Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Goullet de Rugy

Comparaison des cônes profilés et des cônes presque bien coiffés

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. nº 15, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A11_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 15, 11 p.

7 mars 1974

COMPARAISON DES CÔNES PROFILÉS ET DES CÔNES PRESQUE BIEN COIFFÉS (*)

par Alain GOULLET de RUGY [Tunis]

1. Introduction.

On se propose de montrer le résultat suivant : Soit E un espace vectoriel réticulé muni d'une topologie localement convexe et localement solide, métrisable. Alors le cône E'_+ des formes linéaires positives et continues sur E est presque bien coiffé si, et seulement si, il est profilé.

Pour cela, on donnera d'abord des critères pour que E'_+ soit presque bien coiffé, ou profilé, lorsque E possède un espace de représentation localement compact, puis on montrera, lorsque E est quelconque, comment on peut se ramener à ce cas particulier.

2. Caractérisations.

2.1. Définition. - On appelle espace vectoriel réticulé localement solide, en abrégé e. v. r. l. s., tout espace vectoriel réticulé E muni d'une topologie localement convexe ayant une base de voisinages convexes de l'origine, formée d'ensembles solides.

On peut aussi dire que la topologie de E peut être définie par une famille Q de semi-normes absolument monotones au sens suivant :

Pour tout $q \in Q$ et tout couple $x , y \in E$,

$$(|x| \leq |y|) \text{ implique } (q(x) \leq q(y)) .$$

Pour plus de détails, voir SCHAEFER [7], chap. V, §7.

2.2. Remarque. - Dans toute la suite, les espaces vectoriels réticulés localement solides considérés seront supposés séparés.

2.3. Définition. - On dit qu'un espace localement compact T est un espace de représentation d'un e. v. r. l. s. E s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels réticulés π_T d'un idéal d'ordre dense de E sur l'espace $C_k(T)$ des fonctions numériques finies continues et à support compact sur T .

L'intérêt de cette notion est fournie par les théorèmes 8 et 18 de [5] que nous résumons ici.

(*) Cette rédaction ne couvre qu'une partie de l'exposé, l'autre paraîtra ultérieurement sous le titre : "Une classe remarquable d'espaces de Banach riches en formes réticulantes".

2.4. THÉORÈME. - Soient E un e. v. r. l. s. ayant un espace de représentation T , et π_T l'isomorphisme associé dans la définition 2.3. Alors :

(a) L'isomorphisme π_T se prolonge en un isomorphisme d'espaces vectoriels réticulés, noté encore π_T , de E sur un espace vectoriel de fonctions numériques continues sur T , finies sur un ouvert partout dense (dépendant de la fonction), contenant l'espace $C_k(T)$.

(b) Pour toute forme linéaire positive et continue L sur E , il existe une mesure de Radon positive θ_L sur T , nécessairement unique, telle que :

$$L(x) = \theta_L(\pi_T(x))$$

pour tout $x \in E$.

Dans la suite, lorsqu'un e. v. r. l. s. E sera donné avec un espace de représentation T , nous identifierons un élément de E et la fonction correspondante sur T ainsi qu'un élément de E' et la mesure de Radon correspondante sur T . Moyennant cette identification, on notera que E' est un idéal d'ordre de mesures de Radon sur T et donc que E'_+ est une face du cône $\mathcal{M}^+(T)$ des mesures de Radon positives sur T .

Le lemme suivant est la clé des caractérisations que nous allons donner. Notons que sur E' et ses parties, la seule topologie que nous considèreront sera la topologie faible $\sigma(E' , E)$.

2.5. LEMME. - Soient E un e. v. r. l. s. ayant un espace de représentation T , et F une face fermée de E'_+ . Alors, il existe une plus petite partie fermée T_F de T telle que :

$$F = \{\theta \in E'_+ ; \ \operatorname{supp}(\theta) \subset T_F\} .$$

Démonstration.

(a) Montrons d'abord que la face F est fermée pour la topologie, trace sur E'_+ , de la topologie vague sur $\mathcal{M}^+(T)$. Soit $\theta \in (E'_+ \setminus F)$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E$ telle que :

(i) $\theta(f) > 0$,

(ii) $\mu(f) \leqslant 0$ pour tout $\mu \in F$.

Si on pose $g = \sup(f , 0)$, on a encore :

(i') $\theta(g) > 0$,

(ii') $\mu(g) = 0$, pour tout $\mu \in F$,

car F est une face de $\mathcal{M}^+(T)$. Cela étant, g est l'enveloppe supérieure des fonctions $h \in C_k(T)_+$ qu'elle majore. On peut donc trouver $h \in C_k(T)$ telle que :

(i") $\theta(h) > 0$,

(ii") $\mu(h) = 0$, pour tout $\mu \in F$.

(b) Soit G l'adhérence, pour la topologie vague, de F dans $\mathfrak{M}^+(T)$. Comme F est une face de $\mathfrak{M}^+(T)$, G est une face fermée de $\mathfrak{M}^+(T)$, (théorème 1.16 de [2]). Elle est donc de la forme

$$G = \{\theta \in \mathfrak{M}^+(T) \ ; \ \ \mathrm{supp}(\theta) \subset T_F\}$$

pour une partie fermée (unique) T_F de T . La conclusion résulte de ce que, par le (a), la trace de G sur E'_+ est égale à F .

2.6. Notations. - Soit E un e. v. r. l. s., On note $G(E'_+)$ la réunion des génératrices extrémales du cône E'_+ . Rappelons qu'une forme linéaire $L \in E'_+$ est sur une génératrice extrémale de E'_+ si, et seulement si, c'est une forme réticulante, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$L(x \vee y) = \max(L(x) \ , \ L(y))$$

quels que soient x , $y \in E$.

Lorsque E possède un espace de représentation T , on note S l'ensemble des points $s \in T$ tels que la mesure de Dirac en ce point appartienne à E'_+ . Puisque le cône E'_+ est une face de $\mathfrak{M}^+(T)$, toute génératrice extrémale D de E'_+ contient une mesure de Dirac δ_{s_D} , avec $s_D \in S$, et réciproquement.

2.7. Définition. - Soit E un e. v. r. l. s.. On appelle structurel de E , et on note $\mathrm{Str}(E)$ le quotient de $G(E'_+)$, moins l'origine, par la relation d'équivalence d'alignement : $x \rho y$ si, et seulement si, x et y sont sur une même génératrice.

2.8. PROPOSITION. - *Soit E un e. v. r. l. s. ayant un espace de représentation T . Alors l'espace topologique S , défini en 2.6, est homéomorphe au structurel de E .*

Démonstration. - Reprenons l'application $D \longmapsto s_D$ définie en 2.6. Il résulte aisément du lemme 2.5 et de la proposition 1.12 de [6] qu'elle définit un homéomorphisme de $\mathrm{Str}(E)$ sur S .

Du fait de cet énoncé, nous parlerons dorénavant de l'espace S comme étant le structurel de E .

2.9. Définition. - Soit E un e. v. r. l. s.. On dit que le cône E'_+ est profilé si la propriété suivante est vérifiée :

Quelles que soient les formes linéaires f , g sur E' , de restriction à E'_+ positives et s. c. s., l'inégalité $f \leq g$ sur $G(E'_+)$ implique l'inégalité $f \leq g$ sur E'_+ .

On doit à PORTENIER ([6], Scholie 2.19) de nombreuses caractérisations de ces cônes.

2.10. THÉORÈME. - *Pour tout e. v. r. l. s.* E *ayant un espace de représentation* T , *on a les équivalences suivantes* :

(a) *Le cône* E'_+ *est profilé.*

(b) *Pour toute face fermée* F *de* E'_+ , *non réduite à zéro,* $G(F)$ *ne se réduit pas à zéro.*

(c) *Tout idéal d'ordre fermé de* E *et distinct de* E *est contenu dans un idéal d'ordre fermé maximal.*

(d) *Pour toute partie compacte* K *de* T *ne rencontrant pas le structurel de* E *et toute mesure* $\theta \in E'_+$, $\theta(K) = 0$.

(e) *Pour toute mesure* $\theta \in E'_+$, *le support de* θ *rencontre le structurel de* E .

Démonstration. - Notons d'abord que l'équivalence de (b) et de (c) résulte des résultats généraux concernant la dualité des idéaux d'ordre fermés de E et des faces fermées de E'_+ (Voir [6], corollaire 1.9).

(a) implique (b) : Cela résulte de ce que, dans un cône profilé, toute face fermée F est l'enveloppe convexe fermée de $G(F)$.

(b) implique (d) : Si K est une partie compacte (et plus généralement fermée) de T ne rencontrant pas le structurel, la face fermée F formée des mesures $\theta \in E'_+$ de support inclus dans K , ne possède pas de génératrices extrémales. Elle se réduit donc à zéro.

Si donc θ est une mesure quelconque de E'_+ , la mesure θ' restriction de θ à K , qui appartient à E'_+ , puisque E'_+ est une face de $\mathfrak{M}^+(T)$, est nulle. Autrement dit, $\theta(K) = 0$.

(d) implique (e) : Soit θ une mesure de E'_+ , non nulle et de support $S(\theta)$ disjoint du structurel. Comme E'_+ est héréditaire dans $\mathfrak{M}^+(T)$, on peut supposer que $S(\theta)$ est compact, ce qui contredit le (d).

(e) implique (a) : Soient F_1 une face fermée de E'_+ , et F_2 l'enveloppe convexe fermée de $G(F_1)$. Par le lemme 2.5, associons à F_i , pour $i = 1 , 2$, le plus petit fermé T_{F_i} tel que F_i soit l'ensemble des mesures $\theta \in E'_+$ de support dans T_{F_i} .

Supposons $F_1 \neq F_2$, et soit θ un élément non nul de la face complémentaire F'_2 de F_2 dans F_1 . Toujours à cause de l'hérédité, on peut supposer que θ a un support compact K et même, quitte à prendre la restriction de θ à un compact plus petit, que :

$$K \subset (T_{F_1} \setminus T_{F_2}) .$$

Il est alors clair que K ne rencontre pas le structurel S de E , ce qui contredit (e) : En effet, si on avait un $s \in K \cap S$, on aurait $\delta_s \in G(F_1)$ et $\delta_s \notin G(F_2)$, ce qui serait absurde puisque $G(F_1) = G(F_2)$ par construction.

2.11. Remarque. - Les critères (b) et (c) pour qu'un cône de formes positives E'_+ soit profilé sont nettement plus faibles que les critères usuels. J'ignore si l'hypothèse que E possède un espace de représentation est essentielle pour leur démonstration.

2.12. Définition. - Soit E un e. v. r. l. s.. On dit que le cône E'_+ est *presque bien coiffé* si tout $L \in E'_+$, non nul, majore un $L' \in E'_+$, non nul, contenu dans un chapeau de E'_+.

L'intérêt essentiel de ces cônes tient au fait qu'on peut y faire de la représentation intégrale comme dans les cônes bien coiffés.

2.13. THÉORÈME. - *Pour tout e. v. r. l. s.* E *ayant un espace de représentation* T, *on a les équivalences suivantes* :

(a) *Le cône* E'_+ *est presque bien coiffé.*

(b) *Le cône* E'_+ *est profilé et le structurel de* E *est* θ*-mesurable pour toute mesure* $\theta \in E'_+$.

(c) *Toute mesure* $\theta \in E'_+$ *est concentrée sur le structurel de* E.

Démonstration. - L'équivalence de (b) et (c) résulte immédiatement du théorème précédent. Pour démontrer l'équivalence de (a) et (c), il suffit de remarquer (Voir [6]), que le cône E'_+ est presque bien coiffé si, et seulement si, toute mesure $\theta \in E'_+$ est la borne supérieure des mesures, à support compact contenu dans le structurel, qu'elle majore.

2.14. COROLLAIRE. - *Pour tout e. v. r. l. s. métrisable* E *ayant un espace de représentation* T, *on a les équivalences suivantes*

(a) *Le cône* E'_+ *est profilé.*

(b) *Le cône* E'_+ *est presque bien coiffé.*

Démonstration. - Puisque E est métrisable, il existe une suite X_n de convexes compacts de E'_+, de réunion E'_+. Pour chaque entier $n \geq 0$, posons

$$S_n = \{s \in T \ ; \ \delta_s \in X_n\} .$$

On voit aisément que S_n est une partie fermée de T. Ainsi le structurel S de E, qui est la réunion des S_n, est un F_σ de T. En particulier, il est universellement mesurable. L'assertion est donc une conséquence immédiate du théorème précédent.

2.15. Définition. - Soient E un e. v. r. l. s., et e un élément positif de E. On dit que e est *strictement positif* si $L(e)$ est strictement positif pour tout L non nul de E'_+.

2.16. LEMME. - Soient E un e. v. r. l. s., et J un idéal d'ordre de E. Alors le polaire J^0 de J dans E' est un idéal d'ordre fermé de E.

Démonstration. - La seule chose à montrer est que $|L| \in J^0$ pour tout $L \in J^0$. Mais cela est une conséquence immédiate de la formule classique (voir par exemple [4], théorème 2.6.1) :

$$|L|(x) = \sup_{|y| \leq x} L(y) ,$$

vérifiée pour tout $x \in E_+$.

2.17. PROPOSITION. - Dans tout e. v. r. l. s. E, l'adhérence d'un idéal d'ordre est un idéal d'ordre.

Démonstration. - Soit J un idéal d'ordre de E. Par le lemme précédent, son polaire J^0 est un idéal d'ordre de E'. Par le théorème 1.8 de [6], son bipolaire J^{00} est un idéal d'ordre de E, d'où l'assertion.

2.18. COROLLAIRE. - Soient E un e. v. r. l. s., et e un élément positif de E. Alors, e est strictement positif si, et seulement si, l'idéal d'ordre engendré par e est dense dans E.

Démonstration. - Soit J l'idéal d'ordre engendré par e. Par le lemme 2.16, son polaire J^0 est un idéal d'ordre. En particulier, il est positivement engendré. Donc si e est strictement positif, $J^0 = \{0\}$ et J est dense dans E. Pour montrer la réciproque, remarquons que la partie positive de J^0 est identique à l'ensemble des $L \in E'_+$ tels que $L(e) = 0$. De sorte que, si J est dense, e est strictement positif.

2.19. THÉORÈME. - Soit E un e. v. r. l. s. ayant un élément strictement positif e. Alors, si le structurel de E, qui est complètement régulier, est universellement mesurable dans son compactifié de Stone-Čech, on a les équivalences suivantes :

(a) Le cône E'_+ est profilé.

(b) Le cône E'_+ est presque bien coiffé.

Démonstration. - Pour toute forme linéaire f sur E', notons $R(f)$ sa restriction à E'_+, et posons :

$$H_0 = \{R(f) \ ; \ f \in E'^* \text{ et } R(f) \text{ continue}\}$$

$$H = \{R(f) \ ; \ f \in E\} .$$

En utilisant le même argument que dans la proposition 1.8 de [2], on voit que H est dense dans H_0, en ce sens que : Pour tout $f \in (H_0)_+$ et tout $L \in E'_+$, on a :

$$(2.19.1) \qquad \begin{cases} L(f) = \inf\{L(g) \ ; \ g \in H \text{ et } g \geq f\} \\ L(f) = \sup\{L(g) \ ; \ g \in H \ , \ 0 \leq g \leq f\} , \end{cases}$$

d'où il résulte que H_0 est un espace vectoriel réticulé. Par ailleurs, l'application R est un isomorphisme d'espaces vectoriels réticulés de E sur H. Cet isomorphisme induit une topologie localement solide $\mathcal{T}$ sur H. On munit alors H_0 de la topologie localement solide la plus fine coïncidant avec $\mathcal{T}$ sur H (Pour la construire, il suffit d'associer à chaque voisinage solide V de H l'ensemble $\overline{V}$ des $h \in H_0$ tels que $|h| \leq f$ pour un $f \in V$). De (2.19.1) on déduit que H est cofinal et dense dans H_0. Par suite, si I désigne l'injection de H dans H_0, la transposée de l'application $I \circ R$ définit une bijection linéaire continue de H_0' sur E' dont la restriction à $(H_0')_+$ est un homéomorphisme de $(H_0')_+$ sur E'_+. Ainsi, $\overline{e} = R(e)$ est un élément strictement positif de H_0, les structurels des cônes $(H_0')_+$ et E'_+ sont homéomorphes, et le cône $(H_0')_+$ est profilé ou presque bien coiffé si, et seulement si, il en est de même du cône E'_+. On est donc ramené à montrer le théorème avec l'espace H_0 au lieu de l'espace E. L'avantage de H_0 sur E est le suivant : Supposons $(H_0')_+$ profilé, posons :

$$S_{\overline{e}} = \{L \in G((H_0')_+) \ ; \ L(\overline{e}) = 1\}$$

et, pour tout $f \in H_0$, notons $R'(f)$ la restriction de f à $S_{\overline{e}}$. Alors, d'après [6] (numéros 2.6 et suivants), R' est un isomorphisme d'espaces vectoriels réticulés de l'idéal d'ordre T engendré par $\overline{e}$ sur l'espace $C_b(S_{\overline{e}})$ des fonctions numériques continues et bornées sur $S_{\overline{e}}$. D'où on déduit un isomorphisme d'espaces vectoriels réticulés de J sur l'espace $C(T)$ des fonctions numériques finies et continues sur le compactifié de Stone-Čech T de $S_{\overline{e}}$. Comme d'après le corollaire 2.18, l'idéal J est dense dans H_0, l'espace T est un espace de représentation compact de H_0. Pour achever la démonstration en utilisant le théorème 2.13, il suffit de noter que $S_{\overline{e}}$, étant une section globale de la réunion $G((H_0')_+)$ des génératrices extrémales du cône $(H_0')_+$, est homéomorphe au structurel de $(H_0')_+$.

2.20. Remarque. - Ce théorème s'applique toujours dans le cas où E est métrisable. En effet, dans ce cas, l'ensemble $S_{\overline{e}}$ est un K_σ. Il est donc universellement mesurable dans son compactifié de Stone-Čech.

2.21. Remarque. - L'idée sous-jacente à la démonstration de ce théorème est la remarque, due en grande partie à PORTENIER, que les résultats montrés initialement pour les cônes biréticulés s'étendent aux cônes de formes linéaires positives continues sur un e. v. r. l. s.

3. Le cas des espaces sans élément strictement positif.

3.1. Définition. - Soient E un e. v. r. l. s., et e un élément positif de E. On note $[e]$ l'idéal d'ordre fermé engendré par e. On dit qu'un idéal d'ordre fermé J de E est un idéal principal de E s'il existe un élément positif e de E tel que $J = [e]$.

On notera que, d'après la proposition 2.17, l'idéal $[e]$ est identique à l'adhérence de l'idéal d'ordre engendré par l'élément e . D'après le corollaire 2.18, un idéal d'ordre fermé de E est principal si, et seulement si, il possède un élément strictement positif.

3.2. PROPOSITION. - Soient E un e. v. r. l. s., J un idéal d'ordre fermé de E , et π_J l'application "restriction à J " définie sur E' à valeurs dans J' . Alors, l'application π_J est une application linéaire continue de E' sur J' qui possède les propriétés suivantes :

(a) (3.2.1) $\pi_J(E'_+) = J'_+$.

(b) Si le cône E'_+ est profilé,

(3.2.2) $\pi_J(G(E'_+)) = G(J'_+)$.

(c) La restriction de π_J à la face complémentaire $(J^0_+)'$ de la face J^0_+ est une bijection de $(J^0_+)'$ sur J'_+ .

Démonstration.

(a) C'est une conséquence directe d'une des nombreuses variantes "monotones" du théorème de prolongement de Hahn-Banach (Voir par exemple [4], theorem 2.6.3).

(b) Soient D une génératrice extrémale non nulle du cône J'_+ , et

$$F = \{L \in E'_+ \ ; \ \pi_J(L) \in D\} .$$

Il est élémentaire de vérifier que F est une face fermée du cône E'_+ , non réduite à $\{0\}$, d'après le (a). Comme le cône E'_+ est profilé, la réunion des génératrices extrémales de F ne se réduit pas à $\{0\}$, ce qui prouve (3.2.2).

(c) Bien sûr, $\pi_J(J^0_+) = \{0\}$. Ainsi, si $L \in E'_+$, on a une écriture $L = L_1 + L_2$ avec $L_1 \in J^0_+$ et $L_2 \in (J^0_+)'$, de sorte que $\pi_J(L) = \pi_J(L_2)$, ce qui prouve la surjectivité.

Montrons l'injectivité : Soient L et L' distinctes dans E'_+ , et $f \in E_+$ tel que $L(f) \neq L'(f)$. D'après le corollaire 1.6 de [1], appliqué au cône faiblement complet biréticulé E^*_+ , dont, rappelons-le, E'_+ est une face, il existe une forme linéaire positive g sur E' , de restriction à E'_+ s. c. i., nulle sur J^0_+ et égale à f sur $(J^0_+)'$. Par un argument analogue à celui utilisé pour montrer (2.19.1), on voit que, pour tout $N \in E'_+$,

$$g(N) = \sup\{N(x) \ ; \ x \in J_+ \ \text{ et } \ x < g \ \text{ sur } \ E'_+\} .$$

Comme $g(N) = f(N)$ pour tout $N \in (J^0_+)'$, on a $g(L) \neq g(L')$ de sorte qu'il existe $x \in J_+$ tel que $L(x) \neq L(x')$, ce qui achève de prouver l'injectivité.

3.3. LEMME. - Soient E un e. v. r. l. s., et $L \in E'_+$ avec $L \neq 0$. Alors, il existe un idéal d'ordre principal J tel que $L \notin J^0$.

Démonstration. - Si $v \in E_+$ est tel que $L(v) > 0$, il suffit de prendre pour J l'idéal d'ordre fermé engendré par v .

3.4. LEMME. - Soient E un e. v. r. l. s., et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de chapeaux du cône E'_+ tels que :

$$G(E'_+) \cap A_0 \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n \ .$$

Alors, tout $L \in A_0$, non nul, majore un $N \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$, non nul.

Démonstration. - Fixons $L \in A_0$, non nul. Comme A_0 est un chapeau du cône E'_+, il existe un compact $K \subset G(E'_+) \cap A_0$, et une mesure de Radon positive θ de masse ≤ 1 sur K, tels que la forme linéaire N définie par la formule :

$$N(f) = \int f(x)\, d\theta(x) \ , \text{ pour tout } f \in E \ ,$$

soit une forme linéaire positive non nulle sur E, majorée par L. Comme K est la réunion des compacts $K \cap A_n$, où n parcourt les entiers $n \geq 1$, on peut supposer que K est contenu dans A_{n_0} pour un entier n_0, et alors $N \in A_{n_0}$ ce qui achève la démonstration.

3.5. LEMME. - Soit E un e. v. r. l. s. métrisable tel que le cône E'_+ soit profilé. Si, pour tout idéal principal J de E, le cône J'_+ est presque bien coiffé, le cône E'_+ est presque bien coiffé.

Démonstration. - Soit $L \in E'_+$, non nul. Il s'agit de trouver un chapeau A de E'_+, et un $N \in A$, non nul, que majore L. Par le lemme 3.3, on peut se contenter de prendre $L \in (J^0_+)'$ pour un certain idéal principal J de E. Rappelons (Voir proposition 3.2) qu'on note π_J l'application "restriction à J" de V' dans J'. Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une base de voisinages de l'origine dans E. Pour tout entier $n \geq 1$, posons :

$$\begin{aligned} W_n &= J \cap V_n \ , \\ A_n &= \overline{\mathrm{conv}}(V^0_n \cap G(E'_+)) \ , \\ B_n &= \overline{\mathrm{conv}}(W^0_n \cap G(J'_+)) \ , \\ C_n &= \pi_J(A_n) \ . \end{aligned}$$

Comme $V^0_n \cap G(E'_+)$ est un compact de $G(E'_+)$, il résulte du théorème 2.19 de [2] que A_n est un chapeau du cône E'_+. Pour la même raison, B_n est un chapeau du cône J'_+. Enfin, de ce même théorème, et du (b) de la proposition 2.3, il résulte que C_n est un chapeau du cône J'_+. Il est alors clair que A_n (resp. B_n) est le plus grand chapeau du cône E'_+ (resp. J'_+) contenu dans V^0_n (resp. W^0_n). Par suite, tout chapeau du cône E'_+ (resp. J'_+) est contenu dans un des A_n (resp. B_n).

Cela étant, puisque le cône J'_+ est presque bien coiffé, il existe un entier $n_0 \geq 1$ et un élément $L_0 \in B_{n_0}$, non nul, tel que $L_0 \leq \pi_J(L)$. Mais, d'après la proposition 2.3 (b), on a :

$$G(J'_+) \cap B_{n_0} \subset \bigcup_{n\geq 1} C_n \ .$$

Du lemme 3.4, il résulte qu'il existe un entier n_1 et un élément $L_1 \in C_{n_1}$, non nul, tel que $L_1 \leq L_0$. Soit $N_1 \in A_{n_1}$ tel que $\pi_L(N_1) = L_1$. Enfin, soit $N_1 = N + N'$, avec $N \in (J_+^0)'$ et $N' \in J_+^0$ l'écriture de la décomposition de N_1 suivant la face J_+^0 et sa face complémentaire $(J_+^0)'$. Comme $\pi_J(N) = 0$, on a :

$$L_1 = \pi_J(N_1) = \pi_J(N) \leq \pi_J(L) .$$

Comme, d'après la proposition 2.3 (c), la restriction de π_J à la face $(J_+^0)'$ est une bijection, on tire de cette inégalité que $N \leq L$. Enfin comme tout chapeau est héréditaire, on déduit de $N \leq N_1$, que $N \in A_{n_1}$, ce qui achève la démonstration.

3.6. THÉORÈME. - <u>Pour tout e. v. r. l. s. métrisable</u> E, <u>on a les équivalences suivantes</u> :

(a) <u>Le cône</u> E'_+ <u>est profilé</u>.

(b) <u>Le cône</u> E'_+ <u>est presque bien coiffé</u>.

<u>Démonstration</u>. - Nous avons seulement à vérifier que (a) implique (b). Si E possède un élément strictement positif, c'est un cas particulier du théorème 2.19 puisque le structurel de E est un K_σ (Voir la remarque 2.20). Si E ne possède pas d'élément strictement positif, on a cependant que (a) implique (b) pour tout idéal principal J de E. Compte tenu du lemme 3.5, on a donc seulement à montrer que si le cône E'_+ est profilé, il en va de même du cône J'_+, pour tout idéal principal J. Or, d'après la proposition 3.2, le cône J'_+ est l'image du cône E'_+ par une application linéaire continue π_J. Il en résulte que le cône J'_+ est profilé : En effet si on a f, $g \in (J')^*$ de restriction à J'_+ positives et s. c. s. telles que $f \leq g$ sur $G(J'_+)$, on a $f \circ \pi_J$ et $g \circ \pi_J$ de restriction à E'_+ positives et s. c. s. telles que $f \circ \pi_J \leq g \circ \pi_J$ sur $G(E'_+)$; comme le cône E'_+ est profilé, on a $f \circ \pi_J \leq g \circ \pi_J$ sur E'_+, d'où, comme $\pi_J(E'_+) = J'_+$, $f \leq g$ sur J'_+.

3.7. <u>Remarques</u>.

(a) Soit E un e. v. r. l. s.. Comme propriété plus faible que celle d'être profilé, on peut considérer, pour le cône E'_+, la propriété : " E'_+ vérifie Krein-Milman" c'est-à-dire E'_+ est l'enveloppe convexe fermée de la réunion de ses génératrices extrémales. Si le cône E'_+ est profilé, il vérifie Krein-Milman, mais la réciproque est inexacte, même si E est un espace de Banach à élément strictement positif.

(b) Dans le théorème précédent, l'hypothèse que E est métrisable nous a servi à deux étapes bien distinctes de la démonstration : D'une part, pour nous assurer que les structurels des idéaux principaux de E sont des K_σ ; d'autre part, pour utiliser le lemme 3.5. Or, il est intéressant de noter qu'on pourrait se passer de l'hypothèse de métrisabilité si on pouvait améliorer l'énoncé (b) de la proposition 3.2 comme suit : Tout $L \in G(J'_+)$, majoré par la restriction à J d'une semi-norme absolument monotone continue q sur E, se prolonge en un élément $N \in G(E'_+)$

majoré par q , ou par un multiple de q . Si cela était vrai, on pourrait remplacer l'hypothèse de métrisabilité dans l'énoncé du théorème 3.6 par une hypothèse assurant seulement la régularité des structurels des idéaux principaux de E (Par exemple, on pourrait supposer que le structurel de E est localement compact).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOULLET de RUGY (A.). - Un théorème du genre "Andô-Edwards" pour les Fréchet ordonnés normaux, Pacific J. Math., t. 46, 1973, p. 155-166.

[2] GOULLET de RUGY (A.). - La théorie des cônes biréticulés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 21, 1971, fasc. 4, p. 1-64.

[3] GOULLET de RUGY (A.). - Une nouvelle définition des cônes biréticulés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[4] JAMESON (G.). - Ordered linear spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 141).

[5] MEYER (M.). -

[6] PORTENIER (C.). - Caractérisation de certains espaces de Riesz, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 10e année, 1970/71, n° 6, 21 p.

[7] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Graduate Texts in Mathematics, 3).

(Texte reçu le 13 mai 1974)

Alain GOULLET de RUGY
Université de Tunis
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
TUNIS (Tunisie)