Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Peter Sjögren

La convolution dans L^1 faible de $\mathbb{R}^n$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 14, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 14, 10 p.

28 février 1974

LA CONVOLUTION DANS L^1 FAIBLE DE $\underset{\sim}{R}^n$

par Peter SJÖGREN

1. Introduction.

Définissons l'espace L^1 de type faible, noté Λ_1, comme l'espace des fonctions mesurables dans $\underset{\sim}{R}^n$ $(n \geq 1)$, et telles que

$$|\{x \in \underset{\sim}{R}^n \; ; \; |f(x)| > \gamma\}| \leq C\gamma^{-1} \; , \quad C = C(f) \; , \text{ pour tout } \gamma > 0 \; .$$

Ici on note $|E|$ la mesure de Lebesgue de $E \subset \underset{\sim}{R}^n$. Il est bien connu que Λ_1 apparaît en théories d'intégrales singulières et d'interpolation. Si $f \in \Lambda_1$, on met

$$\ell(f) = \sup_{\gamma>0} \gamma |\{|f| > \gamma\}| \; .$$

Notons que ℓ est une quasi-norme non sous-additive et que la topologie sur Λ_1 associée n'est pas localement convexe.

Si $0 \leq f \in \Lambda_1$ et si μ est une mesure positive finie, la convolution $f * \mu$ n'appartient donc pas toujours à Λ_1. Dans ce travail, on va étudier les ensembles qui ont la propriété suivante.

Définition. - Un fermé $F \subset \underset{\sim}{R}^n$ sera dit de convolution si, pour toute mesure $\mu \geq 0$ finie avec $\operatorname{supp} \mu \subset F$, on a

$$U^\mu \in \Lambda_1 \; , \text{ où } \; U^\mu = r^{-n} * \mu \quad \text{et} \quad r = |x| \; .$$

Dans la section 4, nous aboutissons à une caractérisation géométrique de ces ensembles. La condition trouvée signifie grosso modo que l'ensemble doit être contenu dans un ensemble de Cantor, ou bien ne pas contenir trop de points uniformément répartis. Comme application de nos méthodes, nous obtenons une démonstration élémentaire d'une inégalité utilisée dans BEURLING-MALLIAVIN [1] et concernant l'intégrale de Poisson (Voir le corollaire 2).

On pourrait poser la même définition pour les autres espaces Λ_p, $p > 0$, définis par l'inégalité

$$|\{|f| > \gamma\}| \leq C\gamma^{-p} \; ,$$

en utilisant le noyau associé $r^{-n/p}$. Pourtant, si $p > 1$, on sait que Λ_p est localement convexe, et la propriété de convolution correspondante est vérifiée pour tout fermé. Pour $p < 1$, on peut voir que les ensembles finis seulement ont cette propriété.

2. Quelques lemmes simples.

Dans ce travail, toute mesure sera positive et finie.

LEMME 1. - *Si un fermé* $F \subset \mathbb{R}^n$ *est de convolution, alors il existe une constante* C *telle que, pour toute mesure* μ *portée par* F , *on a*

$$\ell(U^\mu) \leqslant C\|\mu\| .$$

Pour la démonstration, il suffit d'observer que si l'énoncé n'est pas vérifié, il existe une suite $(\mu_m)_1^\infty$ de mesures avec $\operatorname{supp} \mu_m \subset F$ telles que $\|\mu_m\| \leqslant m^{-2}$ et $\ell(U^{\mu_m}) > m$. En prenant la somme des μ_m , on voit que F n'est pas de convolution.

Si F est de convolution, on note $C(F)$ la plus petite des constantes C qui conviennent dans le lemme 1 ; sinon, on met $C(F) = \infty$.

LEMME 2. - *Soient* F , F_1 *et* F_2 *des fermés de* $\mathbb{R}^n$.

(a) *Si* $F_1 \subset F_2$, *alors* $C(F_1) \leqslant C(F_2)$.

(b) $C(F_1 \cup F_2) \leqslant C(F_1) + C(F_2)$.

(c) $C(F)$ *est invariant par homothétie.*

(d) *Si* $C(F) < \infty$, *alors* $|F| = 0$.

Démonstration. - L'énoncé (a) est évident, et (c) résulte d'un calcul trivial. Pour vérifier (b), on se donne une mesure μ portée par $F_1 \cup F_2$. Elle admet une décomposition $\mu = \mu_1 + \mu_2$, où μ_i est portée par F_i . On termine en appliquant à $U^{\mu_1} + U^{\mu_2}$ l'inégalité

$$\ell(f_1 + f_2) \leqslant p\ell(f_1) + q\ell(f_2) , \quad p^{-1} + q^{-1} = 1 , \tag{2.1}$$

avec $p = \|\mu\|/\|\mu_1\|$. Pour vérifier (2.1), on note que

$$\{|f_1 + f_2| > \gamma\} \subset \{|f_1| > \gamma/p\} \cup \{|f_2| > \gamma/q\} .$$

Dans la démonstration de (d), on peut supposer F compact. Soit μ la mesure de Lebesgue restreinte à F . Alors U^μ est infini en tout point où F est de densité 1 . Ces points forment donc un ensemble de mesure nulle, ce qui entraîne $|F| = 0$. Le lemme est démontré.

Tout cube de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^{n-1}$, figurant dans la suite, aura ses arêtes parallèles aux axes de coordonnées.

Fixons un cube unité Q_0 dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier $N > 1$, on place dans Q_0 un pavage de cubes ouverts d'arête N^{-1} de façon naturelle. Soit S_N l'ensemble de ces N^n cubes ouverts.

Définition. - On dira que le fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ contient un réseau d'ordre N s'il existe une homothétie ou translation $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $h(F)$ rencontre tous les cubes de S_N .

S'il en est ainsi de F , on peut introduire une mesure en plaçant pour tout $Q \in S_N$ la masse N^{-n} en un point de $F \cap h^{-1}(Q)$. On voit alors facilement que $C(F) \geqslant c \log N$, où $c > 0$ ne dépend que de n . Un ensemble qui contient des réseaux de tous les ordres n'est donc pas de convolution. Plus tard, on démontrera la réciproque de cette observation.

LEMME 3. - <u>Si</u> $(F_i)_{i\in I}$ <u>est une famille filtrante croissante de fermés de</u> $\underset{\sim}{R}^n$, <u>et si</u> F <u>est la fermeture de</u> $\bigcup_{i\in I} F_i$, <u>alors</u>

$$C(F) = \sup_{i\in I} C(F_i) .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de montrer que $C(F) \leq \sup C(F_i)$. Si F est de mesure positive, il est de densité 1 en un point x_0 . Pour tout N , on peut alors trouver au voisinage de x_0 un cube Q tel que $|F \cap Q|/|Q| > 1 - N^{-n}$. En plaçant dans Q un pavage de N^n sous-cubes, on voit que F contient un réseau d'ordre N et qu'il en est de même de $\bigcup F_i$. Pour tout N , il existe donc un $i \in I$ tel que F_i contient un réseau d'ordre N , et par conséquent

$$\sup C(F_i) = +\infty .$$

Si $|F| = 0$, on se donne $\alpha < C(F)$. Prenons une mesure μ de probabilité portée par F et telle que $\ell(U^\mu) > \alpha$. Pour un $\gamma > 0$ convenable, on a donc $\gamma|\{U^\mu > \gamma\}| > \alpha$, et par conséquent il existe R et $\delta > 0$ tels que

$$\gamma|\{x \; ; \; |x| \leq R , \; \mathrm{dist}(x , F) > \delta , \; U^\mu(x) > \gamma\}| > \alpha .$$

Si $\eta > 0$, il est maintenant clair qu'on peut approcher μ par une mesure μ' de probabilité portée par un sous-ensemble fini B de $\bigcup F_i$ de telle façon que l'on ait $U^{\mu'} > \gamma - \eta$ sur l'ensemble

$$\{x \; ; \; |x| \leq R , \; \mathrm{dist}(x , F) > \delta , \; U^\mu(x) > \gamma\} .$$

En choisissant η de façon convenable, on voit que $C(B) > \alpha$. Puisque B est contenu dans un F_i , et α est arbitraire, la démonstration du lemme 3 est complète.

<u>Remarque</u>. - Pour les familles décroissantes il n'y a pas de résultat analogue, même si on suppose $C(F_i) < \infty$ pour tout i . On le voit en considérant

$$F_i = \{0\} \cup \{2^{-k} \; ; \; k > i\} \subset \underset{\sim}{R} \quad \text{pour } i = 1 , 2 , \ldots$$

Le fait que ces ensembles sont de convolution sera une conséquence de notre théorème.

3. Étude d'un cube.

Dans cette section, on notera C diverses constantes positives qui ne dépendront que de n . Pour les potentiels U^μ , on a l'inégalité de Harnack suivante : Si μ est une mesure dans $\underset{\sim}{R}^n$ et si $x , y \in \underset{\sim}{R}^n$ satisfont à $|x-y| \leq \mathrm{dist}(x,\mathrm{supp}\,\mu) > 0$, alors

$$U^\mu(x) \leq CU^\mu(y) , \tag{3.1}$$

car ces hypothèses entraînent $|x - z|^{-n} \leq C|y - z|^{-n}$ pour $z \in \mathrm{supp}\,\mu$.

LEMME 4. – *Soient* Q *un cube ouvert dans* $\underset{\sim}{R}^n$, *et* μ *une mesure avec*

$$\operatorname{supp} \mu \subset \underset{\sim}{R}^n \setminus Q .$$

(a) *Si* $\gamma > 0$, *il existe une mesure* ν *avec* $\operatorname{supp} \nu \subset Q$ *et telle que*

(i) $\|\nu\| \leqslant |Q|$,

(ii) $|\{U^\mu > \gamma\} \cap Q| \leqslant C\|\nu\|$,

(iii) $U^\mu \geqslant \gamma/C$ *sur* $\operatorname{supp} \nu$,

(iv) $U^\nu \leqslant C$ *dans* $\underset{\sim}{R}^n \setminus Q$.

(b) *Si* χ *est la fonction caractéristique de* Q , *on a* $\chi U^\mu \in \Lambda_1$ *et*

$$\ell(\chi U^\mu) \leqslant C\|\mu\| .$$

Démonstration. – Observons d'abord que (b) est une conséquence de (a). En effet, pour $\gamma > 0$, on obtient à l'aide du théorème de Fubini

$$|\{U^\mu > \gamma\} \cap Q| \leqslant C\|\nu\| \leqslant C\gamma^{-1} \int U^\mu \, d\nu = C\gamma^{-1} \int U^\nu \, d\mu \leqslant C\gamma^{-1}\|\mu\| .$$

Pour la démonstration de (a), on peut supposer $\{U^\mu > \gamma\} \cap Q$ non vide. Si $n = 1$, la fonction U^μ est convexe dans l'intervalle Q . Soit alors x_0 le point (ou un des deux points) de l'ensemble $\{U^\mu \geqslant \gamma\} \cap Q$, où la distance à ∂Q est maximale. On vérifie facilement qu'on obtient la mesure ν cherchée en plaçant la masse $|\{U^\mu > \gamma\} \cap Q|$ au point x_0 .

Supposons maintenant $n > 1$. Notons ν' la restriction de la mesure de Lebesgue à $\{U^\mu > \gamma\} \cap Q$. La démonstration est motivée par l'observation que l'inégalité $U^{\nu'} \leqslant C$ dans $\underset{\sim}{R}^n \setminus Q$ entraîne (b), de la même façon que ci-dessus. Cette inégalité n'est pas vérifiée en général, mais la démonstration consiste à l'obtenir après une modification de ν' . On enlèvera certaines parties de ν' , et on fera simultanément une discrétisation de ν' en concentrant les masses sur certains hyperplans. Nous écrirons les points de $\underset{\sim}{R}^n$ comme $(x , t) \in \underset{\sim}{R}^{n-1} \times \underset{\sim}{R}$, et m_{n-1} sera la mesure de Lebesgue à $n - 1$ dimensions. Fixons une face F de Q , que l'on peut supposer située dans $\underset{\sim}{R}^{n-1} \times \{0\}$, avec $Q \subset \{t > 0\}$, et prenons-la comme base d'une pyramide P ouverte dont le sommet sera le centre de Q . On pose $t_j = 2^{-1-nj} a$, pour $j = 0 , 1 , 2 , \ldots$, où a est l'arête de Q .

Nous allons construire par récurrence une suite $(B_j)_1^\infty$ de sous-ensembles de $\underset{\sim}{R}^{n-1}$. Chaque B_j sera une réunion finie disjointe de cubes ouverts de $\underset{\sim}{R}^{n-1}$, tous d'arête t_j . Prenons $j \geqslant 1$, et supposons $B_1 , \ldots , B_{j-1}$ déjà construits si $j > 1$. Pour $k = 1 , \ldots , j - 1$, on considère avec chaque cube de B_k le cube concentrique d'arête $(2^{1+j-k} + 5)t_k$; soit U_j la réunion de tous les cubes élargis ainsi obtenus lorsque k prend les valeurs $1 , \ldots , j - 1$. En particulier, on met $U_1 = \emptyset$. On vérifie qu'il est possible de placer dans le cube $\{x \in \underset{\sim}{R}^{n-1} ; (x , t_j) \in P\}$ un pavage cubique d'arête t_j . Définissons maintenant B_j comme la réunion de ceux des cubes (ouverts) Q' de ce pavage qui satisfont aux deux conditions suivantes :

(1) Q' n'est pas contenu dans U_j ,

(2) $Q' \times [t_j , t_{j-1}]$ rencontre $\{U^\mu > \gamma\} \cap P$.

Les B_j construits, on introduit une suite $(\nu_j)_1^\infty$ de mesures dans $\underset{\sim}{R}^n$ en prenant comme $d\nu_j$ la restriction de $t_j\, dm_{n-1}$ à $B_j \times \{t_j\}$. Mettons $\nu_P = \sum_1^\infty \nu_j$ et $\nu = \sum_P \nu_P$, où la somme est prise pour les 2^n pyramides associées à Q . Pour montrer que cette mesure ν satisfait les conditions de (a), il suffit de vérifier que ν_P possède les propriétés suivantes :

(i)' $\|\nu_P\| \leq |P|$,

(ii)' $|\{U^\mu > \gamma\} \cap P| \leq C\|\nu_P\|$,

(iii)' $U^\mu \geq \gamma/C$ sur supp ν_P ,

(iv)' $U^{\nu_P} \leq C$ dans $\underset{\sim}{R}^n \setminus Q$.

Il est facile de vérifier (i)', et (iii)' s'ensuit de (3.1). Quant à (ii)', observons que

$$\begin{aligned} |\{U^\mu>\gamma\}\cap P\cap\{t_j\leq t\leq t_{j-1}\}| &\leq |\{(x,t)\ ;\ U^\mu(x,t)>\gamma\ ,\ x\notin U_j\ ,\ t_j\leq t\leq t_{j-1}\}\cap P| \\ &+ |\{(x,t)\ ;\ x\in U_j\ ,\ t_j\leq t\leq t_{j-1}\}| \leq C\|\nu_j\| \\ &+ C\sum_{k<j}(2^{1+j-k}+5)^{n-1}\frac{\|\nu_k\|}{t_k}\, t_j \leq C\sum_{k\leq j} 2^{k-j}\|\nu_k\| , \end{aligned}$$

puisque $m_{n-1}(B_k) = \|\nu_k\|/t_k$. En sommant par rapport à j , on arrive à (ii)', car

$$\sum_{j\geq 1}\sum_{k\leq j} 2^{k-j}\|\nu_k\| = \sum_{k\geq 1}\|\nu_k\|\sum_{j\geq k} 2^{k-j} = 2\|\nu_P\| .$$

En vue de (iv)', on commence par une observation élémentaire. Si $z \in \underset{\sim}{R}^{n-1}$ et t , $a > 0$, on a

$$(3.2) \qquad t\int_{|x-z|>a}\frac{dm_{n-1}(x)}{(|x-z|^2+t^2)^{n/2}} \leq \min(\varkappa\ ,\ \varkappa t/a) ,$$

où $\varkappa = \varkappa(n)$ est une constante. Si $z \in \underset{\sim}{R}^{n-1}$, on va démontrer l'énoncé suivant par récurrence.

Pour $j = 1 , 2 , \ldots$, la somme $\sum_1^j U^{\nu_k}(z , 0)$ devient après un ré-arrangement convenable dominée terme à terme par la somme $\sum_0^{j-1} \varkappa\, 2^{-k}$.

Le cas $j = 1$ est évident à cause de (3.2). Supposons donc l'énoncé démontré pour $j - 1$. Soit $m \geq 0$ un entier tel que

$$(3.3) \qquad \varkappa\, 2^{-m-1} < U^{\nu_j}(z , 0) \leq \varkappa\, 2^{-m} .$$

On peut supposer $m \leq j - 2$, car le cas contraire est trivial. De (3.2), on voit que la distance (dans $\underset{\sim}{R}^{n-1}$) de z à B_j est majorée par $2^{m+1}\, t_j$. A cause de la construction de B_j , on a, pour $k = 1 , \ldots , j - 1$,

$$\mathrm{dist}(B_j , B_k) \geq (2^{j-k} + 2)t_k - t_j \geq (2^{j-k} + 1)t_k .$$

Alors l'inégalité du triangle entraîne

$$\mathrm{dist}(z , B_k) \geq (2^{j-k} + 1)t_k - 2^{m+1}\, t_j = (2^{j-k} + 1 - 2^{m+1-n(j-k)})t_k .$$

Pour $k \leqslant j - m - 1$, il en découle que

$$\mathrm{dist}(z\ ,\ B_k) \geqslant 2^{j-k}\ t_k\ ,$$

et cette inégalité entraîne selon (3.2)

$$U^{\nu_k}(z\ ,\ 0) \leqslant \varkappa\ 2^{k-j}\ .$$

Mais alors la récurrence s'achève grâce à l'hypothèse faite pour $j - 1$ et à (3.3). L'inégalité (iv)' est par conséquent valable aux points $(z\ ,\ 0)$ et donc, par monotonie, aux points $(z\ ,\ t)$ avec $t \leqslant 0$. Si $(z\ ,\ t) \in \underset{\sim}{R}^n \setminus Q$ et $t > 0$, on trouve, à l'aide d'une reflexion, un point $(z'\ ,\ t')$ avec $t' \leqslant 0$ où le potentiel U^{ν_p} domine sa valeur en $(z\ ,\ t)$. Ceci termine la démonstration de (iv)' et du lemme 4.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> λ <u>est une mesure portée par</u> $\overline{Q}$, <u>alors</u> $(1 - \chi)U^\lambda \in \Lambda_1$ <u>et</u>

$$\ell((1 - \chi)U^\lambda) \leqslant C\|\lambda\|\ ,$$

<u>où</u> Q <u>et</u> χ <u>sont définis dans le lemme</u> 4.

Pour la démonstration, on suppose que Q fait partie d'un pavage cubique, et on applique le lemme 4 (b) aux $3^n - 1$ cubes de ce pavage qui entourent Q , hors desquels l'estimation de U^λ est triviale.

Le cas $n = 2$ du corollaire suivant entraîne une inégalité auxiliaire de Beurling-Malliavin ([1], (1.7), p. 84). On garde la notation de la démonstration du lemme 4 pour les points de $\underset{\sim}{R}^n$.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> $f \geqslant 0$ <u>une fonction mesurable dans</u> $\underset{\sim}{R}^{n-1}$ <u>telle que</u>

$$\int \frac{f(x)\ dx}{(1 + |x|^2)^{n/2}} < \infty$$

(<u>où</u> $dx = dm_{n-1}(x)$). <u>Mettons</u>

$$F(x\ ,\ t) = \int \frac{f(y)\ dy}{(|x - y|^2 + t^2)^{n/2}}$$

<u>pour</u> $(x\ ,\ t) \in \underset{\sim}{R}^n$ <u>et</u> $B_\delta = \{(x\ ,\ t)\ ;\ F(x\ ,\ t) > \delta\}$ <u>pour</u> $\delta > 0$. <u>Alors on a, pour tout</u> $\delta > 0$,

$$\int_{B_\delta} \frac{dx\ dt}{(1 + |x|^2)^{n/2}} < \infty\ .$$

<u>Esquisse de démonstration</u>. - On se donne $\delta > 0$. Si $m > 0$ est entier, on met $f_1 = f\chi$ et $f_2 = f - f_1$, où χ est la fonction caractéristique de

$$\{x \in \underset{\sim}{R}^{n-1}\ ;\ 2^{m-1} \leqslant |x| \leqslant 2^{m+2}\}\ .$$

Ceci donne une partition $F = F_1 + F_2$, et il est facile de voir que $F_2(x,t)<\delta/2$ pour $2^m \leqslant |x| \leqslant 2^{m+1}$ si m est assez grand. On a donc

$$B_\delta \cap \{2^m \leqslant |x| \leqslant 2^{m+1}\} \subset \{F_1 > \delta/2\} \cap \{2^m \leqslant |x| \leqslant 2^{m+1}\}\ . \tag{3.4}$$

Pour obtenir l'estimation nécessaire de la mesure de l'ensemble du membre droit de (3.4), il suffit de voir que $\underset{\sim}{R}^{n-1} \times \{0\}$ est de convolution dans $\underset{\sim}{R}^n$. Pour cela, on conclut du lemme 4 (b) et du corollaire 1 que la frontière d'un cube est de convolution. Par homothétie et passage à la limite, il s'ensuit qu'il en est de même d'un hyperplan. Le corollaire est démontré.

4. La caractérisation.

THÉORÈME. - Le fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ est de convolution si, et seulement si, il existe un N tel que F ne contient pas de réseau d'ordre supérieur à N.

Démonstration. - On a déjà vu la nécessité de la condition. Pour la suffisance, il suffit, grâce aux lemmes 2(c) et 3, de supposer F contenu dans un cube unité Q_0 et d'en déduire que $C(F)$ est borné par une constante $C = C(n , N)$.

Mettons $M = 3(N + 1)$, et prenons un α tel que $1 < \alpha < (1 - M^{-n})^{-1}$. On place dans Q_0 un pavage cubique d'arête M^{-1}. Le cube d'arête $1/3$ concentrique à Q_0 contient $(N + 1)^n$ cubes de ce pavage, et parmi ceux-ci il y en a au moins un (pris sans bord), soit T_1, qui ne rencontre pas F. On appellera T_1 le trou associé à Q_0, et les autres $M^n - 1$ cubes du pavage (pris avec bord) seront des cellules. Dans chacune de ces cellules, on place un pavage cubique d'arête M^{-2}, duquel on choisit de nouveau un trou, situé dans le cube d'arête $M^{-1}/3$ concentrique à la cellule. Comme ci-dessus, on obtient ainsi dans chaque cellule un trou (ouvert) associé et de nouvelles cellules (fermées), cette fois d'arêtes M^{-2}. En continuant de cette façon, on obtient des trous et des cellules d'arêtes M^{-j}, $j = 1 , 2 , \ldots$ Cet exposant j sera appelé d'ordre du trou ou de la cellule. Q_0 lui-même est l'unique cellule d'ordre 0. A toute cellule D (d'ordre k), il y a un trou associé T, dont l'ordre est $k + 1$, et D est dite associée à T. Soit $(T_j)_1^\infty$ une énumération de tous les trous telle que l'ordre $\overline{j}$ de T_j croît avec j. Pour tout i, l'ensemble F est contenu dans la réunion des cellules d'ordre i, et la mesure de cette réunion est $(1 - M^{-n})^i$.

Supposons maintenant donnés une mesure μ portée par F, et un $\gamma > 0$. Pour $j = 1 , 2 , \ldots$, soit ν_j la mesure obtenue en appliquant le lemme 4 (a) à T_j, μ et γ. On va construire dans Q_0 une mesure ν possédant des propriétés analogues à celles de la mesure construite dans ce lemme. La mesure $\sum \nu_j$ les possède à exception de la dernière. Il faut donc ôter des parties des ν_j pour arriver à une mesure à potentiel borné sur F, en conservant les autres propriétés de $\sum \nu_j$. Pour cela, nous allons définir des mesures $\nu_j^{(i)}$ pour $0 \leq i < j$ par récurrence sur i ; elles satisferont à $\nu_j^{(i)} \leq \nu_j^{(i-1)}$ pour tout $j > i$.

Mettons $\nu_j^{(0)} = \nu_j$ pour $j = 1 , 2 , \ldots$, et supposons que, pour un $i \geq 1$, les $\nu_j^{(i-1)}$ soient déjà définies $(j \geq i)$. On pose $\lambda_i = \nu_i^{(i-1)}$ et $a_i = \|\lambda_i\|$. Pour $j > i$, on définit alors $\nu_j^{(i)}$ de la façon suivante.

(I) S'il existe deux entiers positifs r et k avec $r + k \leq \overline{j}$ et une cellule D d'ordre k contenant T_j mais disjointe de T_i et telle que l'on ait $U^{\lambda_i} \geq \alpha^{-r}$ au centre de D, alors on met $\nu_j^{(i)} = 0$.

(II) Si (I) n'a pas lieu, on associe à T_i et T_j l'entier p tel que

$$M^{-p} - M^{-\bar{i}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{dist}(T_i\ ,\ T_j) < M^{-p+1} - M^{-\bar{i}}\ .$$

Ceci entraîne évidemment $0 \leqslant p \leqslant \bar{i}$. Si

$$a_i(\alpha M^{-n})^{\bar{j}-p} \geqslant \|\nu_j^{(i-1)}\|\ ,$$

on pose $\nu_j^{(i)} = 0$; sinon on fait une sous-division quelconque $\nu_j^{(i-1)} = \nu' + \nu''$ telle que ν' et $\nu'' \geqslant 0$ et $\|\nu'\| = a_i(\alpha M^{-n})^{\bar{j}-p}$. Ensuite on pose $\nu_j^{(i)} = \nu''$.

Ceci fait, on met $\nu = \sum_1^\infty \lambda_i$. Dans la suite, les constantes notées C dépendront seulement de n et N . On va démontrer que ν possède les propriétés suivantes :

(i) $|\{U^\mu > \gamma\} \cap Q_0| \leqslant C\|\nu\|$,

(ii) $U^\mu \geqslant \gamma/C$ sur $\operatorname{supp} \nu$,

(iii) $U^\nu \leqslant C$ sur F .

Ceci suffit pour achever la démonstration du théorème suivant la méthode du lemme 4 (b), car hors de Q_0 on sait que U^μ est dans Λ_1 grâce au corollaire 1. La propriété (ii) découle immédiatement du lemme 4 (a) (iii), car $\nu \leqslant \sum \nu_j$.

Pour vérifier (i), on utilise la propriété correspondante des ν_i et on obtient

$$\begin{aligned} |\{U^\mu > \gamma\} \cap Q_0| &= \textstyle\sum_i\ |\{U^\mu > \gamma\} \cap T_i| \leqslant C \sum_i \|\nu_i\| \\ &\leqslant C \textstyle\sum a_i + C \sum \text{masses annulées suivant (I)} + C \sum \text{masses ôtées suivant (II)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Il suffit donc de montrer que dans le dernier membre de (4.1) les deuxième et troisième termes sont majorés par le premier, à des facteurs C près.

Pour estimer la somme des masses annulées selon (I), on fixe $i \geqslant 1$, et on considère le passage de $i - 1$ à i . Si $s \geqslant 1$ est entier, on note R_s la réunion des cellules disjointes de T_i aux centres desquelles on a $U^{\lambda_i} \geqslant \alpha^{-s}$. Alors R_s s'écrit comme une réunion $\bigcup_\ell D_\ell$ de telles cellules que l'on peut prendre disjointes deux à deux, aux bords près. A cause de (3.1), on a $U^{\lambda_i} \geqslant \alpha^{-s}/C$ dans chaque D_ℓ . Le corollaire 1 entraîne alors que $|R_s| \leqslant C\ a_i\ \alpha^s$. Si k est l'ordre d'une cellule D_ℓ , alors on y annule, suivant (I), avec $r = s$, les mesures portées par les trous d'ordre p contenus dans D_ℓ pour tout $p \geqslant k + s$. La mesure (volume) totale des trous dans D_ℓ de ces ordres est $(1 - M^{-n})^{s-1}\ |D_\ell|$. A cause du lemme 4 (a) (i), on a par conséquent la même estimation pour la masse totale ainsi annulée dans D_ℓ . En prenant la somme par rapport à ℓ et ensuite s , on trouve que la masse totale annulée suivant (I) en passant de $i - 1$ à i est majorée par

$$\textstyle\sum_{s>0} (1 - M^{-n})^{s-1}\ a_i\ \alpha^s \leqslant C\ a_i\ ,$$

et ceci implique l'estimation cherchée.

Pour estimer la somme des masses ôtées suivant (II) pendant le passage de $i - 1$ à i , on fixe r et s tels que $0 \leqslant r \leqslant \bar{i}$ et $s \geqslant \bar{i}$. Les T_j , $j > i$, pour lesquels le p associé à T_i et T_j dans (II) vaut r , sont tous compris dans la réunion R de C cellules d'ordre $r-1$ situées au voisinage de $T_{\bar{i}}$, pour un C convenable. On a donc $|R| \leq CM^{-nr}$, et les trous d'ordre s contenus dans R ont une mesure (volume) au plus égale à $C(1-M^{-n})^{s-r}M^{-nr}$. Le nombre de tels trous est donc majoré par $C(1-M^{-n})^{s-r}M^{-nr+ns}$. La masse totale ôtée suivant (II) avec ces valeurs de p et $\bar{j}$ vaut donc au plus

$$C(1-M^{-n})^{s-r}M^{-nr+ns}a_i(\alpha M^{-n})^{s-r} = Ca_i(1-M^{-n})^{s-r}\alpha^{s-r} .$$

On termine en prenant la somme par rapport à r , s et ensuite i .

Il reste à démontrer la propriété (iii). Prenons $z=(z_1, \dots, z_n) \in F$. Le trou T_i sera dit voisin de z si z est situé à l'intérieur de la cellule associée à T_i . Soit V l'ensemble des i tels que T_i est voisin de z . Pour tout k , il y a au plus un $i \in V$ avec $\bar{i}=k$. Divisons V en $2n$ parties deux à deux disjointes V'_k et V''_k , $k=1, \dots, n$, de telle façon que l'on ait

$$z_k \geq \sup\{x_k \ ; \ x=(x_1, \dots, x_n) \in T_i\} \quad \text{ou} \quad z_k \leq \inf\{x_k \ ; \ x \in T_i\}$$

pour $i \in V'_k$ (resp. $i \in V''_k$) . Considérons par exemple V'_1 . Soit $j \in V'_1$ avec $\lambda_j \neq 0$. Prenons $i \in V'_1$ tel que $i<j$, notons s le plus petit entier dans V'_1 avec $s>i$, et supposons $s<j$. La cellule associée à T_s est d'ordre $\bar{s}-1$, et elle contient T_j , mais ne rencontre pas T_i . Au centre de cette cellule, on a $U^{\lambda_i} < \alpha^{-r}$ avec $r=\bar{j}-\bar{s}+1$, car sinon on aurait $\lambda_j=0$, suivant (I). En utilisant (3.1), on obtient, à l'aide des propriétés géométriques des trous associés à V'_1 , l'inégalité

$$U^{\lambda_i}(z) \leq C\alpha^{\bar{s}-\bar{j}} .$$

Mais alors

$$\sum_{i\leq j, i\in V'_1} U^{\lambda_i}(z) \leq C\sum_1^{\infty}\alpha^{-i} + 2C \leq C .$$

Comme j est quelconque, la somme des potentiels associés à V'_1 est bornée en z . Les cas des autres V'_k et V''_k sont analogues.

Il reste à considérer l'ensemble L des trous qui ne sont pas voisins de z . La valeur de l'entier $m \geq 1$, $m \notin V$, sera précisée plus tard. Soient $\Omega_{\bar{m}}$ l'ensemble des trous dans L dont la distance d à z ne dépasse pas $\sqrt{n}\,M^{-\bar{m}}$, et de même Ω_k l'ensemble des trous dans L pour lesquels on a

$$M^{-k-1} < d/\sqrt{n} \leq M^{-k} , \text{ pour } k=0, \dots, \bar{m}-1 .$$

Supposons que $j>m$ et $T_j \in \Omega_{\bar{m}}$. Si $i \leq m$ avec $T_i \in L$, on note p l'entier associé à T_i et T_j dans (II). Alors on a $0 \leq p \leq \bar{i}$, et l'inégalité du triangle entraîne que

$$\mathrm{dist}(z , T_i) \geq \max(\sqrt{n}(M^{-p}-M^{-\bar{i}}-M^{-\bar{m}}) , M^{-\bar{i}}) \geq M^{-p}/C ,$$

où on a aussi utilisé le fait que $T_i \in L$. On a donc

$$U^{\lambda_i}(z) \leq Ca_i\,M^{np} .$$

Pour la masse ôtée dans T_j suivant (II) en passant de $i-1$ à i , on trouve donc l'estimation

(4.2) $$a_i(\alpha M^{-n})^{\bar{j}-p} \geqslant c_1\, U^{\lambda_i}(z)\, M^{-n\bar{j}}$$

(à condition que $\|\nu_j^{(i-1)}\| \geqslant c_1\, U^{\lambda_i}(z)\, M^{-n\bar{j}}$) . Ici $c_1 > 0$ ne dépend que de n et N .

Déterminons maintenant m comme le plus petit entier tel que

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m,\, i\notin V} U^{\lambda_i}(z) > c_1^{-1} ,$$

dont on peut supposer l'existence. En sommant sur $i \leqslant m$ dans (4.2), on voit, à l'aide du lemme 4 (a) (i), que λ_j est nulle. Après $U^{\lambda_m}(z)$ il n'y a donc pas de termes de la série $\sum U^{\lambda_i}(z)$ qui proviennent de trous dans $\Omega_{\bar{m}}$, et on a

(4.3) $$\sum_{1\leqslant i\leqslant m,\, i\notin V} U^{\lambda_i}(z) \leqslant c_1^{-1} + U^{\lambda_m}(z) \leqslant C .$$

Supposons maintenant $j > m$ et $T_j \in \Omega_k$ avec $0 \leqslant k < \bar{m}$. Si $T_i \in \Omega_k$ avec $i < j$, on a $M^{-\bar{i}} \leqslant CM^{-k}$, car $T_i \in L$. Selon sa définition, l'entier p associé à T_i et T_j dans (II) satisfait à

$$M^{-p} - M^{-\bar{i}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{dist}(T_i , T_j) \leqslant CM^{-k} ,$$

d'où il découle $M^{-p} \leqslant CM^{-k}$ et donc $p \geqslant k - C$. Il est clair que

$$U^{\lambda_i}(z) \leqslant Ca_i\, M^{nk} .$$

En passant de $i-1$ à i , on ôte dans T_j , suivant (II), la masse

$$a_i(\alpha M^{-n})^{\bar{j}-p} \geqslant a_i\, \alpha^{\bar{j}-k}\, M^{-n(\bar{j}-k)}/C \geqslant c_2\, U^{\lambda_i}(z)\, \alpha^{\bar{m}-k}\, M^{-n\bar{j}} ,$$

où $0 < c_2 = c_2(n , N)$. Comme ci-dessus on montre que λ_j est nulle si $j > m_k$ où m_k est le plus petit entier tel que

$$\sum_{m}^{m_k}{}_k\, U^{\lambda_i}(z) > c_2^{-1}\, \alpha^{k-\bar{m}} .$$

Ici $\sum_k$ signifie sommation seulement sur les i pour lesquels $T_i \in \Omega_k$. Il suffit maintenant d'estimer le potentiel de λ_{m_k} pour conclure que

$$\sum_{i>m}{}_k\, U^{\lambda_i}(z) \leqslant C\alpha^{k-\bar{m}} .$$

En sommant sur k , on termine, à cause de (4.3), la démonstration de (iii), et donc celle du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING (A.) and MALLIAVIN (P.). - On the closure of characters and the zeros of entire functions, Acta Math., Uppsala, t. 118, 1967, p. 79-93.

(Texte reçu le 19 avril 1974)

Peter SJÖGREN
Université de Paris-VI
Mathématiques [équipe analyse]
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05