Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

JEAN SAINT RAYMOND

Sur une conjecture de Fakhoury

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° C2, p. C1-C3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A11_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e année, 1971-1973, Communication n° 2, 3 p.

Janvier 1973

SUR UNE CONJECTURE DE FAKHOURY

par Jean SAINT RAYMOND

Le but de cette note est de fournir un contre-exemple à la conjecture suivante de H. FAKHOURY.

CONJECTURE. - Soit K un convexe compact symétrique. Soient p la jauge de K, et S l'ensemble des points x de K, où $p(x) = 1$. Si f est une forme linéaire vérifiant le calcul barycentrique, et si $f|_K$ est continue en tout point de S, $f|_K$ est continue.

LEMME. - Il existe sur ℓ^1 une norme n^* localement uniformément convexe qui est la norme duale d'une norme sur c_0, et qui est équivalente à la norme canonique de ℓ^1.

Nous posons, pour tout $x = (\xi_n)_n$ de ℓ^1

$$\begin{cases} \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \\ \|x\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

la norme $\|\cdot\|_1$ est la norme canonique de ℓ^1. Nous définissons, pour $x = (\xi_n)_n$ dans ℓ^1,

$$n^*(x) = (\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

n^* est une norme sur ℓ^1, et puisque $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$,

$$\|x\|_1 \leq n^*(x) \leq (\|x\|_1^2 + \|x\|_1^2)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2}).\|x\|_1$$

n^* est équivalent à la norme $\|\cdot\|_1$. De plus, puisque

$$n^*(x) = \sup_q([\sum_{n=1}^q |\xi_n|]^2 + \sum_{n=1}^q \xi_n^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

n^* est s. c. i. pour la topologie $\sigma(\ell^1, c_0)$. Il en résulte que

$$K = \{x \in \ell^1 ; n^*(x) \leq 1\}$$

est un convexe faiblement fermé, donc que n^* est la norme duale de la jauge de K^0, en vertu du théorème des bipolaires.

Le convexe K est donc un convexe compact symétrique pour la topologie $\sigma(\ell^1, c_0)$.

Nous montrons maintenant que n^* est l. u. c. Soit x tel que $n^*(x) = 1$, et (x_q) tels que

$$n^*(x_q) \to 1 \quad \text{et} \quad n^*(x + x_q) \to 2 .$$

Nous démontrons que $n^*(x - x_q) \to 0$.

Si nous considérons les points (y_q) (resp. y) de ℓ^2 définis par

$$y_q = (\|x_q\|_1 , \xi_1^q , \dots , \xi_k^q , \dots)$$
$$y = (\|x\|_1 , \xi_1 , \dots , \xi_k , \dots)$$

On a

$$\|y_q\| = n^*(x_q) \to 1 = n^*(x) = \|y\|$$

et

$$(\|y\| + \|y_q\|)^2 \geqslant \|y + y_q\|^2 = (\|x\|_1 + \|x_q\|_1)^2 + \| x + x_q\|_2^2$$
$$(\|y\| + \|y_q\|)^2 \geqslant \|y + y_q\|^2 \geqslant \|x + x_q\|_1^2 + \|x + x_q\|_2^2 = (n^*(x + x_q))^2$$

On a donc

$$\begin{cases} \|y_q\| \to 1 = \|y\| \\ \|y + y_q\| \to 2 . \end{cases}$$

Comme ℓ^2 est uniformément convexe, on en déduit que $\|y - y_q\| \to 0$, donc que

$$\begin{cases} \|x_q\|_1 \to \|x\|_1 \\ (\forall\ k) , \quad \xi_k^q \to \xi_k . \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \underset{\sim}{N}$ tel que $\sum_{k+1}^{\infty} |\xi_j| < \frac{\varepsilon}{6}$. Il existe donc N tel que, pour $q \geqslant N$, on ait :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^q - \xi_j| < \frac{\varepsilon}{6} \\ |\|x_q\|_1 - \|x\|_1| < \frac{\varepsilon}{3} . \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^q - \xi_j| &\leqslant \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^q - \xi_j| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j^q| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^q - \xi_j| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^q| - \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^q| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^q - \xi_j| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| + \|x\|_1 + \frac{\varepsilon}{3} - \left(\sum_{j=1}^{k} |\xi_j| - \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^q - \xi_j|\right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^q - \xi_j| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| + \|x\|_1 + \frac{\varepsilon}{3} - \|x\|_1 + \sum_{k+1}^{\infty} |\xi_j| + \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^q - \xi_j| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2 \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| + 2 \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^q - \xi_j| < \varepsilon . \end{aligned}$$

Donc

$$\|x_q - x\|_1 < \varepsilon , \text{ et } x_q \to x .$$

La norme n^* est donc l. u. c.

Soit maintenant f la forme linéaire sur ℓ^1 définie par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k .$$

Comme la suite $(1 , 1 , \dots , 1 , \dots)$ n'appartient pas à c_0 , f n'est pas continue pour $\sigma(\ell^1 , c_0)$, donc sa restriction à la boule de rayon $2^{-\frac{1}{2}}$, qui est contenue dans K , n'est pas continue ; donc, a fortiori, $f|_K$ n'est pas continue.

Comme

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j ,$$

f est de première classe affine, et vérifie donc le calcul barycentrique. Reste à prouver que $f|_K$ est continue en tout point de S. Comme K est métrisable, il suffit de montrer que si (x_q) converge faiblement vers $x \in S$, $f(x_q)$ converge vers $f(x)$. Nous démontrons que $n^*(x_q) \to 1$ et $n^*(x + x_q) \to 2$, ce qui entraînera, d'après le lemme, que $\| x - x_q\| \to 0$, donc que

$$|f(x) - f(x_q)| \leq \|x - x_q\| \to 0 .$$

Si x_q converge faiblement vers x, $(x + x_q)/2$ converge faiblement vers x. Tout revient donc à démontrer que si $x_q \in K$ converge faiblement vers x, $n^*(x_q) \to 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $(1 - \varepsilon).K$ est convexe compact, et ne contient pas x. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $g \in c_0$ tel que

$$\begin{cases} g(x) > 1 \\ g(y) \leq 1 \qquad \forall\ y \in (1 - \varepsilon).K . \end{cases}$$

Comme $g(x_q) \to g(x) > 1$, il existe N tel que $g(x_q) > 1$, donc $n^*(x_q) > 1-\varepsilon$, et puisque $n^*(x_q) \leq 1$, on a bien

$$n^*(x_q) \to 1 = n^*(x)$$

et de même

$$n^*\left(\frac{x + x_q}{2}\right) \to 1$$

donc $n^*(x + x_q) \to 2$.

On a donc bien démontré que f vérifiait toutes les hypothèses de la conjecture, sans vérifier la conclusion.

Jean SAINT RAYMOND
18 rue de Moscou
75008 PARIS