Gustave Choquet

Frontière-module et représentation intégrale

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. nº 8, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e années, 1971-1973, n° 8, 4 p.
8 mars 1973

FRONTIÈRE-MODULE ET REPRÉSENTATION INTÉGRALE

par Gustave CHOQUET

Résumé

Dans des mémoires récents, HUSTAD, HERSBERG, PHELPS et FUHR ont étudié les frontières et représentations intégrales pour un couple (X , H) , où le sous-espace H de $\mathcal{C}(X , \underset{\sim}{K})$ sépare le compact X , et où $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$; ces diverses études supposent, pour l'essentiel, que H contient les constantes ou que X est métrisable.

J'abandonnerai cette restriction et, dans ce cadre élargi, je retrouverai, par des méthodes plus simples, plusieurs résultats antérieurs. En particulier, je caractériserai le cas où H admet une frontière de Šilov-module, et les cas où l'on peut parler d'unicité de la représentation des éléments de H' par des mesures (de type $\underset{\sim}{K}$) de même norme.

1. Frontière-module.

Méthode. - On plonge canoniquement X dans la boule unité B de H' munie de $\sigma(H' , H)$. Le cadre devient donc le suivant : B est un convexe compact équilibré d'un ensemble e. l. c. s. V ; le compact X est un fermé de B qui engendre B , ce qui revient à dire que, pour tout $x \in \mathcal{E}(B)$, Tx (où $T = \{t \in \underset{\sim}{K} : |t| = 1\}$) rencontre X ; et $H =$ (Restriction de $A_0(B)$ à X) , où $A_0(B)$ est l'espace (à norme uniforme) des formes linéaires sur V dont la restriction à B est continue.

On suppose que B engendre V , et, pour simplifier, que $V' = A_0(B)$. Une partie P de B est dite saturée si $tP = P$ pour tout $t \in T$. On appelle frontière-module du couple (X , H) l'ensemble

$$\mathcal{E}_m(X , H) = X \cap \mathcal{E}(B) .$$

On appelle ensemble de Šilov-module du couple (X , H) tout fermé de X sur lequel tout $f \in H$ atteint le maximum de son module. Par exemple, pour toute partie P de $\mathcal{E}_m(X , H)$ telle que $T.P = \mathcal{E}(B)$, $\overline{P}$ est un tel ensemble.

On a l'équivalence $(x \in \mathcal{E}_m(X , H)) \Longleftrightarrow$ (Toute mesure μ de norme ≤ 1 sur X , telle que $\varepsilon_x \sim \mu$ est portée par $\tilde{x}$) , où on note $\tilde{x} = X \cap (T.x)$.

PROPOSITION 1. - *Pour tout* $x \in \mathcal{E}_m(X , H)$ *et tout voisinage ouvert* ω *de* $\tilde{x}$ *dans* X , *il existe* $f \in H$ *telle que, sur* X , $|f|$ *ne prenne son maximum que dans* ω .

Notons $\mathcal{E}'_m(X , H)$ l'ensemble des $x \in \mathcal{E}_m(X , H)$ tels que $\tilde{x} = x$.

THÉORÈME 2. - <u>Les énoncés suivants sont équivalents</u> :

(a) (X, H) <u>admet une frontière de Šilov-module</u> (i. e. <u>un plus petit ensemble de Šilov-module</u>).

(b) $\mathcal{E}'_m(X, H)$ <u>rencontre tout</u> $\tilde{x}$ <u>où</u> $x \in \mathcal{E}_m(X, H)$.

Dans ces conditions, la frontière de Šilov est $\overline{\mathcal{E}'_m(X, H)}$, qui peut alors différer de $\mathcal{E}_m(X, H)$.

<u>Remarque</u>. - La frontière usuelle (de Choquet) $\mathcal{E}(X, H)$ est l'ensemble des points extrémaux de l'enveloppe convexe fermée de X ; on a donc $\mathcal{E}_m(X,H) \subset \mathcal{E}(X,H)$. Bien sûr $\overline{\mathcal{E}(X, H)}$ est un ensemble de Šilov-module, mais diffère en général de la frontière de Šilov-module lorsqu'elle existe.

COROLLAIRE 3.

1° <u>Lorsque</u> $\mathcal{E}_m(X, H) = \mathcal{E}'_m(X, H)$, <u>il y a frontière de Šilov-module</u>.

2° <u>Ceci a lieu en particulier lorsque</u> H <u>contient une</u> $f > 0$, <u>ou lorsque</u> H <u>est une algèbre</u>.

PROPOSITION 4.

1° <u>Lorsque</u> X <u>est métrisable</u>, $\mathcal{E}_m(X, H)$ <u>et</u> $\mathcal{E}'_m(X, H)$ <u>sont des</u> G_δ <u>de</u> X .

2° <u>Sinon</u>, <u>ces ensembles peuvent ne pas être des espaces de Baire</u>.

3° <u>Toutefois</u>, <u>pour toute suite</u> (ω_n) <u>d'ouverts relatifs partout denses de</u> $\mathcal{E}_m(X, H)$, $T.(\cap \omega_n)$ <u>est partout dense dans</u> $\mathcal{E}(B)$.

Notre cadre donne une réponse facile à une question de FAKHOURY :

THÉORÈME 5. - <u>On se donne deux couples</u> (X_1, H_1) , (X_2, H_2) <u>et une isométrie</u> I <u>de</u> H_1 <u>sur</u> H_2 .

1° $\forall f \in H_1$ <u>tel que</u> $|f| = 1$ <u>sur un</u> H_1<u>-ensemble de Šilov-module</u>, <u>on a</u> $|I(f)| = 1$ <u>sur</u> $\overline{\mathcal{E}_m(X_2, H_2)}$.

2° <u>Si</u>, <u>pour</u> $i = 1, 2$, <u>on a</u> $1 \in H_i$ <u>et</u> X_i = <u>(frontière de Šilov-module)</u>, <u>il existe une homéomorphie unique</u> φ <u>de</u> X_2 <u>sur</u> X_1 <u>telle que</u>, <u>pour tout</u> $f \in H_1$, <u>on ait</u> $I(f) = f \circ \varphi$.

Plus généralement, d'ailleurs, pour une isométrie I , $|f|$ prend sur $\mathcal{E}_m(X_1,H_1)$ les mêmes valeurs que $|I(f)|$ sur $\mathcal{E}_m(X_2, H_2)$.

2. Mesures maximales pour (X, H) .

<u>Définition</u> 6. - Une mesure μ (de type $\underset{\sim}{K}$) sur B (éventuellement sur X) est dite <u>maximale</u> si $|\mu|$ est maximale dans B .

Définition 7.

1° On note $\mathcal{C}_e(B)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(B , R)$ constitué par les fonctions qui sont constantes sur les fibres Tx . Et on pose $S_e = S \cap \mathcal{C}_e(B)$.

2° On note $\mathcal{C}_h(B)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(B , \underset{\sim}{K})$ des f homogènes en ce sens que $f(tx) = tf(x)$ pour tout $t \in T$.

On notera B_f , pour tout $f \in \mathcal{C}(B , \underset{\sim}{R})$ l'ensemble bordant $\{x \in B : f(x)=\hat{f}(x)\}$.

PROPOSITION 8. - Pour toute $\mu \geq 0$ sur B , les conditions suivantes sont équivalentes :

1° μ est maximale dans B .

2° μ est portée par chacun des ensembles bordants relatifs aux $f \in S_e$.

Disons maintenant que $\mu \vee \nu$ si $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}_e(B)$.

COROLLAIRE 9. - Pour deux mesures $\mu , \nu \geq 0$ sur B , si $\mu \vee \nu$ et si μ est maximale, ν l'est aussi.

Ceci va permettre de généraliser un théorème de HUSTAD, de façon très simple.

THÉORÈME 10. - Pour tout couple (X , H) et toute $\ell \in H'$, il existe une μ sur X (de type $\underset{\sim}{K}$) telle que :

(a) $\|\ell\| = \|\mu\|$,

(b) $\ell(f) = \mu(f)$ pour tout $f \in H$,

(c) μ est maximale.

On utilise bien sûr le plongement de X dans B . Puis on utilise le cas particulier où μ est discrète (approcher une mesure maximale sur B représentant ℓ par des mesures discrètes sur $\mathcal{E}(B)$).

3. Unicité de cette représentation.

Définition 11. - Un convexe compact équilibré B est appelé simplexoïde si tout x de la "sphère" de B est barycentre d'une unique mesure maximale de probabilité.

Exemple : Dans R^3 les polyèdres centrés à faces triangulaires.

THÉORÈME 12 (facile à partir d'une modification légère du théorème d'unicité Choquet-Meyer).

(B est un simplexoïde) $\Longleftrightarrow$ (Toute face de B est un simplexe géométrique) .

Voici enfin un théorème moins immédiat.

Pour μ , ν sur B , on notera $\mu \approx \nu$. Si $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}_h(B)$, on dira que μ est <u>faciale</u> si $\|\mu\| = \|r(\mu)\|$.

THÉORÈME 13. - <u>On a l'équivalence des énoncés</u> :

(a) (B <u>est un simplexoïde</u>) ,

(b) <u>Deux mesures faciales maximales</u> μ , ν <u>sur</u> B , <u>de même résultante</u>, <u>sont toujours</u> $\approx$ <u>équivalentes</u>.

Ce théorème peut évidemment s'énoncer en termes de X et H .

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92160 ANTONY