GUSTAVE CHOQUET

Une propriété des germes suivant un ultrafiltre

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° C1, p. C1-C4

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, Communication n° 1, 4 p.

UNE PROPRIÉTÉ DES GERMES SUIVANT UN ULTRAFILTRE

par Gustave CHOQUET

Résumé. - On montre que, si une application d'un ensemble dans lui-même transforme un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ en lui-même, son germe suivant $\mathfrak{U}$ est l'identité.

☆
☆ ☆

Une question posée par A. CONNES [2], à propos de ses recherches en analyse non-standard, m'a conduit à remarquer une propriété fort simple des ultrafiltres (théorème 1) ([1]). A. CONNES a eu l'heureuse idée d'appliquer cette propriété aux ultrafiltres absolus définis antérieurement (CHOQUET [1]), et en a déduit l'existence de certains modèles intéressants en analyse non-standard. On se contentera ici de donner une brève indication sur cette application.

THÉORÈME 1. - Soient E un ensemble quelconque, $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur E, et f une application de E dans E. Il existe un $U \in \mathfrak{U}$ tel que :

- Ou bien $f_U =$ identité ;
- Ou bien U et $f(U)$ sont disjoints.

Voici une autre forme équivalente du théorème 1, souvent plus commode pour les applications :

THÉORÈME 1 bis. - Soient E un ensemble quelconque, $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur E, et f une application de E dans E. Si $f(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$ ([2]), il existe un $U \in \mathfrak{U}$ tel que $f_U =$ identité (autrement dit, le germe de f suivant $\mathfrak{U}$ est le germe de l'application identique).

([1]) Peu de temps après, CONNES apprit, chez les logiciens, que cette propriété était déjà connue d'eux ; et d'autre part, une lettre de Roy O. DAVIES m'apprit qu'elle figurait déjà dans la littérature (voir KATĚTOV [3], [4], et KENYON [5]) sous la forme suivante : Si f est une application quelconque de E dans lui-même, on peut écrire $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$, où $f(x) = x$ pour tout $x \in X_1$, et $f(X_i) \cap X_i = \emptyset$ pour $i = 2, 3, 4$.
Nous publions cependant ce travail, d'une part parce que le théorème 1 ne semble pas connu des analystes, d'autre part parce qu'il pose une question intéressante, le problème 3.

([2]) Rappelons que, si $\mathfrak{F}$ est un filtre, $f(\mathfrak{F})$ est le filtre ayant pour base les ensembles $f(X)$, où $X \in \mathfrak{F}$. Quand $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre, $f(\mathfrak{F})$ est aussi un ultrafiltre.

Voici enfin une troisième forme équivalente, peut-être plus curieuse qu'utile :

THÉORÈME 1 ter. - Soit $\check{E}$ l'espace topologique (compact) des ultrafiltres sur un ensemble E , et soit φ une application continue de $\check{E}$ dans lui-même. Alors l'ensemble fermé des points invariants de φ est ouvert.

C'est la forme 1 du théorème que nous allons démontrer. Nous utiliserons pour cela systématiquement la structure de l'application f .

Démonstration du théorème 1. - Notons d'abord que E est réunion des deux ensembles E_1 , E_2 ainsi définis :

$E_1 = \{x \in E$ tels que l'ensemble des $f^p(x)$ soit infini$\}$ et $E_2 = \complement E_1$.

Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, il est porté par l'un des ensembles E_1 , E_2 ; et, comme $f(E_i) \subset E_i$ pour chaque i , on peut ramener la démonstration au cas où E est l'un des E_i ; d'où deux cas à examiner :

1° Pour tout $x \in E$, l'ensemble des $x \in E$ est infini (i. e. aucun des f^p n'a de point fixe).

Introduisons sur E deux relations :

$(x \sim y)$, s'il existe deux entiers p , $q > 0$ tels que $f^p(x) = f^q(y)$;

$(x \approx y)$, s'il existe deux entiers p , $q > 0$ de même parité tels que $f^p(x) = f^q(y)$.

Ce sont évidemment deux relations d'équivalence ; la seconde est plus fine que la première, et toute classe d'équivalence C de la première est réunion de deux classes d'équivalence de la seconde, que nous noterons C_1 , C_2 en utilisant l'axiome du choix.

Pour chaque C , on a $f(C_1) = C_2$ et $f(C_2) = C_1$. Donc, si l'on pose $X_i = \bigcup_C C_i$, les ensembles X_1 , X_2 sont disjoints, et l'on a

$$f(X_1) = X_2 \quad \text{et} \quad f(X_2) = X_1 \ .$$

Comme l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est porté par l'un des deux X_i , nous sommes dans le second cas envisagé par le théorème 1.

2° Pour tout $x \in E$, l'ensemble des $f^p(x)$ est fini.

Posons X = réunion des cycles (forcément finis et mutuellement disjoints) de E . Puis, pour tout $p \geqslant 1$, $Y_p = \{x \in E ;\ f^p(x) \in X$ et $f^{p-1}(x) \notin X\}$; les Y_p sont mutuellement disjoints, et leur réunion est $Y = \complement X$. Enfin, notons que X est réunion de trois ensembles disjoints X_1 , X_2 , X_3 , qui sont la réunion des cycles respectivement, d'ordre 1 , d'ordre pair, d'ordre impair $\geqslant 3$.

Comme E est réunion de X_1 , X_2 , X_3 , Y , l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est porté par l'un de ces ensembles.

(a_1) Si $X_1 \in \mathcal{U}$, comme f_{X_1} est l'identité, on est dans le premier cas du théorème 1.

(a_2) Si $X_2 \in \mathcal{U}$, il existe une partition évidente de X_2 en deux ensembles X_2' , X_2'' , dont chacun est l'image de l'autre par f . Comme $\mathcal{U}$ est porté par l'un d'eux, on est dans le second cas du théorème 1.

(a_3) Si $X_3 \in \mathcal{U}$, il existe, d'après l'axiome du choix, une partie A de X_3 ayant exactement un point dans chacun des cycles de X_3 . Posons $B = (X_3 \setminus A)$. Alors $\mathcal{U}$ est porté par A ou B . Si $A \in \mathcal{U}$, on est dans le second cas du théorème 1, car A et $f(A)$ sont disjoints. Si $B \in \mathcal{U}$, utilisons la partition de B en les ensembles B_1 , B_2 contenant respectivement, dans chaque cycle (si $(2p + 1)$ est son ordre), les p transformés impairs du point de A , et les p transformés pairs de ce point. Comme $\mathcal{U}$ contient l'un des deux B_i , et comme B_i et $f(B_i)$ sont disjoints pour chaque i , on est à nouveau dans le second cas du théorème 1.

(b) Si $Y \in \mathcal{U}$, montrons qu'on est aussi dans ce second cas : Si $Y_1 \in \mathcal{U}$, on a $f(Y_1) \subset X$, d'où Y_1 et $f(Y_1)$ disjoints. Sinon, $(Y \setminus Y_1) \in \mathcal{U}$; posons alors

$$Y' = \bigcup_{p>0} Y_{2p+1} \qquad \text{et} \qquad Y'' = \bigcup_{p>0} Y_{2p} \quad .$$

On a $f(Y') \subset Y''$ et $f(Y'') \subset (Y' \cup Y_1)$, donc chacun des ensembles Y' , Y'' est disjoint de son image, ce qui termine la démonstration, puisque l'un d'eux porte $\mathcal{U}$.

Notons après coup qu'on aurait pu abréger un peu la démonstration, en définissant dès le début les ensembles X_1 , X_2' , X_2'' , A , B_1 , B_2 , Y' , Y'' ; mais ce parachutage aurait dissimulé la raison de leur **choix**.

Application. - Nous allons maintenant donner quelques indications sur la façon dont CONNES a appliqué le théorème 1 bis aux ultrafiltres absolus pour construire des modèles non-standards.

Rappelons (CHOQUET [1]) qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble E est dit absolu si, pour toute application f de E dans un autre ensemble, le germe de f suivant $\mathcal{U}$ est, soit injectif, soit un germe d'application constante.

Si K est un ensemble quelconque, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur E , on désigne par $\mathfrak{S}(\mathcal{U}, K)$ l'ensemble des germes suivant $\mathcal{U}$, d'applications de E dans K (on l'appelle aussi ultra-puissance de K associée à $\mathcal{U}$). On sait par exemple que, si K est un corps, l'algèbre $\mathfrak{S}(\mathcal{U}, K)$ (pour les opérations usuelles) est aussi un corps.

Le lemme qu'utilise A. CONNES dans son travail est le suivant :

LEMME 2. - Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre absolu, l'application $\varphi \to \varphi(\mathcal{U})$, définie sur $\mathcal{F}(\mathcal{U}, K)$, est injective.

Démonstration. - Soient φ_1 , $\varphi_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, K)$ tels que $\varphi_1(\mathcal{U}) = \varphi_2(\mathcal{U})$. Si ce filtre $\varphi_i(\mathcal{U})$ est trivial, la relation $\varphi_1 = \varphi_2$ est évidente. Sinon, soient f_1 , f_2 deux applications de E dans K , dont les germes suivant $\mathcal{U}$ sont respectivement φ_1 , φ_2 . Comme $\mathcal{U}$ est absolu, il existe $X \in \mathcal{U}$ tel que les restrictions de f_1 , f_2 à X soient injectives ; posons $Y = f_1(X) \cap f_2(X)$, et désignons par f_i^{-1} la restriction à Y de l'application réciproque de f_i sur X . Par hypothèse, l'application $g = f_2^{-1} \circ f_1$ de $f_1^{-1}(Y)$ dans E transforme $\mathcal{U}$ en lui-même. D'après le théorème 1 bis, il existe donc dans X un $X' \in \mathcal{U}$ sur lequel g est l'identité ; on a donc $f_1 = f_2$ sur X' ; autrement dit, $\varphi_1 = \varphi_2$.

Lorsque K est un corps, le lemme 2 permet d'identifier le corps $\mathcal{F}(\mathcal{U}, K)$ à l'ensemble des ultrafiltres sur K qui sont, soit triviaux, soit isomorphes à $\mathcal{U}$. C'est cette identification qu'utilise A. CONNES.

Problème 3. - On peut se demander si les ultrafiltres absolus sont les seuls qui vérifient le lemme 2. Autrement dit, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur E , est-ce que le caractère injectif de l'application $\varphi \to \varphi(\mathcal{U})$ définie sur $\mathcal{F}(\mathcal{U}, K)$ équivaut au caractère absolu de $\mathcal{U}$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\underset{\sim}{N}$, Bull. Sc. math., Paris, t. 92, 1968, p. 143-153.

[2] CONNES (Alain). - Théorie des ultrapuissances et applications, dans le cadre de l'analyse non-standard, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/70, n° 8, 25 p.

[3] KATĚTOV (M.). - A theorem on mappings, Comment. Math. Univ. Carolinae, t. 8, 1967, p. 431-433.

[4] KATĚTOV (M.). - Products of filters, Comment. Math. Univ. Carolinae, t. 9, 1968, p. 173-189.

[5] KENYON (Hewitt). - Partition of a domain (Advanced problems and solutions, n° 5077), Amer. math. Monthly, t. 70, 1963, p. 216, et t. 71, 1964, p. 219-220.

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92 - ANTONY