Michèle Capon

Opérateurs extrémaux dans certains espaces de Banach

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. nº 24, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A15_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 24, 6 p.

6 juin 1974

OPÉRATEURS EXTRÉMAUX DANS CERTAINS ESPACES DE BANACH

par Michèle CAPON

Etant donnés deux espaces compacts X et Y, on considère l'espace des opérateurs bornés de $C(X)$ dans $C(Y)$. Il est équivalent de se donner l'opérateur T ou la restriction μ à Y de l'application transposée. On a alors l'égalité

$$\mu_y(f) = (Tf)(y) \text{ pour tout } y \text{ de } Y \text{ et toute } f \text{ de } C(X) .$$

T est borné si, et seulement si, μ est continue pour $\sigma(M(X) , C(X))$,

T est compact si, et seulement si, μ est continue pour la norme,

T est faiblement compact si, et seulement si, μ est continue pour $\sigma(M(X), C''(X))$.

On dit que T est un "nice" opérateur si, pour tout y de Y, on a

$$\mu_y = \theta(y)\ \varepsilon_{\varphi(y)} ,$$

où φ est une application continue de Y dans X, et θ une fonction continue sur Y, de module constant et égal à 1. Il est clair que tout nice opérateur est un élément extrémal de la boule unité des opérateurs de $C(X)$ dans $C(Y)$. On se propose de voir s'il en existe d'autres. Nous allons voir que dans de nombreux cas tout opérateur extrémal est un nice opérateur. Dans toute la suite l'expression "opérateur extrémal" signifiera "opérateur extrémal dans la boule unité des opérateurs de $C(X)$ dans $C(Y)$ ".

1. Cas où T est positif.

THÉORÈME 1. - *Soit T un opérateur extrémal et positif, alors T est un nice opérateur.*

Démonstration. - Soit g un élément de $C(X)$, $0 \leq g \leq 1$. Posons

$$Uf = T(fg) - Tf.Tg .$$

On vérifie aisément que $(T \pm U)$ est un opérateur positif et que $(T\pm U)(1) \leq 1$, donc $\|T \pm U\| \leq 1$, et par conséquent $U = 0$.

Ceci montre que T est multiplicatif et par suite, pour tout y de Y, la mesure μ_y est multiplicative sur $B(X)$. On a donc

$$\mu_y = \mu_y(1)\ \varepsilon_{\varphi(y)} .$$

Il est alors facile de voir que $\mu_y(1) = 1$ et que φ est continue.

T est donc un nice opérateur.

C. Q. F. D.

Remarque 1. - L'ensemble des points y de Y tels que $\|\mu_y\| = 1$ est un G_δ partout dense de Y. Ce résultat est dû à SHARIR [6]. En effet, posons

$$\Omega_n = \{y \; ; \; \|\mu_y\| > 1 - \frac{1}{n}\} \; .$$

Ω_n est ouvert et dense dans Y, sinon on pourrait construire une fonction continue φ de Y dans $[0\ 1]$, nulle sur Ω_n et non partout nulle. Si on désigne par μ_0 une mesure quelconque sur X, de norme 1, on peut définir g par l'égalité

$$g(y) = \frac{1}{n}\, \varphi(y)\, \mu_0 \; .$$

On vérifie aisément que $\|\mu_y \pm g(y)\| \leq 1$, ce qui est impossible car g n'est pas nulle. Comme sur l'intersection des Ω_n, on a $\|\mu_y\| = 1$, la remarque est démontrée.

Remarque 2. - Soit T un opérateur extrémal ; si, pour tout y de Y, on sait que μ_y est dans $M^+(X)$ ou dans $(-M^+(X))$, alors T est un nice opérateur. Ce résultat constitue la première partie de la démonstration de [2].

On a en effet, $\|\mu_y\| = |\mu_y(1)|$ pour tout y de Y. L'application est donc continue, et comme elle vaut 1 sur un ensemble dense, elle vaut 1 partout. Posons alors

$$T' f = Tf.T1 \; .$$

Il est immédiat de voir que T' est un opérateur extrémal et positif, donc c'est un nice opérateur. Il en est de même pour T.

Remarque 3. - Soit T un opérateur extrémal qui ne vérifie pas les hypothèses de la remarque 2 : il existe donc y_0 dans Y tel que

$$\mu^+_{y_0}(1).\mu^-_{y_0}(1) > 0 \; .$$

On aboutira à une contradiction dès que l'on saura construire deux applications σ et τ de Y dans $M^+(X)$ telles que

1° τ et σ soient continues,

2° Pour tout y appartenant à un ensemble dense de Y, on ait

$$0 \leq \tau(y) \leq \mu^+_y \; ,$$
$$0 \leq \sigma(y) \leq \mu^-_y \; ,$$

3° $\tau(y_0) = \mu^+_{y_0}$ et $\sigma(y_0) = \mu^-_{y_0}$.

En effet, dans ce cas, posons

$$g(y) = \tau(y)\|\sigma(y)\| + \sigma(y)\|\tau(y)\| \; .$$

Pour tout y dans un ensemble dense, on a

$$\begin{aligned}\|\mu_y + g(y)\| &= \|\mu_y^+ + \tau(y)\|\sigma(y)\|\| + \|\mu_y^- - \sigma(y)\|\tau(y)\|\| \\ &= \mu_y^+(1) + \|\tau(y)\|.\|\sigma(y)\| + \mu_y^-(1) - \|\sigma(y)\|\,\|\tau(y)\| \\ &= \|\mu_y\| \leq 1 .\end{aligned}$$

De même, $\|\mu_y - g(y)\| \leq 1$. Ces inégalités sont vraies sur tout Y , car la fonction norme est semi-continue inférieurement (s. c. i.). On en déduit que g est nulle. Or

$$g(y_0) = \mu_{y_0}^+\|\mu_{y_0}^-\| + \mu_{y_0}^-\|\mu_{y_0}^+\| .$$

On obtient donc la contradiction cherchée.

Dans les cas qui suivent, nous allons essayer de nous ramener aux conditions d'application de la remarque 3.

2. Cas où X est métrisable.

THÉORÈME 2. - Soit X un espace métrisable. Tout opérateur extrémal de $C(X)$ dans $C(Y)$ est un nice opérateur.

Démonstration. - La démonstration se trouve dans [2], et repose sur le lemme suivant.

LEMME 3. - Soit Φ la multi-application de Y dans $M^+(X)$, définie par

$$\Phi(y) = \{\nu \ ; \ 0 \leq \nu \leq \mu_y^+\} .$$

Φ est une multi-application s. c. i.

Ce lemme étant admis, il suffit de considérer une sélection continue τ de cette multi-application (qui existe d'après le théorème de Michaël). On construit de manière analogue une application σ de Y dans $M^+(X)$, ces deux applications répondant aux conditions de la remarque 3.

3. Cas où T est faiblement compact et Y séparable.

On va se ramener aux conditions de la remarque 3 et, pour cela, nous allons remplacer la multi-application Φ du lemme 3 par une autre à valeur dans une partie compacte métrisable.

Remarquons d'abord que Φ est s. c. i. lorsqu'on munit $M^+(X)$ de la topologie $\sigma(M(X) , C''(X))$: cela provient de la continuité de μ pour cette topologie. Soit

$$A = \{\mu_y^+ \ ; \ y \in Y\} \cup \{\mu_y^- \ ; \ y \in Y\} .$$

Comme μ est continue pour $\sigma(M(X) , C''(X))$, il est facile de voir, en utilisant le critère de Dunford-Pettis (on identifie $M(X)$ à un espace L'), que A est une partie relativement compacte pour $\sigma(M(X) , C''(X))$. Son adhérence $\overline{A}$ est compacte et, par suite, on définit encore une multi-application s. c. i. en posant

$$\Phi_1(y) = \Phi(y) \cap \bar{A} .$$

La démonstration sera terminée si on prouve que $\bar{A}$ est métrisable. Soient $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense de Y , et $D_{\mathbb{Q}}$ le plus petit espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, dénombrable, réticulé pour l'ordre induit par celui de $M(X)$, et contenant les μ_{y_n} .

Soit H son adhérence pour la norme : c'est un espace de Banach séparable. Pour montrer qu'il contient $\bar{A}$, il suffit de montrer qu'il contient A , car il est fermé pour $\sigma(M(X) , C''(X))$. Or tout y de Y est dans l'adhérence de $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donc μ_y est dans l'adhérence de $D_{\mathbb{Q}}$ pour $\sigma(M , C''(X))$. On vérifie aisément que cette adhérence est identique à H , donc il existe une suite z_n de $D_{\mathbb{Q}}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - \mu_y\| = 0 .$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n^+ - \mu_y^+\| = \lim_{n\to\infty} \|z_n^- - \mu_y^-\| = 0 .$$

H étant réticulé, z_n^+ et z_n^- sont dans H , donc μ_y^+ et μ_y^- aussi. Nous avons montré que $\bar{A}$ est contenu dans H . Pour conclure, on utilise le lemme suivant ([4], p. 434).

LEMME 4. - <u>Soit H un espace de Banach séparable, toute partie de H , qui est $\sigma(H , H')$-compacte, est métrisable pour cette topologie.</u>

En appliquant le théorème de Michaël à la multi-application Φ_1 , à valeur dans $\bar{A}$, on se ramène aux conditions de la remarque 3. On peut donc énoncer le résultat suivant

THÉORÈME 5. - <u>Soient Y un espace compact séparable, et T un opérateur extrémal de $C(X)$ dans $C(Y)$ qui est faiblement compact, alors T est un nice opérateur.</u>

4. Cas où T est compact.

Dans ce cas, nous allons encore utiliser la remarque 3 et le résultat suivant.

LEMME 6. - <u>Soient μ_0 une mesure et $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ultrafiltre qui converge vaguement vers μ_0 . Si, en outre, $\|\mu_\alpha\|$ tend vers $\|\mu_0\|$, alors μ_α^+ tend vers μ_0^+ .</u>

<u>Démonstration</u>. - Soient μ_1 la limite de μ_α^+ , et μ_2 celle de μ_α^- . On a $\mu_1 \geq \mu_0^+$ et $\mu_2 \geq \mu_0^-$. Donc

$$\|\mu_0\| = \lim_{\alpha \in A} \|\mu_\alpha\| = \lim_{\alpha \in A} \mu_\alpha^+(1) + \mu_\alpha^-(1) = \|\mu_1\| + \|\mu_2\| \geq \|\mu_0^+\| + \|\mu_0^-\| .$$

Ceci montre que nécessairement

$$\|\mu_1\| = \|\mu_0^+\| ,$$

$$\|\mu_2\| = \|\mu_0^-\| .$$

Par conséquent, $\mu_1 = \mu_0^+$ et $\mu_2 = \mu_0^-$.

C. Q. F. D.

Ce lemme nous montre que, si l'application φ définie par $\varphi(y) = \|\mu_y\|$ est continue sur Y, alors les deux applications τ et σ, définies par $\sigma(y) = \mu_y^+$ et $\tau(y) = \mu_y^-$, sont vaguement continues, et elles répondent aux conditions de la remarque 3. Ceci est en particulier réalisé lorsque T est compact. On a donc le résultat suivant.

THÉORÈME 7. - Soit T un opérateur extrémal de $C(X)$ dans $C(Y)$ qui est compact, alors T est un nice opérateur.

5. Cas où X est Eberlein compact, et Y métrisable.

Nous dirons que X est Eberlein compact s'il est homéomorphe à un compact faible d'un espace de Banach. Dans [1], il est démontré qu'un espace X est Eberlein compact si, et seulement si, la boule unité faible de $M(X)$ possède la même propriété.

Dans ces conditions, il existe un ensemble Γ tel que cette boule unité soit homéomorphe à un compact faible de $C_0(\Gamma)$. En outre, nous savons, d'après CORSON et LINDENSTRAUSS [3], que toute multi-application s. c. i. d'un espace paracompact, métrique, séparable, à valeur dans une partie faiblement compacte de $C_0(\Gamma)$ admet une sélection continue.

Dans ces conditions, la multi-application Φ du lemme 3 admet une selection continue τ. On construit de même une application σ telle que le couple (τ , σ) satisfasse aux conditions de la remarque 3. Nous avons dônc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 8. - Soient X un espace Eberlein compact, et Y un compact métrisable, alors tout opérateur extrémal de $C(X)$ dans $C(Y)$ est un nice opérateur.

6. Cas où Y est stonien.

Ce résultat est dû à SHARIR [6].

THÉORÈME 9. - Soit Y un compact stonien, alors tout opérateur extrémal de $C(X)$ dans $C(Y)$ est un nice opérateur.

Démonstration. - Considérons l'ensemble $H = \{y \in Y ; \|\mu_y\| = 1\}$. D'après la remarque 1, H est dense dans Y. Puisque Y est stonien, il s'identifie au compactifié de Stone-Čech de tout ensemble dense ([5], p. 96).

D'après le lemme 6, les applications τ et σ, définies sur H par $\tau(y) = \mu_y^+$ et $\sigma(y) = \mu_y^-$, sont continues sur H, et à valeurs dans un compact. Elles se prolongent donc de manière unique en deux applications τ et σ définies sur Y.

Comme, dans la remarque 3, on peut toujours supposer que y_0 est dans H, nous pouvons utiliser cette remarque pour conclure.

7. Cas où X est éparpillé.

Signalons encore ce résultat, dû à SHARIR [6], et dont nous ne donnerons pas de démonstration. Celle-ci est en effet d'une nature différente de toutes les précédentes, et il ne semble pas que l'on puisse démontrer le résultat en se ramenant à la remarque 3.

THÉORÈME 10. - *Soit X un compact éparpillé, tout opérateur extrémal de $C(X)$ dans $C(Y)$ est un nice opérateur.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMIR (D.) and LINDENSTRAUSS (J.). - The structure of weakly compact sets in Banach spaces, Annals of Math., Series 2, t. 88, 1968, p. 35-46.

[2] BLUMENTHAL (R. M.), LINDENSTRAUSS (J.) and PHELPS (R. R.). - Extreme operators into $C(K)$, Pac. J. of Math., t. 15, 1965, p. 747-756.

[3] CORSON (H. H.) and LINDENSTRAUSS (J.). - Continuous selections with non-metrizable range, Trans. Amer. math. Soc., t. 121, 1966, p. 492-504.

[4] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). - Linear operators, I. - New York, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics, Interscience, 7).

[5] GILLMANN (L.) and JERISON (M.). - Rings of continuous functions. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (University Series in higher Mathematics).

[6] SHARIR (M.). - Characterization and properties of extreme operators into $C(Y)$, Israël J. of Math., t. 12, 1972, p. 174-183.

(Texte reçu le 6 juin 1974)

Michèle CAPON
Université de Paris Sud
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 ORSAY