Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Elias Saab

Points extrémaux et propriétés de Radon-Nikodym dans les espaces de Fréchet dentables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 19, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A13_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 19, 14 p.

18 avril 1974

POINTS EXTRÉMAUX ET PROPRIÉTÉS DE RADON-NIKODYM DANS LES ESPACES DE FRÉCHET DENTABLES

par Elias SAAB (*)

Le but de cet exposé est d'étudier quelques propriétés de type Krein-Milman et de démontrer un théorème de type Radon-Nikodym dans les espaces de Fréchet s-dentables (et en particulier dentables).

Toutes les notions utilisées dans cet exposé, et non définies, se trouvent dans [15].

1. Quelques propriétés de type Krein-Milman.

Ce paragraphe fait suite à [15]. Il est établi dans la conclusion de [13] qu'un ensemble convexe faiblement compact dans un espace de Banach est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés et en particulier de ses points dentés.

Ce résultat repose sur deux théorèmes dus respectivement à LINDENSTRAUSS [9] et à TROYANSKI [19].

THÉORÈME 1.1. - Soit E un espace de Fréchet ; tout convexe faiblement compact de E est l'enveloppe convexe fermée de ses points dentés.

Démonstration. - Soit C un convexe faiblement compact dans E ; d'après [5] (corollaire 1, page 211), il existe un convexe borné fermé équilibré A de E tel que C soit borné dans l'espace normé E_A (E_A est l'espace engendré par A muni de la norme jauge de A) et tel que E_A induise sur C la même topologie et la même structure uniforme que E .

Puisque A est complet, alors E_A est un espace de Banach, et C est faiblement compact dans E_A ([5], corollaire 2, page 212), et, par suite, C est l'enveloppe convexe fermée de ses points dentés dans E_A .

Pour terminer la démonstration, il reste à vérifier que tout point x de C , qui est denté dans E_A , est denté dans E .

Soit $V \in \mathcal{V}(0)$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda A \subset V$, $x + \lambda A$ est un voisinage de x dans E_A et, par suite, x n'appartient pas à l'enveloppe convexe fermée de $C \setminus (x + \lambda A)$ comme

$$C \setminus (x + V) \subset C \setminus (x + \lambda A) ,$$

alors x n'appartient pas à l'enveloppe convexe fermée de $C \setminus (x + V)$, et x est un point denté dans E .

(*) Attaché de Recherche au C. N. R. S. libanais.

COROLLAIRE 1.2. - Dans tout espace de Fréchet réflexif, tout convexe borné fermé C est l'enveloppe convexe fermée de ses points dentés.

Démonstration. - Il suffit de remarquer que C est faiblement compact et d'appliquer le théorème 1.1.

En fait, ce corollaire peut être établi directement sans utiliser les théorèmes de LINDENSTRAUSS [9] et de TROYANSKI [19].

Ceci repose sur les résultats suivants :

1° Le théorème 2.2 de [15] qui affirme que, dans un espace localement convexe séparé et séparable, tout convexe faiblement compact est dentable.

2° Le théorème 3.3 de [15] qui montre que dans un espace de Fréchet dentable tout convexe borné fermé est l'enveloppe convexe fermée de ses points dentés.

3° Le lemme suivant qui est dû à MAYNARD.

LEMME 1.3 (MAYNARD [10]). - Soient E un e. l. c. métrisable et C un borné de E ; si toute partie dénombrable de C est dentable, alors C est dentable.

Démonstration. - Si C n'est pas dentable, il existe alors un voisinage V dans $\mathscr{V}(0)$ tel que, pour tout x dans C, x n'appartient pas à $\overline{\mathrm{conv}}(C \setminus (x + V))$.

Choisissons un x dans C, alors $x = \lim_n x_n$, où

$$x_n = \sum_{i=1}^{p_n} \lambda_i^n y_i^n \quad \text{avec} \quad M_n = \{y_1^n , \dots , y_{p_n}^n\} \subset C \setminus (x + V) .$$

Soit $M(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$; $M(x)$ est une partie dénombrable de $C \setminus (x + V)$, et x appartient à $\overline{\mathrm{conv}}(M(x))$. Posons

$$B_1 = M(x) , \quad B_2 = \bigcup_{y \in B_1} M(y) , \dots , \quad B_n = \bigcup_{y \in B_{n-1}} M(y) , \dots$$

Chaque B_n est dénombrable et par conséquent $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ est dénombrable, et $B \subset C$.

B est non dentable, en effet : Soit y dans B ; alors il existe n tel que y soit dans B_n, ceci implique que $M(y) \subset B_{n+1}$, mais $M(y) \subset C \setminus (y + V)$, donc

$$M(y) \setminus (y + V) = M(y) \subset B \setminus (y + V)$$

mais $y \in \overline{\mathrm{conv}}(M(y)) \subset \overline{\mathrm{conv}}(B \setminus (y + V)$, et la démonstration est terminée.

COROLLAIRE 1.4. - Soit E un e. l. c. métrisable, alors tout ensemble convexe faiblement compact K de E est dentable.

Démonstration. - D'après le lemme 1.3, nous pouvons supposer que E est séparable, et le résultat s'obtient en appliquant le théorème 2.2 dans [15].

Remarque. - On obtient de cette façon le corollaire 2.4 de [15] qui dit que tout espace de Fréchet réflexif est dentable, pour obtenir le corollaire 1.2, il suffit d'appliquer le théorème 3.3 de [15].

PROBLÈME I. - Est-ce que tout convexe faiblement compact d'un espace de Fréchet est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés ?

Définition 1.5. - Un espace vectoriel topologique X est dit quasi-séparable si toute partie bornée de X est séparable.

Nous obtenons à la fin de ce paragraphe une extension du théorème 3.6 de NAMIOKA [11], en remplaçant, dans ce théorème, les points extrémaux par les points dentés (extrémaux forts) grâce au théorème 3.3 de [15].

THÉORÈME 1.6. - Soit E un espace de Fréchet tel que E'' soit quasi séparable pour la topologie forte, alors tout convexe borné fermé est l'enveloppe convexe fermée de ses points dentés.

Démonstration. - Il suffit, d'après le théorème 3.3 de [15], de démontrer que E est dentable.

Soit C un convexe borné fermé de E : considérons $j : E \to E''$ l'injection canonique de E dans E'' muni de la topologie forte $\beta(E'', E')$. Cette injection est un isomorphisme topologique de E sur $j(E) \subset E''$ d'après KÖTHE ([7], p. 300).

Soit C_1 l'adhérence de $C \simeq j(C)$ dans $(E'', \sigma(E'', E'))$, alors C_1 est $\sigma(E'', E')$ compact d'après [7] (§23, 2, (4)).

Soit F le sous-espace engendré par C_1 dans E'', alors $(F, \beta(E'', E'))$ est séparable.

Soit Z l'ensemble des points de continuité de l'application identique

$$1_{C_1} : (C_1, \sigma(E'', E')) \to (C_1, \beta(E'', E')) .$$

Le théorème 2.3 de [11], appliqué à $(F, \sigma(E'', E'), \beta(E'', E'))$ montre qu'il existe $u \in Z \cap \mathcal{E}(C_1)$. (($\mathcal{E}(C_1)$ désigne l'ensemble des points extrémaux de C_1), et par suite, il existe une famille ultra-filtrée $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'éléments de $C \simeq j(C)$ qui converge vers u pour $\sigma(E'', E')$, donc pour $\beta(E'', E')$; comme C est complet dans E, il est $\beta(E'', E')$ fermé, donc $u \in C$.

Nous allons démontrer que u est un point denté de C. Soit V dans $\mathcal{V}(u)$, il existe un $\sigma(E'',E')$ ouvert W tel que $u \in W \cap C_1 \subset V \cap C_1$ puisque u est extrémal dans C_1 qui est $\sigma(E'', E')$ compact, il existe alors, d'après CHOQUET [1] (Vol. II, p. 107), une tranche $\sigma(E'', E')$ ouverte T telle que u appartienne à T, et T soit contenue dans $W \cap C_1 \subset V \cap C$; de ceci, nous déduisons que $C \setminus V \subset C_1 \setminus T$, comme $C_1 \setminus T$, est un convexe $\sigma(E'', E')$ compact. u n'appartient pas à l'enveloppe convexe $\sigma(E'', E')$ fermée de $C \setminus V$ et, à fortiori, n'appartient pas à l'enveloppe convexe $\beta(E'', E')$ fermée de $C \setminus V$.

2. Variation d'une mesure à valeurs dans un espace localement convexe.

Dans tout ce qui suit, T désignera un ensemble muni d'une σ-algèbre Σ de parties de T, et μ une mesure positive finie sur Σ.

Nous supposerons pour simplifier que T appartient à Σ, nous verrons que nous pouvons toujours faire cette supposition.

Définition 2.1. - Soit E un e. l. c. s. ; une mesure sur Σ, à valeurs dans E, est une fonction $m : \Sigma \longrightarrow E$ qui est σ-additive.

Soient E un e. l. c. s., et q une semi-norme continue sur E. Si m est une mesure sur Σ, à valeurs dans E, et A une partie de T, nous posons :

$$|m|_q(A) = \sup_J \sum_{i\in J} q(m(A_i))$$

où le sup est pris pour toutes les familles finies $(A_i)_{i\in J}$ d'ensemble disjoints de Σ tel que $\bigcup_{i\in J} A_i \subset A$. Si A est dans Σ, nous pouvons prendre

$$A = \bigcup_{i\in J} A_i .$$

Définition 2.2. - Le nombre $|m|_q(A)$ s'appelle la q-variation de m sur A.

Il est bien connu [4] que $|m|_q$ vérifie les propriétés suivantes :

1° $0 \leq |m|_q(A) \leq +\infty$ pour tout $A \subset T$,

2° $|m|_q(\emptyset) = 0$,

3° $q(m(A)) \leq |m|_q(A)$ pour tout A dans Σ,

4° $|m|_q$ est croissante,

5° $|m|_q(A) = 0$ si, et seulement si, $q(m(B)) = 0$ pour tout $B \subset A$ et B dans Σ.

6° la restriction de $|m|_q$ à Σ est une mesure positive sur Σ pouvant prendre la valeur $+\infty$.

Définition 2.3.

(a) Nous dirons que m est à q-variation finie si $|m|_q(A) < +\infty$ pour tout A dans Σ.

(b) Nous dirons que m est à variation finie si elle est à q-variation finie pour toute semi-norme continue q sur E.

THÉORÈME 2.4 (D. R. LEWIS [8], corollaire 4.3). - *Si E est un espace de Fréchet nucléaire et si m est une mesure à valeurs dans E définie sur une σ-algèbre Σ, alors m est à variation finie.*

Définition 2.5. - Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré, E un e. l. c. s., et m une mesure sur Σ à valeurs dans E. Nous dirons que m est absolument continue par rapport à μ , et nous noterons $m \ll \mu$ si $m(A) = 0$ chaque fois que $\mu(A) = 0$ et A dans Σ .

PROPOSITION 2.6. - m est absolument continue par rapport à μ si, et seulement si, pour toute semi-norme continue q sur E , $|m|_q$ est absolument continue par rapport à μ .

La proposition suivante va nous permettre de démontrer les deux lemmes 4.2 et 4.3, et par conséquent le théorème 4.4.

PROPOSITION 2.7. - Soient E un e. l. c. s. métrisable, (T , Σ , μ) un espace mesuré, et m une mesure sur Σ , à valeurs dans E de variation finie absolument continue par rapport à μ . Alors, pour tout $A \in \Sigma^+$,

$$\Sigma^+ = \{B \in \Sigma \; ; \; \mu(B) > 0\}$$

il existe $F \in \Sigma^+$, $F \subset A$, et tel que

$$A_m(F) = \{\frac{m(F')}{\mu(F')} \; ; \; F' \subset F \text{ et } F' \in \Sigma^+\}$$

soit borné dans E .

Démonstration. - Soit $(q_n)_{n\geq 1}$ la suite de semi-normes définissant la topologie de E . Nous avons, pour tout n , $|m|_{q_n} \ll \mu$. Considérons la mesure suivante

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|m|_{q_n}}{1 + |m|_{q_n}(T)} .$$

ν est une mesure positive sur Σ , et $\nu \ll \mu$, nous vérifierons que $\nu(A) \leq 1$ pour tout $A \in \Sigma$. Notons enfin que $|m|_{q_n}(A) \leq (1 + |m|_{q_n}(T))2^n \, \nu(A)$ pour tout n et pour tout $A \in \Sigma$.

Soit A dans Σ^+ ; puisque $0 < \mu(A) < +\infty$ et $0 \leq \nu(A) \leq 1$, alors il existe un $k > 0$ tel que

(1) $$\nu(A) - k\mu(A) < 0 .$$

Considérons la mesure $\lambda = \nu - k\mu$. D'après le théorème de Hahn ([4], théorème 1, p. 45), A peut se mettre comme réunion des deux ensembles disjoints F et G avec F et G dans Σ et tel que, pour tout $N \subset F$ avec N dans Σ ,

(2) $$\lambda(N) = \nu(N) - k\mu(N) \leq 0$$

et, pour tout $P \subset G$ avec P dans Σ ,

(3) $$\lambda(P) = \nu(P) - k\mu(P) \geq 0 .$$

$F \in \Sigma^+$ sinon $\mu(F) = 0$, et par conséquent $\nu(F) = 0$, ceci entraîne que :

$$\nu(A) = \nu(G) \text{ et } \mu(A) = \mu(G) .$$

Nous aurons ainsi, en tenant compte de (1) et (3),

$$0 \leq \nu(G) - k\mu(G) = \nu(A) - k\mu(A) < 0 ,$$

donc une contradiction.

Considérons

$$A_\nu(F) = \{\frac{\nu(F')}{\mu(F')} \ ; \quad F' \subset F \quad \text{et} \quad F' \in \Sigma^+\} \ .$$

$A_\nu(F)$ est un sous-ensemble de $\underset{\sim}{R}$, et la relation (2) montre que $A_\nu(F) \subset [0,k]$.

Nous disons que $A_m(F)$ est un borné de E ; en effet, soit q_n une semi-norme continue, et considérons

$$q_n(A_m(F)) \subseteq \underset{\sim}{R} \ .$$

Soit $\frac{m(F')}{\mu(F')}$ dans $A_m(F)$, nous avons

$$\frac{q_n(m(F'))}{\mu(F')} \leqslant \frac{|m|_{q_n}(F')}{\mu(F')} \leqslant 2^n(1 + |m|_{q_n}(T)) \frac{\nu(F')}{\mu(F')} \ ,$$

donc $q_n(A_m(F)) \subset [0 \ , \alpha_n k]$ en posant $\alpha_n = 2^n(1 + |m|_{q_n}(T))$, et la démonstration est terminée.

3. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace localement convexe séparé.

Soient $(T \ , \Sigma \ , \mu)$ un espace mesuré, et E un espace localement convexe séparé.

Définition 3.1. - Une fonction $f : T \longrightarrow E$ sera dite étagée relativement à Σ si f s'écrit de la forme suivante :

$$f = \sum_{i\in I} x_i \ \varphi_{A_i} \ ,$$

où I est fini, les A_i sont dans Σ et disjoints deux à deux, et les x_i sont des éléments de E (φ_B désigne la fonction caractéristique d'un ensemble $B \subset T$).

Supposons que E est un espace de Banach.

Définition 3.2 ([20], p. 132). - Une fonction $f : T \longrightarrow E$ sera dite μ-intégrable s'il existe une suite $\varphi_n : T \longrightarrow E$ de fonctions étagées convergentes μ-p. p. vers f et telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_T \|f(t) - \varphi_n(t)\| \ d\mu(t) = 0 \ .$$

Pour tout A dans Σ , l'intégrale de f sur A est défini par

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_T \varphi_A(t) \ \varphi_n(t) \ d\mu(t)$$

qui est un élément de E .

Désignons par $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ l'ensemble des fonctions μ-intégrables. Considérons sur cet espace la semi-norme suivante

$$\|f\|_1 = \int_T \|f(t)\| \ d\mu(t) \ .$$

Soit $L^1_E(\mu)$ l'espace séparé associé à $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ relativement à la semi-norme $\| \ \|_1$.

$L_E^1(\mu)$ est un espace normé et

$$\|\dot{f}\|_1 = \int_T \|f(t)\|\, d\mu \quad \text{pour} \quad f \in \dot{f}\ .$$

Dans la suite, nous continuons à noter une classe $\dot{f}$ dans $L_E^1(\mu)$ par une fonction f dans $\dot{f}$. Nous savons ([4], p. 130) que

$$L_E^1(\mu) \text{ est un espace de Banach.}$$

Revenons au cas général, et supposons que E est un e. l. c. s. complet. Soit $(q_\alpha)_{\alpha\in I}$ la famille de semi-normes définissant sa topologie.

Nous supposons que I est ordonné, et que la famille $(q_\alpha)_{\alpha\in I}$ est filtrante croissante.

Pour tout $\alpha \in I$, soit E_α l'espace de Banach complété de l'espace quotient de E par le sous-espace $q_\alpha^{-1}(0)$ muni de la norme obtenue à partir de q_α par passage au quotient. Cette norme est notée encore par q_α ; u_α désigne l'application canonique de $E \to E_\alpha$, si $\alpha \leq \beta$, il existe une application linéaire continue

$$g_{\alpha\beta} : E_\beta \to E_\alpha\ ,$$

telle que $u_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ u_\beta$.

Considérons la limite projective

$$\hat{E} = \varprojlim_\alpha E_\alpha$$

relativement aux applications $g_{\alpha\beta}$.

Il est bien connu ([16], p. 53) que E est topologiquement isomorphe à $\hat{E}$ par l'application $x \to (u_\beta(x))_{\beta\in I}$. Nous identifierons toujours E et $\hat{E}$.

<u>Définition</u> 3.3. – Une application $f : T \to E$ est dite μ-intégrable si, pour tout β dans I, $u_\beta \circ f : T \to E_\beta$ est μ-intégrable.

Soient $f : T \to E$ μ-intégrable, et A dans Σ. Considérons l'élément

$$\left(\int_A u_\beta \circ f\, d\mu\right)_\beta \in \prod_{\beta\in I} E_\beta\ .$$

Soit $\alpha \leq \beta$, nous avons, grâce au corollaire 2 de [20] (p. 134),

$$g_{\alpha\beta}\left(\int_A u_\beta \circ f\, d\mu\right) = \int_A g_{\alpha\beta} \circ u_\beta \circ f\, d\mu = \int_A u_\alpha \circ f\, d\mu$$

donc

$$\left(\int_A \mu_\beta \circ f\, d\mu\right)_{\beta\in I} \in \hat{E} \simeq E\ .$$

Nous posons

$$\int_A f\, d\mu = \left(\int_A u_\beta \cdot f\, d\mu\right)_{\beta\in I}\ .$$

Remarquons que, si f est étagée,

$$f = \sum_{i\in I} x_i\, \varphi_{A_i}$$

alors

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{i\in I} x_i\, \mu(A \cap A_i) \quad \text{pour tout } A \text{ dans } \Sigma\ .$$

Posons $\mathcal{L}_E^1(\mu)$ l'espace de fonction $f : T \to E$ qui sont μ-intégrable. Munissons cet espace d'une topologie localement convexe, définie par la famille de semi-normes

$$\|f\|_1^{q_\alpha} = \int_T q_\alpha(f(t))\, d\mu(t) = \int_T q_\alpha(u_\alpha \circ f(t))\, d\mu(t) .$$

Cette quantité est bien définie, grâce au théorème 1 de [20] (p. 133).

Soit $L_E^1(\mu)$ l'espace localement convexe séparé associé à $\mathcal{L}_E^1(\mu)$ relativement aux semi-normes $(\| \ \|_1^{q_\alpha})_{\alpha \in I}$.

THÉORÈME 3.4 ([6], p. 59). - Si E est un espace de Fréchet, alors $L_E^1(\mu)$ l'est aussi.

Démonstration. - Soit (q_n) la famille de semi-norme définissant la topologie de E .

$L_E^1(\mu)$ est séparé, il est donc métrisable puisque sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes

$$\|f\|_1^{q_n} = \int_T q_n(f(t))\, d\mu(t) .$$

Il reste à démontrer que $L_E^1(\mu)$ est complet. La démonstration est classique. Il s'agit de remarquer que chaque $L_{E_n}^1(\mu)$ est complet, d'appliquer la méthode de l'extraction successive de sous-suites d'une suite de Cauchy dans $L_E^1(\mu)$, et d'extraire enfin la suite diagonale qui nous donnera la fonction limite.

4. Relation entre la dentabilité et la propriété de Radon-Nikodym.

Définition 4.1. - On dit qu'un espace de Fréchet E possède la propriété de Radon-Nikodym (R. N.) si, pour tout espace mesuré (T , Σ , μ) et toute mesure m sur Σ à valeurs dans E absolument continue par rapport à μ et de variation finie, il existe $f : T \to E$ tel que $f \in L_E^1(\mu)$, et

$$m(A) = \int_A f\, d\mu \quad \text{pour tout} \quad A \in \Sigma .$$

J. Von NEUMANN [12] a démontré qu'un espace de Hilbert possède la propriété de Radon-Nikodym. CLARKSON [2] a démontré que tout espace de Banach uniformément convexe possède la propriété de R. N., il a démontré encore que ℓ_1 possède cette propriété, mais c_0 et $L_1[0 , 1]$ ne la possèdent pas. Jusqu'à 1940, on connaissait les résultats suivants : si E est un espace de Banach réflexif ou dual d'un Banach séparable, alors E possède la propriété de R. N.

En 1967, RIEFFEL a démontré dans [14] que tout espace de Banach dentable possède la propriété de R. N.

Récemment, MAYNARD [10] a démontré qu'un espace de Banach E possède la propriété de R. N. si, et seulement si, E est s-dentable (i. e. tout borné de E est s-dentable).

DAVIS et PHELPS [3] ont démontré qu'un espace de Banach possède la propriété de R. N. si, et seulement si, E est dentable.

C. SWARTZ [17] et E. THOMAS [18] ont remarqué que tout espace de Fréchet nucléaire possède la propriété de R. N.

Dans [15] et dans le paragraphe §1 de cet exposé, nous avons mis en évidence une large classe d'espaces de Fréchet dentables.

Nous allons démontrer que tout espace de Fréchet s-dentable (et en particulier dentable) possède la propriété de R. N., en suivant l'idée de RIEFFEL [14]. Notons enfin que la classe des espaces de Fréchet s-dentables contient strictement la classe des espaces de Fréchet nucléaires.

LEMME 4.2. - Soient (T , Σ , μ) un espace mesuré, E un espace de Fréchet s-dentable, et m une mesure sur Σ à valeurs dans E absolument continue par rapport à μ et de variation finie.

Soient d'autre part $\varepsilon > 0$, q une semi-norme continue sur E, et A dans Σ^+; alors il existe $F \subset A$, $F \in \Sigma^+$, et x dans E tel que :

$$A_m(F) \subset B_q(x , \varepsilon) = \{y \in E ; \; q(x - y) \leqslant \varepsilon\} .$$

Démonstration. - D'après la proposition 2.7, il existe $A_0 \subset A$, A_0 dans Σ^+ tel que $A_m(A_0)$ soit borné dans E, donc s-dentable.

Soit $x \in A_m(A_0)$ tel que $x \notin s(A_m(A_0) \setminus B_q(x , \varepsilon))$, alors

$$x = \frac{m(F_0)}{\mu(F_0)} \quad \text{où} \quad F_0 \subset A \quad \text{et} \quad F_0 \quad \text{dans} \quad \Sigma^+ .$$

Si $A_m(F_0)$ n'était pas inclus dans $B_q(x , \varepsilon)$, il existerait alors $E_1 \subset F_0$, E_1 dans Σ^+, et

$$\frac{m(E_1)}{\mu(E_1)} \in (A_m(A_0) \setminus Bq(x , \varepsilon)) \subset s(A_m(A_0) \setminus Bq(x , \varepsilon)) = Q .$$

Soit k_1 le plus petit entier supérieur ou égal à 2 pour lequel il existe $E_1 \subset F_0$, $E_1 \in \Sigma^+$ tel que

$$\mu(E_1) \geqslant \frac{1}{k_1}$$

et

$$\frac{m(E_1)}{\mu(E_1)} \in A_m(A_0) \setminus Bq(x , \varepsilon) \subseteq Q .$$

Considérons cet E_1, et soit $F_1 = F_0 \setminus E_1$. Si $\mu(F_1) = 0$, alors $m(F_1) = 0$ et

$$\mu(F_0) = \mu(E_1) \quad \text{et} \quad m(F_0) = m(F_1) ,$$

donc $(m(F_0))/(\mu(F_0)) = (m(E_1))/(\mu(E_1))$, mais ceci est impossible d'après le choix de F_0, donc $\mu(F_1) > 0$.

Nous construisons par récurrence une suite $\{E_n\} \subset \Sigma^+$, et une suite non décroissante d'entiers k_n avec la propriété que k_n soit le plus petit entier supérieur ou égal à 2 pour lequel il existe un ensemble $E_n \subset F_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ tel que E_n soit dans Σ^+ et

$$\frac{m(E_n)}{\mu(E_n)} \in A_m(A_0) \setminus Bq(x , \varepsilon) \subset Q .$$

Puisque $\mu(E_n) \xrightarrow{n} 0$, alors $k_n \xrightarrow{n} \infty$, posons

$$B_0 = \bigcup_n E_n \quad \text{et} \quad F = F_0 \setminus B_0 .$$

Nous disons que $\mu(F) > 0$ et $A_m(F) \subset Bq(x , \varepsilon)$.

1° En effet, $A_m(F) \subset B_q(x , \varepsilon)$, sinon il existerait $F' \subset F$, $F' \in \Sigma^+$ et

$$\frac{m(F')}{\mu(F')} \in A_m(A_0) \setminus B_q(x , \varepsilon) \subset Q ,$$

mais $F' \subset F_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ pour tout n .

D'après le choix de k_n nous avons

$$\mu(F') \leqslant \frac{1}{k_n - 1} \quad \text{pour tout} \quad n ,$$

comme $k_n \longrightarrow \infty$, alors $\mu(F') = 0$, d'où une contradiction.

2° $\mu(F) > 0$, sinon $\mu(F) = 0$, alors $m(F) = 0$, et

$$\mu(F_0) = \mu(B_0) \quad \text{et} \quad m(F_0) = m(B_0) ,$$

donc

$$\frac{m(F_0)}{\mu(F_0)} = \frac{m(B_0)}{\mu(B_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(E_n)}{\mu(B_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(E_n)}{\mu(E_n)} \frac{\mu(E_n)}{\mu(B_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(E_n)}{\mu(B_0)} \frac{m(E_n)}{\mu(E_n)}$$

comme $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n))/(\mu(B_0)) = 1$, et

$$\frac{m(E_n)}{\mu(E_n)} \in A_m(A_0) \setminus B_q(x , \varepsilon) \quad \text{pour tout} \quad n ,$$

alors $(m(F_0))/(\mu(F_0)) \in Q$, ce qui est contraire au choix de F_0 .

Nous allons énoncer un lemme qui se démontre presque de la même façon que le lemme 4.2.

LEMME 4.3. - <u>Soient</u> (T , Σ , μ) <u>un espace mesuré</u>, E <u>un espace de Fréchet séparable</u>, <u>et</u> m <u>une mesure sur</u> Σ <u>à valeurs dans</u> E <u>absolument continue par rapport à</u> μ <u>et de variation finie</u>.

<u>Soient d'autre part</u> $\varepsilon > 0$, <u>et</u> q <u>une semi-norme continue sur</u> E , <u>alors il existe une suite</u> $\{x_n\} \subset E$, <u>une suite</u> $\{E_n\}$ <u>d'éléments de</u> Σ^+ <u>disjoints deux à deux et telles que</u>

1° $T = \bigcup E_n$,

2° $A_m(E_n) \subset B_q(x_n , \varepsilon)$ <u>pour tout</u> n .

THÉORÈME 4.4. - <u>Tout espace de Fréchet</u> s-<u>dentable possède la propriété de R. N.</u>

<u>Démonstration</u>. - Soient (T , Σ , μ) un espace mesuré, et m une mesure sur Σ à valeurs dans E absolument continue par rapport à μ et de variation finie. Il s'agit de démontrer l'existence d'une application $f \in L^1_E(\mu)$ telle que

$$m(B) = \int_B f \, d\mu \quad \text{pour tout } B \text{ dans } \Sigma .$$

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les collections π, tel que π soit formé d'un nombre fini d'éléments de Σ^+ disjoints deux à deux. Nous dirons que $\pi \leq \pi_1$ si tout élément de π est à un ensemble μ-négligeable près une réunion d'éléments de π_1.

Nous vérifions que $(\mathcal{B} , \leq)$ devient un ensemble ordonné filtrant croissant. Pour π dans $\mathcal{B}$ définissons la fonction étagée suivante

$$f_\pi = \sum_{A \in \pi} \frac{m(A)}{\mu(A)} \varphi_A .$$

Pour tout π nous avons f_π dans $L^1_E(\mu)$. Nous allons démontrer que $(f_\pi)_{\pi \in \mathcal{B}}$ forme un filtre de Cauchy dans $L^1_E(\mu)$. Pour cela il suffit de démontrer que, pour toute semi-norme continue q sur E et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\pi_0 \in \mathcal{B}$ tel que pour $\pi \geq \pi_0$, nous aurions $\|f_\pi - f_{\pi_0}\|_1^q \leq \varepsilon$.

Puisque $|m|_q$ est absolument continue par rapport à μ, il existe $\delta > 0$ tel que $|m|_q(F) < \varepsilon/3$ dès que $\mu(F) < \delta$.

D'après le lemme 4.3, il existe une suite $\{x_i\} \subset E$ et une suite $\{E_i\}$ d'éléments de Σ^+ deux à deux disjoints, telles que $T = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ et

$$A_m(E_i) \subset B_q(x_i , \frac{\varepsilon}{6\mu(T)}) .$$

Puisque $\mu(T) < +\infty$, il existe n tel que si $E_0 = T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, alors $\mu(E_0) < \delta$. Soit

$$\pi_0 = \{E_i ; \ 0 \leq i \leq n\} \quad \text{si} \quad \mu(E_0) > 0 ,$$

et

$$\pi_0 = \{E_i ; \ 1 \leq i \leq n\} \quad \text{si} \quad \mu(E_0) = 0 .$$

Nous supposerons dans la suite que $\mu(E_0) \neq 0$. La démonstration sera plus facile si $\mu(E_0) = 0$.

Soit $\pi \geq \pi_0$, alors $\pi = \{F_{ij} ; \ 0 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq k_i\}$ tel que $E_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} F_{ij}$ pour $0 \leq i \leq n$, et ceci à un ensemble μ-négligeable près.

Puisque les éléments de π sont disjoints, et ont une mesure strictement positive. Nous avons

$$\|f_\pi - f_{\pi_0}\|_1^q$$

$$= \int_T q(f_\pi(x) - f_{\pi_0}(x))\, d\mu(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{k_0} q\left(\frac{m(F_{0j})}{\mu(F_{0j})} - \frac{m(E_0)}{\mu(E_0)}\right) \mu(F_{0j}) + \sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{k_i} q\left(\frac{m(F_{ij})}{\mu(F_{ij})} - \frac{m(E_i)}{\mu(E_i)}\right) \mu(F_{ij}\right\}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k_0} q(m(F_{0j})) + q(m(E_0)) + \sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{k_i} \left(q\left(\frac{m(F_{ij})}{\mu(F_{ij})} - x_i\right) + q\left(\frac{m(E_i)}{\mu(E_i)} - x_i\right) \mu(F_{ij})\right)\right\}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\mu(T)}\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \varepsilon\ .$$

Donc, puisque $L_E^1(\mu)$ est complet,

$$f_\pi \dashrightarrow f \in L_E^1(\mu)\ ,$$

en particulier,

$$\int_B f\, d\mu = \lim_\pi \int_B f_\pi\, d\mu \quad \text{pour tout} \quad B \quad \text{dans} \quad \Sigma\ .$$

Il reste à démontrer que

$$m(B) = \int_B f\, d\mu \quad \text{pour tout} \quad B \quad \text{dans} \quad \Sigma\ ,$$

1° si $\mu(B) = 0$, ceci implique que $m(B) = 0$;

2° si $\mu(B) > 0$, soit $\pi_0 = \{B\}$, nous vérifions facilement que

$$m(B) = \int_B f_\pi\, d\mu \quad \text{dès que} \quad \pi \geqslant \pi_0\ ,$$

donc $m(B) = \lim_\pi \int_B f_\pi\, d\mu = \int_B f\, d\mu$.

Il est bien connu qu'un espace de Banach E possède la propriété de R. N. si, et seulement si, E est dentable [3].

PROBLÈME II. - <u>Si un espace de Fréchet</u> E <u>possède la propriété de R. N., est-ce que</u> E <u>est dentable</u> ?

<u>Remarque</u>. - Nous avons trouvé une solution affirmative du problème II, elle sera publiée prochainement.

<u>Remarque</u>. - Tous les résultats restent valables si nous ne supposons pas que T est dans Σ . Ceci est une conséquence de la proposition suivante et de son corollaire.

PROPOSITION 4.5. - <u>Soit</u> (T, Σ, μ) <u>un espace mesuré, avec</u> $T \notin \Sigma$, <u>alors il existe</u> $T_0 \in \Sigma$ <u>tel que</u> $\mu(A) = 0$ <u>chaque fois que</u> A <u>est dans</u> Σ <u>et</u> $A \cap T_0 = \emptyset$.

<u>Démonstration</u>. - Pour tout $n \geqslant 1$, soit

$$\mathfrak{A}_n = \{B \in \Sigma\ ;\ \mu(B) \geqslant \tfrac{1}{n}\}\ .$$

(a) Supposons que $\mathfrak{A}_n \neq \emptyset$, et considérons

$$\mathfrak{F}_n = \{\pi = \{A_{K_1}, \ldots, A_{K_p}\}\ ;\ A_{K_i} \in \mathfrak{A}_n \quad \text{et} \quad A_{K_i} \cap A_{K_j} \neq \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j\}\ .$$

Nous ordonnons $\mathfrak{F}_n$ par la relation $\pi_1 \leq \pi_2$ si, et seulement si, $\pi_1 \subset \pi_2$.

1° $\mathfrak{F}_n \neq \emptyset$ puisque $\mathfrak{A}_n \neq \emptyset$.

2° $\mathfrak{F}_n$ est inductif ; en effet, soit $(\pi_i)_{i\in I}$ une chaîne d'éléments de $\mathfrak{F}_n$, et soit $\pi = \bigcup_{i\in I} \pi_i$ si A, B sont dans π avec $A \neq B$, alors il existe un i dans I tel que A, $B \in \pi_i$, donc $A \cap B = \emptyset$.

Nous disons que π est formé d'une suite finie d'éléments de $\mathfrak{A}_n$, car si π était infini, nous pourrions exhiber une suite infinie d'éléments de π soit $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ si $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, alors A est dans Σ, et $\mu(A) = +\infty$, ce qui est impossible puisque μ est finie.

Donc π est dans $\mathfrak{F}_n$, π majore π_i pour tout i dans I, et $\mathfrak{F}_n$ est inductif.

Soit π un élément maximal de $\mathfrak{F}_n$, et posons $B_n = \bigcup_{A\in\pi} A$. B_n est dans Σ.

(b) Si $\mathfrak{A}_n = \emptyset$, nous posons $B_n = \emptyset$. Il suffit de prendre $T_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, si $A \in \Sigma$ et $A \cap T_0 = \emptyset$, donc $A \cap B_n = \emptyset$ pour tout n, et ceci implique, d'après le choix de B_n, que $\mu(A) \leq \frac{1}{n}$ pour tout n, donc $\mu(A) = 0$.

COROLLAIRE 4.6. - <u>Soient</u> E <u>un e. l. c. métrisable</u>, <u>et</u> m <u>une mesure sur</u> Σ <u>à valeur dans</u> E <u>à variation finie</u>, <u>alors il existe</u> T_0 <u>dans</u> Σ <u>tel que</u> $m(A) = 0$ <u>si</u> A <u>est dans</u> Σ, <u>et</u> $A \cap T_0 = \emptyset$.

<u>Démonstration</u>. - Si T est dans Σ, nous prenons $T = T_0$; sinon, nous considérons (q_n) la famille de semi-normes définissant la topologie de E.

D'après la proposition, il existe pour chaque mesure $|m|_{q_n}$ un ensemble T_0^n dans Σ tel que $|m|_{q_n}(A) = 0$; chaque fois que A est dans Σ et $A \cap T_0^n = \emptyset$, il suffit de prendre $T_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_0^n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis. Vol. I-III. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[2] CLARKSON (J. A.). - Uniformly convex spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 40, 1936, p. 396-414.

[3] DAVIS (W. J.) and PHELPS (R. R.). - The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces, Proc. Amer. math. Soc. (à paraître).

[4] DINCULEANU (N.). - Vector measures. - Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966 (Hochschulbücher für Mathematik, 64).

[5] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques, 3a edição. - São Paulo, Sociedade de Matematica de São Paulo, 1964.

[6] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[7] KÖTHE (G.). - Topological vector spaces. I. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 159).

[8] LEWIS (D. R.). - On integrability and summability in vector spaces, Illinois J. Math., t. 16, 1972, p. 294-307.

[9] LINDENSTRAUSS (J.). - Weakly compact sets. Their topological properties and the Banach spaces they generate, "Symposium on infinite dimensional topology", p. 235-273. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 69).

[10] MAYNARD (H. B.). - A geometric characterization of Banach spaces with the Radon-Nikodym property, Trans. Amer. math. Soc., t. 185, 1973, p. 493-500.

[11] NAMIOKA (I.). - Neighborhoods of extreme points, Israël J. Math., t. 5, 1967, p. 145-152.

[12] von NEUMANN (J.). - Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Annals of Math., Series 2, t. 33, 1932, p. 587-642 et p. 789-791.

[13] PHELPS (R. R.). - Dentability and extreme points in Banach spaces (à paraître).

[14] RIEFFEL (M. A.). - Dentable subsets of Banach spaces, with application to a Radon-Nikodym theorem, "Functional analysis", Proceedings of a Conference held at the University of California [1966. Irvine], p. 71-77. - Washington, Thompson Company, London, Academic Press, 1967.

[15] SAAB (E.). - Dentabilité et points extrémaux dans les espaces localement convexes, Séminaire Choquet : 13e année, 1973/74, n° 13, 9 p.

[16] SCHAEFFER (H. H.). - Topological vector spaces, 3rd printing. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1970.

[17] SWARTZ (C.). - Vector measures and nuclear spaces, Rev. roum. Math. pures et appl., t. 18, 1973, p. 1261-1268.

[18] THOMAS (E.). - Le théorème de Lebesgue-Nikodym pour les mesures vectorielles et les applications 1-sommantes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, série A, p. 872-875.

[19] TROYANSKI (S. L.). - On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces, Studia Math., t. 37, 1971, p. 173-180.

[20] YOSIDA (K.). - Functional analysis, 3rd printing. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1971.

(Texte reçu le 6 mai 1974)

Elias SAAB
Foyer Franco-Libanais
15 rue d'Ulm
75005 PARIS