résulte

$$\nu'(T) \leq \sum_{s\in J} \nu(\varphi_s^k) = \sum_{s\in J} \nu'(\varphi_s^k) \leq \nu(V) \leq \nu(T) + \varepsilon\ .$$

Donc $\nu'(T) \leq \nu(T)$, et par symétrie $\nu(T) = \nu'(T)$.

Puisque les compacts ont même mesure pour ν et pour ν' , on a bien $\nu = \nu'$, ce qui termine la démonstration.

THÉORÈME 12. - Soit p une surjection continue de l'espace métrique compact E sur l'espace métrique compact Z . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un exave markovien [2] selon p ,

(ii) Si S_0 est le coeur de p , $p(S_0) = Z$,

(iii) Pour tout ordinal dénombrable α , $p(E^{(\alpha)}) = Z$.

Si T est un exave markovien de $\mathcal{C}(E)$ sur $\mathcal{C}(Z)$, pour tout z dans Z , $T^*(\varepsilon_z)$ est une mesure positive de masse 1 sur E , dont la projection sur Z est égale à ε_z . Donc $T^*(\varepsilon_z)$ est portée par $p^{-1}(z)$. De plus, l'application

---

(2) Soient E et Z deux compacts, et p une application continue de E dans Z . Un opérateur linéaire T de $\mathcal{C}(E)$ dans $\mathcal{C}(Z)$ est un exave selon p si, et seulement si, pour tout f dans $\mathcal{C}(Z)$, on a $T(f\circ p)\circ p = f\circ p$. Si p est surjective, ceci est équivalent à $T(f\circ p) = f$. Un exave est appelé markovien s'il est positif et transforme la constante 1 en la constante 1 (Cf. [3] et l'exposé de T. HINDI au Séminaire d'Initiation à l'Analyse, 1973/74).

$z \longmapsto T^*(\varepsilon_z)$ est étroitement continue. Donc, d'après le théorème 10, (i) entraîne (ii).

Puisque E est à base dénombrable, il résulte du théorème 9 que (ii) et (iii) sont équivalentes. Si (ii) est vérifiée, il résulte du théorème 11 qu'il existe une application étroitement continue $z \longmapsto \mu(z)$ de Z dans $\mathfrak{M}^1(E)$, telle que, pour tout z, l'image par p de $\mu(z)$ soit la mesure ε_z. On définit un exave markovient selon p en posant, pour toute fonction $\varphi \in C(E)$ et tout point z de Z

$$T_\varphi(z) = \int_E \varphi(x)\, d\mu_{(z)}(x) .$$

Donc (ii) entraîne (iii).

L'exemple suivant montrera que dans cet énoncé le mot "markovien" est essentiel.

CONTRE-EXEMPLE 13. - Il existe une surjection continue d'un compact métrisable sur un autre, admettant un exave (non markovien) dont la restriction au coeur n'est pas surjective.

Il suffit de prendre pour E la réunion, dans le plan, des deux segments $[-1, 0] \times \{-1\}$ et $[0, 1] \times \{+1\}$, pour Z le segment $[-1, 1]$, et pour p la première projection. On peut alors définir, si f est continue sur E et si z appartient à Z,

$$\begin{aligned} Tf(z) &= f(z, -1) + f(0, 1) - f(0, -1) && \text{si } z \leq 0 , \\ &= f(z, 1) && \text{si } z \geq 0 . \end{aligned}$$

On vérifie que T est un exave selon p, de norme 3, et que le noyau ouvert de p ne contient pas les points de E d'abscisse nulle, puisque le premier dérivé de E ne les contient pas.

THÉORÈME 14. - Le segment $[-1, 1]$ est un espace de Milutin [3].

Soit C l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Si φ désigne l'application continue de C sur $[0, 1]$, définie par

$$\varphi((a_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} ,$$

on définit l'application p de $C \times C$ sur $[-1, 1]$ par

$$p(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) .$$

Pour montrer que $[-1, 1]$ est un espace de Milutin, il suffit de montrer que p admet un exave markovien, donc en vertu du théorème 12, que $p(S_0)$ est égal à $[-1, 1]$.

Puisque φ est propre, il en est de même de sa restriction à $\varphi^{-1}(J)$, où J désigne l'ensemble des nombres non dyadiques de $]0, 1[$, augmenté de 0 et de

(3) Un compact E est appelé espace de Milutin, s'il existe un ensemble I, une surjection p du compact $\{0,1\}^I$ sur E et un exave markovien selon p (Cf. [3], et l'exposé de T. HINDI au Séminaire d'Initiation à l'Analyse, 1973/74).

1 . Et puisque φ est injective sur $\varphi^{-1}(J)$, sa restriction à $\varphi^{-1}(J)$ est un homéomorphisme sur son image. Donc la restriction de $\varphi \times \varphi$ à $S = \varphi^{-1}(J) \times \varphi^{-1}(J)$ est un homéomorphisme de S sur $J \times J$. On vérifie ensuite aisément que l'application $(u , v) \longmapsto u - v$ de $J \times J$ sur $[-1 , 1]$ est ouverte. On en déduit que $p|_S$ est ouverte et surjective, donc que $p(S_0) = Z$, ce qui termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chap. 9. - Paris, Hermann, 1969 (Act. scient. et ind., 1343 ; Bourbaki, 35).

[2] MICHAEL (E.). - Continuous selections, I., Annals of Math., t. 63, 1956, p. 361-382.

[3] PELCZYNSKI (A.). - Linear extensions, linear averagings, and their applications to the linear topological classifications of spaces of continuous functions, Dissertationes Math., Rozprawy Mat., Warszawa, t. 58, 1968, 89 p.

(Texte reçu le 26 janvier 1974)

Jean SAINT-RAYMOND
26 rue de Solférino
92100 BOULOGNE BILLANCOURT