Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Patrick Magnier

Semi-algèbres fermées semi-réticulées inférieurement des espaces $C(X)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 21, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A14_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 21, 3 p.

9 mai 1974

SEMI-ALGÈBRES FERMÉES SEMI-RÉTICULÉES INFÉRIEUREMENT DES ESPACES $\mathcal{C}(X)$

par Patrick MAGNIER

Le but de cet exposé est d'obtenir une classification des semi-algèbres fermées semi-réticulées inférieurement (s. r. i.) des espaces $\mathcal{C}(X)$, valable à la fois pour "l'équation" de ces semi-algèbres et pour leurs propriétés de stabilité par certaines fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$.

1. Notations et définitions.

X désignera un espace localement compact, et $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues réelles sur X , muni de la topologie de la convergence compacte.

Une partie A de $\mathcal{C}(X)$ est dite stable par $\varphi \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$ si, pour toute suite $(f_1 , \ldots , f_n) \in A^n$, la fonction $\varphi \circ (f_1 , \ldots , f_n)$ appartient à A .

Une semi-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ est un cône convexe, stable par produit, et une partie est dite s. r. i. si elle est stable par $\inf(s , t)$.

Dans tout ce qui suit, N désigne un fermé de X , et $M = (M_\ell)_{\ell \in L}$ une famille de fermés de X . Nous désignerons par $A(N , M)$ l'algèbre fermée de $\mathcal{C}(X)$, constituée par les fonctions nulles sur N , et constante sur chacun des M_ℓ .

En outre, on désignera par $F = (\sigma_i , x_i)_{i \in I}$ et $G = (\tau_j)_{j \in J}$ deux familles où les σ_i et les τ_j sont des mesures de Radon sur X , positives et à support compact, et les x_i des points de X tels que pour tout i on ait : $\sigma_i(\{x_i\}) = 0$.

2. Détermination des semi-algèbres fermées s. r. i.

L'ensemble $A(N , M)$ est une algèbre fermée de $\mathcal{C}(X)$ et, réciproquement, toute algèbre fermée $A \subset \mathcal{C}(X)$ est (d'après STONE-WEIERSTRASS) de ce type (i. e. il existe N et M tels que $A = A(N , M)$).

De même, l'ensemble C défini par :

$$C = \left\{ f \in A(N , M) \; ; \; \begin{array}{l} \forall \; i \in I : \; \sigma_i(f) \leq f(x_i) \\ \forall \; j \in J : \; \tau_j(f) \leq 0 \end{array} \right\}$$

est un cône convexe fermé s. r. i., et réciproquement [cf. G. CHOQUET-J. DENY [1]], tout cône convexe fermé s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$ est de ce type.

Soit W le cône défini par

(1) $W=\{f \in A(N,M) \; ; \; \forall \; i \in I \, , \sigma_i(f) \leq f(x_i)$ et $0 \leq f(x) \leq f(x_i) \, , \; \forall \; x \in \mathrm{Supp}(\sigma_i)\}$,

alors W est une semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$, et réciproquement :

PROPOSITION 1. - Soit W une semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$. Alors il existe un triplet (N, M, F) tel que (1) soit vérifiée. En outre, on peut trouver un triplet vérifiant (1) et tel que :

1° N soit le "noyau" de W ; N et les M_ℓ sont deux à deux disjoints,

2° $\forall\, i \in I$, $x_i \notin N$ et $\sigma_i(N) = 0$.

Exemple 1 : L'ensemble S des fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R})$, nulles en zéro, et "sous-homogènes" sur $\underset{\sim}{R}_+$ (i. e. : $\forall\, x > 0$, $\forall\, \lambda \in [0, 1]$, on a $0 \leq f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$).

PROPOSITION 2. - Soit φ un élément de S vérifiant en outre :

1° φ est non linéaire sur $\underset{\sim}{R}_+$,

2° $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in \underset{\sim}{R} \setminus \{0\}$,

3° $\varphi(x) + x = 0$ admet une racine unique sur $]-\infty, 0[$,

et soit W un cône convexe fermé s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$ stable par φ. Alors W est une semi-algèbre et vérifie (1).

En particulier, tout cône convexe fermé s. r. i., stable par $|x|^\alpha$ (si $\alpha > 1$), est une semi-algèbre.

Exemple 2 : Les fonctions sous-homogènes sur $\underset{\sim}{R}_+^n$, c'est-à-dire l'ensemble S_n des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, nulles en zéro, positives sur $\underset{\sim}{R}_+^n$ et telles que, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}_+^n$, il existe une forme linéaire positive ℓ_t vérifiant :

$$[\ell_t(t) = \varphi(t)] \quad \text{et} \quad [(0 \leq s \leq t) \Rightarrow (\varphi(s) \leq \ell_t(s))] .$$

PROPOSITION 3. - Toute semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$ est stable par tout élément de S_n. Inversement, toute partie fermée de $\mathcal{C}(X)$ stable par tout élément de S_n (pour un entier $n \geq 2$), est une semi-algèbre s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$.

PROPOSITION 4. - La plus petite semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, contenant les projections, est S_n.

3. Semi-algèbres réticulées.

Si dans (1), les mesures σ_i sont toutes du type $a_i\, \delta_{y_i}$ avec $a_i = 0$ ou $a_i \geq 1$, alors W est réticulé, et l'on a :

$$W = \{f \in A(N, M) \; ; \; \forall\, i \in I, \; 0 \leq f(y_i) \leq \alpha_i\, f(x_i)\} , \tag{2}$$

où les α_i appartiennent à $]0, 1]$. Inversement, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 5. - Toute semi-algèbre réticulée de $\mathcal{C}(X)$ vérifie (2). En outre, on peut s'arranger pour que N soit le noyau de W, que N et les M_ℓ soient deux à deux disjoints, et que les x_i et les y_i n'appartiennent pas à N.

Exemple 3 : Les fonctions "semi-convexes" sur $\underset{\sim}{R}_+^n$, c'est-à-dire l'ensemble S'_n

des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, nulles en zéro, et telles que, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}_+^n$ et tout λ de $[0 , 1]$, on ait :

$$(0 \leq s \leq \lambda t) \Longrightarrow (\varphi(s) \leq \varphi(t)) .$$

On a alors l'analogue des propositions 3 et 4 en remplaçant s. r. i. par "réticulée", et S_n par S'_n .

Remarquons que l'on a $S_1 = S'_1 = S$.

4. Semi-algèbres de "type 1" .

Si, dans (2), tous les α_i sont égaux à 1 , on retrouve (pour des cônes positifs, et si X est compact) la caractérisation des semi-algèbres de type 1 (i. e. stable par $t/(1 + t)$), introduite par F. BONSALL. Nous étendrons cette terminologie à toute partie de $\mathcal{C}(X)$ vérifiant (2), où tous les α_i sont égaux à 1 .

PROPOSITION 6. - Une semi-algèbre fermée de $\mathcal{C}(X)$ est de type 1 si, et seulement si, elle est s. r. i. et stable par $\inf(t , 1)$.

Exemple 4 : L'ensemble U_n des fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, nulles en zéro, et croissantes sur $\underset{\sim}{R}_+^n$.

On a, à nouveau, des propositions analogues aux propositions 3 et 4.

Remarque. - Toute semi-algèbre fermée s. r. i., contenant les constantes positives, est de type 1 .

5. Partie "positives sur un fermé" d'algèbres fermées.

PROPOSITION 7. - Soit W une semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$, stable par une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R})$, non identiquement nulle sur $\underset{\sim}{R}_+$, tendant vers 0 à l'infini ou nulle en un point $t_0 > 0$. Alors, si N est le noyau de W , il existe une famille de fermés $M = (M_\ell)_{\ell \in L}$ et un fermé H de X , tels que :

$$W = \{f \in A(N , M) \ ; \ \forall x \in H , \ f(x) \geq 0\} .$$

Le cône W apparaît alors comme la partie "positive sur H " de l'algèbre fermée $A(N , M)$.

L'exemple fondamental est ici l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, nulles en zéro, et positives sur $\underset{\sim}{R}_+^n$, et l'on a à nouveau l'analogue des propositions 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 179-189.

(Texte reçu le 12 juin 1974)

Patrick MAGNIER
Université de Limoges
UER des Sciences, Mathématiques
Domaine de la Borie
123 rue Albert Thomas
87100 LIMOGES