Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Saint Raymond

Caractérisation d'espaces polonais d'après des travaux récents de J. P. R. Christensen et D. Preiss

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° 5, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11-12e années, 1971-73, n° 5, 10 p.

19 octobre 1972

CARACTÉRISATION D'ESPACES POLONAIS

d'après des travaux récents de J. P. R. CHRISTENSEN et D. PREISS

par Jean SAINT RAYMOND

Si X est un espace topologique complètement régulier, on note ici KX l'espace des compacts de X muni de la topologie de Hausdorff, et PX l'espace des mesures de probabilité régulières sur X muni de la topologie de la convergence étroite, c'est-à-dire de la topologie faible associée à l'espace des fonctions continues bornées sur X .

Il est bien connu que si X est un espace polonais, il en est de même de KX , et que, par conséquent, KX est souslinien. L'auteur avait remarqué dans [9] que, dans le cas où X est l'espace des nombres rationnels, KX n'était pas souslinien. Il venait d'établir les théorèmes 7 et 8, qui montrent que l'espace métrisable X est polonais dès que KX est souslinien, quand il apprit que J. P. R. CHRISTENSEN avait obtenu cette caractérisation par des méthodes différentes. En particulier, son résultat fondamental est le théorème 9, dont il déduit, entre autres résultats, les théorèmes 7 et 8, alors que nous obtenons ici ce théorème 9 comme corollaire du théorème 7.

Par ailleurs, un autre résultat bien connu sur les espaces polonais est le théorème de Baire : Si X est un espace polonais, tout fermé de X est un espace de Baire. Cette propriété n'est pas caractéristique des espaces polonais ; on peut, avec l'axiome du choix, construire des espaces non dénombrables dont tout fermé est un espace de Baire, et dont tout compact est dénombrable.

Par contre, on peut chercher si, avec des hypothèses de "régularité" sur X , cette propriété ne caractérise pas les espaces polonais. Après avoir vainement étudié le problème en supposant X analytique, l'auteur a eu connaissance, grâce à G. CHOQUET, d'un papier [8] de D. PREISS dont le théorème 3 entraînait de façon très simple que la propriété en question caractérisait les polonais parmi les espaces métriques séparables ∞-analytiques. On peut d'ailleurs voir qu'en admettant un axiome convenable de théorie des ensembles, il existe un espace souslinien métrisable non polonais dont tout fermé est un espace de Baire (théorème 14).

L'article de D. PREISS donne encore une autre caractérisation des espaces polonais : Un théorème de PROKHOROV ([3], § 5, théorème 2) affirme que, si X est polonais, X est un espace de Prokhorov, c'est-à-dire, que pour tout compact M de PX et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact T dans X avec

$$\sup_{\mu\in M} \mu(X \setminus T) \leqslant \varepsilon .$$

D. PREISS démontre que si X est un espace de Prokhorov métrisable séparable et co-analytique, X est nécessairement polonais. Son théorème le plus difficile est son théorème 1 qui montre que l'espace des nombres rationnels n'est pas un espace de Prokhorov. Nous en avons obtenu une démonstration notablement plus simple que nous exposons ici (théorème 17) et qui est fondée sur une construction analogue à celle de Roy O. DAVIES dans [7].

DÉFINITION 1. - *Une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite **semi-propre** si elle est continue, et si tout compact de $f(X)$ est image par f d'un compact de X.*

PROPOSITION 2.

(i) *La composée de deux applications semi-propres est semi-propre.*

(ii) *Toute application propre est semi-propre.*

(iii) *Si X et Y sont métrisables et si f est fermée, f est semi-propre.*

(iv) *Si X est polonais et si f est ouverte, f est semi-propre.*

Démonstration. - Les affirmations (i) et (ii) sont évidentes. On peut trouver dans [4] (n° 63, p. 68), une méthode pour démontrer que sous les hypothèses de (iii), il existe un fermé G de X tel que $f(G) = f(X)$ et que la restriction de f à G soit propre, ce qui ramène au cas (ii).

L'affirmation (iv) est démontrée dans [2] (§ 2, proposition 18).

LEMME 3. - *Si f est une application surjective et propre de l'espace polonais X sur l'espace métrisable Y, ce dernier est polonais.*

Démonstration. - L'espace métrisable Y est séparable puisque X l'est. Il existe donc un plongement de Y dans un espace métrique compact $\hat{Y}$. Il existe alors une compactification métrisable $\hat{X}$ de X et une application continue $\bar{f}$ de $\hat{X}$ dans $\hat{Y}$ prolongeant f. Comme X est polonais, $\hat{X} \setminus X$ est un K_σ dans $\hat{X}$. De plus, si a est un point de $\hat{X}$ tel que $\bar{f}(a) = b \in Y$, il existe une suite de points (x_n) de X qui converge vers a. Alors $T = \{b\} \cup \{f(x_n) \mid n \in \underset{\sim}{N}\}$ est est un compact de Y puisque $(f(x_n))$ converge vers b. Il en résulte que $f^{-1}(T)$ est un compact de X qui contient tous les x_n, donc aussi leur limite a dans $\hat{X}$. On a donc $a \in X$ et donc $\bar{f}^{-1}(Y) = X$, donc aussi

$$\bar{f}(\hat{X} - X) = \hat{Y} - Y .$$

Ceci entraîne que $\hat{Y} \setminus Y$ est un K_σ, donc que Y est un G_δ dans $\hat{Y}$. Donc Y est polonais.

LEMME 4. - *Soient X et Y deux espaces métrisables, f une surjection semi-propre de X sur Y, et (W_n) un recouvrement ouvert dénombrable de X. Alors, pour tout point y de Y, il existe un voisinage ω de y dans Y et un entier k tels que tout compact de Y contenu dans ω soit image d'un compact contenu dans $\bigcup_{i=0}^{k} W_i$.*

Démonstration. - Soit d une distance sur Y. Si le lemme n'était pas vrai, il existerait un point y dans Y et, pour tout entier n, un compact T_n contenu dans la boule de centre y et de rayon $1/n$, qui n'est l'image d'aucun compact contenu dans $\bigcup_{i=0}^{n} W_i$. Posons alors $T = \{y\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. On voit aisément que T est compact, donc image par f d'un compact S de X, puisque f est semi-propre. Puisque S est compact et recouvert par les (W_i), il existe un entier k, tel que $S \subset \bigcup_{i=0}^{k} W_i$. Si on pose alors

$$S_k = S \cap f^{-1}(T_k) ,$$

il est clair que $T_k = f(S_k)$, contrairement au choix de T_k, puisque S_k est compact et contenu dans $\bigcup_{i=0}^{k} W_i$.

LEMME 5. - *Soit* (U_n) *une suite décroissante d'ouverts non vides dans un espace métrique complet* Z. *On suppose que*

(a) *pour tout* n, $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$;

(b) *pour tout* n, U_n *est recouvert par un nombre fini d'ouverts de diamètre inférieur à* $1/n$.

Alors l'intersection des U_n *est un compact non vide de* Z.

Démonstration. - En vertu de la condition (a), on a $\bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U_n}$. Il en résulte que l'intersection T des U_n est fermée dans Z, donc complète. De plus, T est précompact en vertu de la condition (b). Donc T est compact. Nous construisons maintenant par récurrence une suite (A_k) décroissante de fermés telle que

$$\operatorname{diam}(A_k) \leqslant 1/k \quad \text{et} \quad (\forall\, n) \quad (A_k \cap U_n \neq \emptyset) .$$

On prend $A_0 = Z$. Si A_k est construit, on sait qu'il existe un nombre fini d'ouverts $V_1, V_2, \ldots, V_m$ de diamètre inférieur à $1/(k+1)$ qui recouvrent U_{k+1}. Supposons que, pour tout i de 1 à m, il existe $n_i \geqslant k$ tel que $A_k \cap U_{n_i} \cap V_i = \emptyset$; alors, pour $n \geqslant \sup n_i$, on aurait

$$A_k \cap U_n \subset A_k \cap U_n \subset A_k \cap U_n \cap U_k \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_k \cap U_n \cap V_i = \emptyset ,$$

contrairement à l'hypothèse faite sur A_k. Il existe donc un i tel que

$$(\forall\, n) \quad (A_k \cap U_n \cap V_i = \emptyset) ,$$

et l'on prend $A_{k+1} = A_k \cap \overline{V}_i$.

Puisque Z est complet, il existe un point z tel que $\{z\} = \bigcap_k (A_k \cap \overline{U}_k)$. Par conséquent, $z \in \bigcap_k \overline{U}_k = \bigcap_k U_k = T$, et T n'est pas vide.

LEMME 6. - *Soient* X *un espace polonais,* Y *un espace métrisable, et* f *une surjection semi-propre de* X *sur* Y. *Alors il existe un fermé* G *de* X *tel que* $Y = f(G)$ *et que la restriction de* f *à* G *soit propre.*

Démonstration. - On construit par récurrence une suite $(\mathcal{V}_n)$ de familles d'ouverts de X telle que si $G_n = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V$ et si d est une distance sur X pour laquelle X est complet :

(a) $\forall V \in \mathcal{V}_n$, $\operatorname{diam}(V) \leqslant 1/n$,

(b) $(f(V))_{V\in\mathcal{V}_n}$ est un recouvrement localement fini de Y,

(c) $\forall V \in \mathcal{V}_{n+1}$, $\overline{V} \subset G_n$,

(d) $f|_{G_n}$ est semi-propre.

On choisit $\mathcal{V}_0 = \{X\}$. Si $\mathcal{V}_n$ est construit, il existe un recouvrement dénombrable (W_m) de G_n par des ouverts de diamètre inférieur à $1/(n+1)$ dont l'adhérence est contenue dans G_n.

En vertu du lemme 4 appliqué à G_n, il existe, pour tout y de Y, un voisinage ouvert ω_y et un entier k_y tels que tout compact de ω_y soit l'image par f d'un compact contenu dans $\bigcup_{i=0}^{k_y} W_i$. Puisque Y est paracompact, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$, localement fini, plus fin que $(\omega_y)_{y\in Y}$. Il existe, pour tout $R \in \mathcal{R}$, un $y(R)$ tel que $R \subset \omega_{y(R)}$. On pose alors

$$\mathcal{V}_{n+1} = (f^{-1}(R) \cap W_i)_{R\in\mathcal{R},\, i\leqslant k_{y(R)}} .$$

Il est clair que $\mathcal{V}_{n+1}$ vérifie les conditions (a), (b) et (c). De plus, soit T un compact de Y. Il existe un nombre fini $R_1, \dots, R_h$ d'éléments de $\mathcal{R}$ qui recouvrent T, donc un nombre fini de compacts T_j tels que

$$T_j \subset R_j \quad \text{et} \quad T = \bigcup_{j=1}^{h} T_j .$$

Puisque $T_j \subset R_j \subset \omega_{y(R_j)}$, il existe un compact S_j dans $\bigcup_{i=0}^{k_{y(R_j)}} W_i$ avec $T_j = f(S_j)$.

Par conséquent, si on pose $S = \bigcup_{j=1}^{h} S_j$, S est un compact de G_{n+1}, et $f(S) = T$. Donc $\mathcal{V}_{n+1}$ vérifie la condition (d), et la récurrence est démontrée.

On pose maintenant $G = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$. Nous montrons que G est fermé, que $f(G) = Y$ et que $f|_G$ est propre. On voit aisément que la condition (b) entraîne que la famille $\mathcal{V}_n$ est localement finie. La famille $(\overline{V})_{V\in\mathcal{V}_n}$ est donc localement finie, donc de réunion fermée. Par suite :

$$\overline{G}_n \subset \bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} \overline{V} \subset G_{n-1} .$$

On a donc

$$G = \bigcap_0^{\infty} G_n = \bigcap_0^{\infty} \overline{G}_n ,$$

ce qui montre que G est fermé. Soit y un point de Y ; si on applique le lemme 5 à $Z = f^{-1}(y)$ et $U_n = Z \cap G_n$, ce qui est possible puisque $\{V \in \mathcal{V}_n \mid y \in f(V)\}$ est fini, on obtient que $f^{-1}(y) \cap G \neq \emptyset$, ce qui prouve que $Y = f(G)$. Soit maintenant T un compact de Y ; on a encore $\{V \in \mathcal{V}_n \mid T \cap f(V) \neq \emptyset\}$ fini, et en appliquant le lemme 5 à $Z = f^{-1}(T)$ et $U_n = Z \cap G_n$, on obtient que

$$G \cap f^{-1}(T) = (f|_G)^{-1}(T)$$

est compact, c'est-à-dire que $f|_G$ est propre.

THÉORÈME 7. - Soient X un espace polonais, Y un espace métrisable et f une surjection semi-propre de X sur Y. Alors Y est polonais.

Démonstration. - Le théorème se déduit immédiatement des lemmes 6 et 3 si on remarque que le fermé G de l'espace polonais X est polonais.

THÉORÈME 8. - Soit X un espace métrisable. Si KX est souslinien, X est polonais.

Démonstration. - X est homéomorphe à un fermé de l'espace métrisable souslinien KX, donc séparable. Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Le complété $\hat{X}$ est alors polonais. Par ailleurs, il existe un espace polonais P et une surjection continue T de P sur KX. Soit Q le sous-espace de $\hat{X} \times P$ formé des couples (x , p) tels que $x \in T(p)$. On vérifie aisément que Q est fermé dans le produit $\hat{X} \times P$, donc polonais, et que si π est la projection de $\hat{X} \times P$ sur $\hat{X}$, on a $\pi(Q) = X$. Pour montrer que X est polonais, il suffit, en vertu du théorème 7, de montrer que $\pi|_Q$ est semi-propre. Soit donc T_1 un compact de X ; il existe $p \in P$ tel que $T(p) = T_1$. Alors $S_1 = T_1 \times \{p\}$ est un compact de Q tel que $\pi(S_1) = T_1$, ce qui termine la démonstration.

THÉORÈME 9. - Soient X un espace polonais, Y un espace métrisable, et F une application croissante de KX dans KY telle que $F(KX)$ soit cofinal dans KY. Alors Y est polonais.

Démonstration. - Ce résultat est le théorème fondamental de [5]. Nous montrons d'abord que Y est séparable. Si ceci était faux, Y contiendrait un ensemble J non dénombrable dont tous les points seraient deux à deux à une distance supérieure à un ε positif. Comme KX est polonais, il existe une distance sur KX pour laquelle il est complet. On peut construire une suite d'ouverts $\mathcal{U}_n$ dans KX telle que

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{U}_{n+1}} \subset \mathcal{U}_n \ ; \quad \operatorname{diam}(\mathcal{U}_n) \leq 1/n \\ J \cap (\bigcup_{T\in\mathcal{U}_n} F(T)) \ \text{ non dénombrable} \end{cases}$$

puisque chaque $\mathcal{U}_n$ possède un recouvrement dénombrable par des ouverts de diamètre inférieur à $1/(n+1)$ dont l'adhérence est dans $\mathcal{U}_n$, et que l'un d'eux au moins vérifie la propriété. Il existe donc un compact S dans X tel que $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$.

On construit alors, par récurrence, une suite S_n de compacts avec $S_n \in \mathcal{U}_n$ et

$$F(S_n) \cap J \not\subset \bigcup_{p<n} [F(S_p) \cap J] .$$

Le compact $S \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ est tel que $F(S) \supset F(S_n) \cap J$. Donc $F(S)$ rencontre J suivant un ensemble infini, ce qui est incompatible avec le fait qu'il est compact. Donc Y est séparable, et son complété $\hat{Y}$ aussi.

Définissons alors R comme l'ensemble des couples (y , S) du produit $\hat{Y} \times KX$ tels que $y \in F(S)$. L'adhérence $\overline{R}$ de R est polonaise. Soit π la projection de $\overline{R}$ sur $\hat{Y}$. Nous montrons que $\pi(\overline{R}) = Y$ et que π est semi-propre, ce qui entraîne, d'après le théorème 7, que Y est polonais. Soit $y \in \pi(\overline{R})$. Il existe $S \in KX$ tel que $(y , S) \in \overline{R}$. Il existe donc une suite (y_n , S_n) dans R qui converge vers (y , S). Posons $S'_0 = S \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. $F(S'_0)$ est compact, et on a :

$$y_n \in F(S_n) \subset F(S'_0)$$

et par conséquent

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{F(S'_0)} = F(S'_0) \subset Y .$$

Ceci montre que $\pi(\overline{R}) \subset Y$. Soit maintenant T un compact de Y ; il existe $S \in KX$ tel que $F(S) \supset T$. Alors $T \times \{S\}$ est un compact contenu dans $\overline{R}$, et $\pi(T \times \{S\}) = T$; donc $\pi(\overline{R}) \supset Y$, et π est semi-propre, ce qui termine la démonstration.

LEMME 10. - Soient X_0 un espace métrisable, Y le noyau d'un système déterminant régulier (F_s) formé de parties G_δ de X_0, non toutes vides, et X un sous-espace de X_0 disjoint de Y. On suppose que :

(i) $X \cap F_s$ est dense dans F_s,

(ii) F_s n'a pas de point isolé,

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{s,n}$ est dense dans F_s.

Alors il existe un G_δ de X dénombrable et sans point isolé.

Il est bien connu que tout espace métrisable dénombrable, sans point isolé, est homéomorphe à l'espace $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. La démonstration du lemme se trouve dans [8] (lemme 2, p. 8).

COROLLAIRE 11. - Soit X un espace métrisable. Pour que tout fermé de X soit un espace de Baire, il faut et il suffit que X ne contienne aucun G_δ homéomorphe à $\mathbb{Q}$.

Démonstration. - Si X contient un G_δ, A, homéomorphe à $\mathbb{Q}$, A est maigre par rapport à $\overline{A}$, et $\overline{A} \setminus A$ est un F_σ maigre par rapport à $\overline{A}$. Il en résulte que $\overline{A}$ est maigre par rapport à lui-même, et n'est donc pas un espace de Baire. Inversement, si X contient un fermé qui n'est pas un espace de Baire, il contient un fermé Z maigre en lui-même. Donc Z est réunion d'une suite croissante R_k de fermés rares dans Z. En appliquant le lemme 10 à

$$X_0 = X , \quad Y = \emptyset , \quad F_{n_1 n_2 \ldots n_k} = Z \setminus R_k ,$$

on obtient, dans Z, un G_δ, A, homéomorphe à $\mathbb{Q}$. Puisque Z est fermé dans X, donc G_δ dans X, A est un G_δ de X.

THÉORÈME 12. - Soit X un espace métrisable séparable et co-analytique. Si X n'est pas polonais, X contient un G_δ homéomorphe à $\mathbb{Q}$.

Démonstration. - D. PREISS déduit ce théorème du lemme 10. (Cf. [8], théorème 3, p. 10).

THÉORÈME 13. - Soit X un espace métrisable séparable et co-analytique. Si tout fermé de X est un espace de Baire, X est polonais.

Démonstration. - Si X n'était pas polonais, il contiendrait un G_δ, A, homéomorphe à $\underset{\sim}{Q}$, en vertu du théorème 12 ; X contiendrait donc un fermé qui n'est pas un espace de Baire, d'après le corollaire 11.

CONTRE-EXEMPLE 14. - L'axiome de constructibilité de Gödel entraîne l'existence d'un espace métrisable souslinien non polonais dont tout fermé est un espace de Baire.

Démonstration. - Il est démontré dans [1] que moyennant l'axiome de constructibilité, il existe dans $[0\,,\,1]$ une partie A co-analytique non dénombrable dont tout compact est dénombrable. Posons alors $X = [0\,,\,1] \setminus A$. L'espace X est analytique et non borélien, donc non polonais. Soit F un fermé de X maigre par rapport à lui-même. Si $\overline{F}$ est l'adhérence de F dans $[0\,,\,1]$ et si $S = \overline{F} \setminus F$, S contient un G_δ dense dans le compact $\overline{F}$, donc un borélien de $[0\,,\,1]$. Comme $S \subset A$, ce borélien est dénombrable (sinon il contiendrait un compact non dénombrable inclus dans A). Le G_δ dénombrable est polonais, donc possède un point isolé, d'après le théorème de Baire, et ceci est incompatible avec le fait que F et ce G_δ sont tous deux denses dans $\overline{F}$. Ceci montre qu'il ne peut exister de fermé non vide de X qui soit maigre en lui-même, donc que tout fermé de X est un espace de Baire.

LEMME 15. - Il existe un espace métrique K_σ maigre en lui-même, qui n'est pas un espace de Prokhorov et sur lequel la distance prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable de $\underset{\sim}{R}_+$.

Démonstration. - Soit C l'espace compact de Cantor $\{0\,,\,1\}^{\underset{\sim}{N}}$. Le compact C est homéomorphe à une partie de $[0\,,\,1]$, et nous mettons sur C l'ordre induit, pour lequel toute partie fermée non vide possède un plus petit élément. Soit ν la mesure de Radon diffuse sur C $\otimes_{n\in\underset{\sim}{N}}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)/2$. Il existe dans C une partie A qui est un G_δ partout dense et ν-négligeable. De plus, l'ensemble $\mathcal{C}$ des compacts de $C \times C$, dont la première projection est C, est un fermé de l'espace compact métrisable $K(C \times C)$; c'est donc un compact métrisable. Il existe donc une surjection continue Φ de C sur $\mathcal{C}$. Nous posons alors, pour tout x de C :

$$\varphi(x) = \inf \{y \mid (x\,,\,y) \in \Phi(x)\} .$$

L'application φ est semi-continue inférieurement de C dans C, et son graphe Γ est un G_δ de $C \times C$. Définissons maintenant :

$$X = (C \times C) \setminus [(C \times A) \cup \Gamma] .$$

Il est clair que X est un K_σ dense dans $C \times C$, et maigre dans $C \times C$, donc maigre dans lui-même. De plus, il existe sur C , donc aussi sur $C \times C$, une distance compatible avec la topologie qui prend ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\Delta = \{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \underset{\sim}{N}\}$. Il ne reste plus à démontrer que le fait que X n'est pas un espace de Prokhorov.

Soit M l'ensemble des mesures $\varepsilon_x \otimes \nu$ quand x parcourt C . Comme l'application $x \longmapsto \varepsilon_x \otimes \nu$ est vaguement continue, M est compact dans $P(C \times C)$. Comme $C \times A$ et Γ sont $(\varepsilon_x \otimes \nu)$-négligeables pour tout x de C , M est inclus dans PX . Et comme PX est un sous-espace de $P(C \times C)$, M est compact dans PX . Soit maintenant T un compact de X . Puisque T est compact dans $C \times C$ et ne rencontre pas Γ , on a, pour tout x dans C ,

$$(x , \varphi(x)) \in \Phi(x) \quad \text{et} \quad (x , \varphi(x)) \notin T ,$$

donc $T \neq \Phi(x)$, c'est-à-dire $T \notin \mathcal{C}$ ou encore $p_1(T) \neq C$. Il existe donc un point c dans C tel que $(\{c\} \times C) \cap T = \emptyset$, donc $(\varepsilon_c \otimes \nu)(T) = 0$. On a donc, pour tout compact T de X ,

$$\sup_{\mu \in M} \mu(X \setminus T) = 1 .$$

Donc X n'est pas un espace de Prokhorov.

LEMME 16. - Soit X un espace métrique K_σ maigre dans lui-même sur lequel la distance prend ses valeurs dans une partie dénombrable Δ de $\underset{\sim}{R}_+$. Il existe un espace métrisable dénombrable W sans point isolé et une surjection propre p de X sur W .

Démonstration. - X est réunion d'une suite croissante $(T_k)_{k \geq 0}$ de compacts non vides, qui sont rares dans X en vertu du théorème de Baire. On définit l'application continue p de X dans $[0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$ par

$$p(x) = (d(x , T_k))_{k \in \underset{\sim}{N}} ,$$

et on pose $W = p(X)$. Puisque $W = \bigcup_{k \in \underset{\sim}{N}} p(T_k)$ et que

$$p(T_k) \subset \Delta^k \times \prod_{n=k}^{\infty} \{0\} ,$$

les $p(T_k)$ sont dénombrables, donc aussi W . Soit $w = p(x)$ un point de W . Il existe un entier k tel que $x \in T_k$; comme T_k est rare dans X , il existe une suite (x_m) de points de $X \setminus T_k$ qui converge vers x . La coordonnée d'indice k de $p(x_m)$ est non nulle. Donc $p(x_m) \neq p(x)$. On en déduit que w est un point d'accumulation de W . L'espace métrisable W est donc dénombrable et sans point isolé. Soit maintenant S un compact de W . Nous montrons que $p^{-1}(S)$ est compact, ce qui prouve que p est propre. Soit (x_m) une suite de points de $p^{-1}(S)$; on peut, en extrayant une première sous-suite, se ramener au cas où $p(x_m)$ converge, puisque S est compact. Il existe donc $x' \in X$ et $k \in \underset{\sim}{N}$ tels que

$$p(x_m) \to p(x') \quad \text{et} \quad x' \in T_k .$$

Les coordonnées d'indice k de $p(x_m)$ convergent vers la coordonnée d'indice k de $p(x')$. Donc

$$d(x_m , T_k) \to d(x' , T_k) = 0 .$$

Puisque T_k est compact, il existe un point y_m de T_k tel que

$$d(x_m , T_k) = d(x_m , y_m) .$$

On peut donc extraire une sous-suite convergente (y_{m_i}) de la suite (y_m). A Alors la sous-suite correspondante (x_{m_i}) de la suite (x_m) converge vers la même limite. Toute suite dans $p^{-1}(S)$ contient donc une sous-suite convergente, ce qui montre que $p^{-1}(S)$ est compact.

THÉORÈME 17. - L'espace des nombres rationnels n'est pas un espace de Prokhorov.

Démonstration. - Comme tout espace métrisable dénombrable sans point isolé est homéomorphe à $\underset{\sim}{Q}$, il suffit de montrer l'existence d'un espace dénombrable métrisable sans point isolé qui ne soit pas un espace de Prokhorov. En vertu des lemmes 15 et 16, il existe un espace métrisable dénombrable W sans point isolé qui est image propre d'un espace X qui n'est pas un espace de Prokhorov. Si W était un espace de Prokhorov, on pourrait montrer qu'il en est de même de X, ce qui mène à une contradiction. En effet, soient M un compact dans PX, et $\varepsilon > 0$; l'application $\tilde{p}$ de PX dans PW, qui associe à toute mesure sur X la mesure image par p sur W, est continue, donc envoie M sur un compact $\tilde{p}(M)$. Puisque nous supposons W espace de Prokhorov, il existe un compact T dans W tel que

$$\sup_{\mu\in\tilde{p}(M)} \mu(W - T) \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\sup_{\rho\in M}(\tilde{p}(\rho))(W - T) = \sup_{\rho\in M} \rho(X - p^{-1}(T)) \leq \varepsilon$$

ce qui montre que X est un espace de Prokhorov, puisque $p^{-1}(T)$ est compact.

THÉORÈME 18. - Soit X un espace métrisable, séparable et co-analytique. Si X est un espace de Prokhorov, X est polonais.

Démonstration. - La démonstration est celle donnée par D. PREISS dans [8]. On peut démontrer (facile et connu) que tout G_δ dans un espace de Prokhorov est un espace de Prokhorov. Si X n'était pas polonais, il contiendrait, d'après le théorème 12, un G_δ homéomorphe à $\underset{\sim}{Q}$, qui serait un espace de Prokhorov homéomorphe à $\underset{\sim}{Q}$, en contradiction avec le théorème 17.

CONTRE-EXEMPLE 19. - L'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un espace métrisable séparable non polonais, qui est un espace de Prokhorov.

Démonstration. - La construction se trouve dans [8] (Remark 2, p. 12).

PROBLÈME 20. - On peut chercher s'il existe des espaces métrisables analytiques non polonais qui soient des espaces de Prokhorov. Nous ne savons pas si l'exemple 14 est ou non un espace de Prokhorov.

On peut conjecturer aussi que pour un espace métrisable séparable, ou au moins pour un espace métrisable analytique, l'espace est un espace de Prokhorov si, et seulement si, tout fermé est un espace de Baire.

Il résulte des corollaire 11 et théorème 17 que dans un espace de Prokhorov tout fermé est un espace de Baire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADDISON (J. W.). - Some consequences of the axiom of constructibility, Fund. Math., Warszawa, t. 46, 1959, p. 337-357.

[2] BOURBAKI (N.). - Topologie générale. Chap. 9. Nouvelle Edition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[3] BOURBAKI (N.). - Intégration. Chap. 9. - Paris, Hermann, 1969 (Act. scient. et ind., 1343 ; Bourbaki, 35).

[4] CHOQUET (G.). - Problèmes de topologie et théorie des fonctions. - Paris, C. D. U., 1966.

[5] CHRISTENSEN (J. P. R.). - Necessary and sufficient condition for the measurability of certain sets of closed subsets, Math. Annalen, t. 200, 1973, p. 189-193.

[6] CHRISTENSEN (J. P. R.). - Topology and Borel structure (à paraître dans la collection "Graduate texts in Mathematics", Springer-Verlag).

[7] DAVIES (R. O.). - A non Prokhorov space. Preprint, University of Leicester.

[8] PREISS (D.). - Metric spaces in which Prokhorov's theorem is not valid. Preprint, University of Praha.

[9] SAINT RAYMOND (J.). - Topologie sur l'ensemble des compacts non vides d'un espace topologique séparé, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/70, n° 21, 6 p.

Jean SAINT RAYMOND
18 rue de Moscou
75008 PARIS