Richard Becker

Idempotence de l'opération de souslin

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. nº C3, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A12_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e années, 1971-1973, Communication n° 3, 2 p.

Février 1973

IDEMPOTENCE DE L'OPÉRATION DE SOUSLIN

par Richard BECKER

Ce travail a pour objet de donner une démonstration très simple de l'idempotence de l'opération de Souslin, dans le cadre d'une famille $\mathcal{H}$ de parties d'un ensemble E, stable par intersection finie.

Les notations et définitions sont celles de [1] :

1° Soit $\Delta = (H_s)$ une famille de parties de E dans $\mathcal{H}$, indexée par les suites finies s de N, ensemble des entiers naturels. On dit que Δ est un système déterminant de E.

2° Si σ est un élément de Σ (suites infinies de N), la notation $s < \sigma$ signifie que s est une section commençante de σ. On pose

$$H_\sigma = \bigcap_{s<\sigma} H_s \ .$$

3° On pose

$$H_\Delta = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} H_\sigma \ .$$

On dit que H_Δ est le noyau de Δ, et est un ensemble $\mathcal{H}$-souslinien. L'opération $\Delta \longmapsto H_\Delta$ est appelée Opération de Souslin.

THÉORÈME (Idempotence de l'opération de Souslin [1], [2], [3]). - Tout noyau d'un système déterminant de E, dont les éléments sont $\mathcal{H}$-sousliniens, est lui-même $\mathcal{H}$-souslinien.

Preuve. - On va supposer $E \in \mathcal{H}$. Les modifications à apporter dans le cas contraire seront évidentes. On a

$$H_\Delta = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{s<\sigma} H_s \quad \text{avec} \quad H_s = \bigcup_{\sigma'} \bigcap_{s'<\sigma'} H_s^{s'} \ , \text{ où } H_s^{s'} \in \mathcal{H} \ .$$

Soit $(p, q) \longmapsto e(p, q)$ l'application de $N^* \times N$ dans N^*, déduite de l'énumération classique de $N^* \times N$: $(1, 0)$; $(1, 1)$, $(2, 0)$; $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$; $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$; etc. où l'on range les couples (p, q) de $N^* \times N$ de sorte que $e(p, q) \leqslant e(p', q')$ si, et seulement si : ou bien $p + q < p' + q'$, ou bien $p + q = p' + q'$ et $p \leqslant p'$.

Soit $s = a_1, a_2, \ldots, a_n$ une suite finie de longueur $\ell(s) = n$:

1° Si n est de la forme $n = e(p, 0)$, on pose : $K_s = E$.

2° Si n est de la forme $n = e(p, q)$, avec $q \geqslant 1$, on pose : $K_s = H_r^t$ où

$$r = a_{e(1,0)}, a_{e(2,0)}, \ldots, a_{e(p,0)}$$

et

$$t = a_{e(p,1)}, a_{e(p,2)}, \ldots, a_{e(p,q)} \ .$$

Soit σ : $k \longmapsto \sigma(k)$, une suite infinie, on pose :

$$\sigma_0 = \sigma(e(1\ ,\ 0))\ ,\ \sigma(e(2\ ,\ 0))\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma(e(i\ ,\ 0))\ ,\ \ldots$$

et, pour $p \geqslant 1$:

$$\sigma_p = \sigma(e(p\ ,\ 1))\ ,\ \sigma(e(p\ ,\ 2))\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma(e(p\ ,\ m))\ ,\ \ldots$$

On a alors

$$K_\sigma = \bigcap_{s<\sigma_0} (H_s^{\sigma_{\ell(s)}}) \quad \text{et donc} \quad K_\Delta \subset H_\Delta\ .$$

Réciproquement,

$$x \in H_\Delta \Longleftrightarrow \exists\ \sigma_x\ ,\quad \forall\ s < \sigma_x\ ,\quad \exists\ \sigma\{_{(s,x)} \quad \text{telle que} \quad x \in H_s^{\sigma\{(s,x)}}\ .$$

On aura donc $x \in K_\sigma$ dès que σ sera telle que :

$$\sigma_0 = \sigma_x \quad \text{et} \quad \forall\ s < \sigma_0\ :\ \sigma_{\ell(s)} = \sigma\{_{(s,x)}\ .$$

Or ceci est toujours réalisable car $\sigma \longmapsto (\sigma_0\ ;\ \sigma_1\ ,\ \sigma_2\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma_p\ ,\ \ldots)$ constitue une bijection de Σ sur $(\Sigma)^N$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique. Cours rédigé par Claude Mayer. - Paris, Centre de documentation universitaire, 1969.

[2] SIERPINSKI (W.). - Algèbre des ensembles. - Warszawa, Polskie Towarzystwo Matematyczne, 1951 (Monografic matematyczne, 23).

[3] SIMONS (S.). - A proof that Souslin Souslin H $\subset$ Souslin H , Canadian math. Bull., t. 9, 1966, p. 79-82.

Richard BECKER
Université de Paris VI
Mathématiques, E. R. A. 294
4 place Jussieu, Tour 46
75230 PARIS CEDEX 05