Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michèle Capon

Densité de l'espace des fonctions affines continues sur un convexe compact X dans l'espace L^p d'une mesure maximale

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° 26, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A8_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 26, 14 p.

24 juin 1971

DENSITÉ DE L'ESPACE DES FONCTIONS AFFINES CONTINUES SUR UN CONVEXE COMPACT X DANS L'ESPACE L^p D'UNE MESURE MAXIMALE

par Michèle CAPON

Introduction. - Pour tout convexe compact, on désignera par $\mathcal{A}(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur X. Rappelons l'énoncé du théorème de Carathéodory :

Soit X un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. Tout point x est barycentre d'une mesure maximale m, portée par un ensemble fini de points extrémaux. De plus, on peut toujours choisir ces points affinement indépendants (donc en nombre $\leqslant n + 1$).

Pour cette mesure, on a en particulier

$$\mathcal{A}(X) = L^p(m) , \qquad \text{pour tout } p \geqslant 1 .$$

C'est une identité de ce type, que nous nous proposons de généraliser. Soit X un convexe compact d'un e. l. c. s. ; on peut se poser les problèmes suivants :

$[\mathcal{P}_p]$ $p \geqslant 1$ étant fixé, existe-t-il, pour tout x_0 dans X, une mesure maximale m_p sur X, de barycentre x_0, telle que $\mathcal{A}(X)$ soit dense dans $L^p(m_p)$?

$[\mathcal{P}]$ Existe-t-il, pour tout x_0 dans X, une mesure maximale m, de barycentre x_0, telle que $\mathcal{A}(X)$ soit dense dans $L^p(m)$ pour tout $p \geqslant 1$?

Enfin, on peut se demander si, pour un point x_0 de X, une réponse positive aux problèmes $[\mathcal{P}_p](x_0)$ pour tout $p \geqslant 1$ (à savoir, il existe m_p maximale, de barycentre x_0, telle que $\mathcal{A}(X)$ soit dense dans $L^p(m_p)$) implique une réponse positive au problème $[\mathcal{P}](x_0)$.

Le problème $[\mathcal{P}_p](x_0)$ n'est qu'un cas particulier du problème, posé par G. CHOQUET, à la fin de son exposé sur le problème des moments.

Notation. - Pour toute $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$, nous noterons M_μ l'ensemble des mesures $\nu \in \mathcal{M}_1^+(X)$, telles que $r(\mu) = r(\nu)$. Dans le cas $p = 1$, les travaux de DOUGLAS, ALFSEN et SKAU permettent d'énoncer le résultat suivant :

Soit X un convexe compact d'un e. l. c. s., $m \in \mathcal{M}_1^+(X)$. Pour que $\mathcal{A}(X)$ soit dense dans $L^1(m)$, il faut et il suffit que m soit point extrémal de M_m.

1. Résultats généraux.

THÉORÈME 1. - On se donne $m \in \mathcal{M}_1^+(X)$, et p tel que $1 \leqslant p < \infty$. On a l'équivalence des deux énoncés suivants :

(a) $\mathcal{A}(X)$ est dense dans $L^p(m)$;

(b) Pour toute $g \in L^{p'}(m)$ avec $\int_X |g|\, dm = 1$, $\mu = |g|.m$ est un point extrémal de M_μ .

Démonstration.

(b) ==> (a) . Si $\mathcal{A}(X)$ n'est pas dense dans $L^p(m)$, il existe g dans $L^{p'}(m)$ orthogonale à $\mathcal{A}(X)$, et on peut supposer que $\int |g|\, dm = 1$. Les mesures $2g^+.m$ et $2g^-.m$ sont toutes deux non nulles, distinctes (car étrangères), et elles ont même barycentre qui est aussi celui de μ . Or $\mu = |g|\, dm = (1/2)(2g^+.m + 2g^-.m)$, donc μ n'est pas point extrémal de M_μ .

(a) ==> (b) . Supposons qu'il existe g dans $L^{p'}(m)$, avec $\int |g|\, dm = 1$, et telle que $\mu = |g|.m$ ne soit pas point extrémal de M_μ . On a alors

$$\mu = (m_1 + m_2)/2 , \qquad m_1 \text{ et } m_2 \in M_\mu .$$

On a $m_i \leqslant 2\mu = 2|g|.m$, donc, d'après Radon-Nikodym, il existe $g_i \geqslant 0$ dans $L^1(m)$, telle que $m_i = g_i.m$. D'où

$$\mu = (1/2)(g_1.m + g_2.m) = |g|.m ,$$

donc $(1/2)(g_1 + g_2) = |g|$, m presque-partout, et, comme $|g|$ est dans $L^{p'}(m)$, g_1 et g_2 sont aussi dans $L^{p'}(m)$. Enfin, comme la résultante de $m_1 - m_2$ est 0 , $g_1 - g_2$ est orthogonale à $\mathcal{A}(X)$, donc $\mathcal{A}(X)$ n'est pas dense dans $L^p(m)$.

COROLLAIRE 2. - Soit X un simplexe. Pour toute mesure maximale m , $\mathcal{A}(X)$ est dense dans $L^p(m)$ pour tout p tel que $1 \leqslant p < +\infty$.

Soient m une mesure maximale sur X , et $g \in L^{p'}(m)$ avec $\int_X |g|\, dm = 1$, soit $\mu = |g|.m$. Il suffit de montrer que μ est un point extrémal de M_μ . Or μ est, comme m , portée par tout ensemble bordant, donc elle est maximale. Si $\mu = (m_1 + m_2)/2$, où $m_i \in M_\mu$, on a $m_i \leqslant 2\mu$, donc m_1 et m_2 sont maximales. Or, dans M_μ , il existe une seule mesure maximale, puisque X est un simplexe, donc $m_1 = m_2 = \mu$. Autrement dit, μ est un point extrémal de M_μ .

COROLLAIRE 3. - Soit X un convexe compact.

1° Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathcal{A}(X)$ est dense dans $L^1(m)$ (m mesure sur X , $m \in \mathcal{M}_1^+(X)$) ;

(b) m est un point extrémal de M_m .

2° Tout point de X est barycentre d'une mesure maximale telle que $\mathcal{A}(X)$ soit dense dans $L^1(m)$.

Ces énoncés sont dus à DOUGLAS, ALFSEN et SKAU. Nous allons les redémontrer en utilisant le théorème 1.

Démonstration. - Dans le corollaire 3, 1°, l'implication (a) ==> (b) résulte du théorème 1 en prenant $g = 1$, et l'implication (a) <== (b) résulte du théorème 1 et du lemme ci-après.

LEMME 4. - Soient m et μ dans $\mathcal{M}_1^+(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Si m est extrémale dans M_m, et si $\mu \leqslant \lambda m$, alors μ est extrémale dans M_μ.

En effet, si $\mu = (m_1 + m_2)/2 \leqslant \lambda m$, où $m_i \in M_\mu$, on a $\lambda m = \mu + \pi$, où $\pi \in \mathcal{M}^+(X)$, donc $\lambda m = ((\pi + m_1) + (\pi + m_2))/2$, d'où

$$m = (m_1' + m_2')/2 , \qquad \text{avec } m_i' = \lambda^{-1}(\pi + m_i) .$$

On a alors $m_i' \geqslant 0$ et $m_i'(1) = \lambda^{-1}(\pi(1) + m_i(1)) = 1$. De plus, $r(m_i') = r(m)$, car, si $f \in \mathcal{A}(X)$, on a

$$m_i'(f) = \lambda^{-1}(\pi(f) + m_i(f)) = \lambda^{-1}(\pi(f) + \mu(f)) = m(f) .$$

Mais m est extrémale dans M_m, donc

$$m = m_1' = m_2' ,$$

donc

$$\pi + m_1 = \pi + m_2 = \lambda m ,$$

et par suite $m_1 = m_2 = \mu$.

C. Q. F. D.

L'énoncé 3, 2°, sera démontré si on trouve un point extrémal de $M_{\varepsilon_{x_0}}$ qui soit une mesure maximale. Cela résulte du lemme suivant.

LEMME 5. - Soient F un e. l. c. s., K un convexe compact de F, P un cône convexe fermé et saillant définissant un ordre sur F (donc aussi sur K).

(a) Cet ordre est inductif sur K ;

(b) Si $A(K)$ est l'ensemble des points maximaux de K pour l'ordre induit, alors $A(K) \cap \mathcal{E}(K) \neq \emptyset$.

Démonstration. - Ce lemme est connu (voir PHELPS [2]). Nous ne donnerons qu'un plan de démonstration.

Pour (a), on utilise le fait suivant : pour toute famille x_α totalement ordonnée de K, les $(x_\alpha + P) \cap K$ sont des compacts non vides emboîtés.

Pour (b), on introduit la famille $\mathfrak{F}$ des faces croissantes de K, i. e. des parties fermées, non vides de K, telles que

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l}(x_1 + x_2)/2 \in F \\ x_1 \text{ et } x_2 \in K\end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 \text{ et } x_2 \in F ,$$

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{r}x_1 \geqslant x_0 \\ x_0 \in F \text{ et } x_1 \in K\end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 \in F .$$

On ordonne par inclusion, et on vérifie que $\mathfrak{F}$ est inductive vers le bas. Si F_0 est une face minimale de K, on montre que F_0 est réduite à un point x_0, et que $(x_0 + P) \cap K = \{x_0\}$. En outre, x_0 est extrémal dans K, donc $x_0 \in \mathfrak{E}(K) \cap \mathfrak{A}(K)$.

C. Q. F. D.

On applique alors le lemme au convexe compact M_{ε_x} et au cône

$$P = S^0 = \{\mu \in \mathfrak{M}(X) \mid \mu(f) \geqslant 0 , \ \forall f \text{ convexe continue}\} .$$

Ce cône définit l'ordre de Choquet sur $\mathfrak{M}(X)$, et, d'après le lemme 5, il existe un élément m à la fois extrémal et maximal dans M_{ε_x}. C'est évidemment une mesure maximale, et elle répond au problème posé.

LEMME 6. - Pour tout $p_0 > 1$, on peut trouver un convexe compact X et $\Phi_0 \in X$, barycentre d'une seule mesure maximale m, tels que, pour tout $p \geqslant p_0$, $\mathfrak{A}(X)$ soit non dense dans $L^p(m)$.

Démonstration. - Soient $I = (-1 , 1)$, et α une constante $\geqslant 0$,

$$H = \{f \in \mathcal{C}(I) ; \ \int_{-1}^{1} x|x|^{\alpha} \, dx = 0\} .$$

On voit facilement que H est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(I)$, qui contient les constantes et sépare les points, et que la frontière de Choquet de H est I tout entier (on voit facilement que, pour tout $x \in I$, il existe une fonction de H qui atteint son maximum strict en x). On pose enfin

$$X = H_1'^{+} = \{\ell \in H'^{+} ; \ \ell(1) = 1\} .$$

X, muni de la topologie $\sigma(H' , H)$, est un convexe compact. Soit $\delta : x \longmapsto \varepsilon_x$ de I dans X. Il est classique qu'on a alors $\mathfrak{E}(X) = \delta(I)$. Les mesures maximales ne sont autres que les mesures positives sur I.

Etudions d'abord $\mathfrak{A}(X)$: On sait que $H \oplus \underline{R}$ est dense dans $\mathfrak{A}(X)$, mais, comme $1 \in H$, on a $H \oplus \underline{R}|_X = H|_X$. D'autre part, si $f \in H$, on a

$$\sup_{\ell\in X} |\ell(f)| = \sup_{\ell\in\delta(I)} |\ell(f)| = \|f\|_\infty \ ,$$

donc $H|_X$ est un espace complet, et, par conséquent, il est fermé dans $\mathcal{A}(X)$. On a donc $\mathcal{A}(X) = H|_X$.

Etudions maintenant le point $\Phi_0 = r(\mu)$, où $\mu = (\alpha + 3)/2\ |x|^{\alpha+2}$. On identifie les mesures maximales sur X et les mesures positives sur I : Φ_0 est barycentre de la mesure maximale μ . Soit m une autre mesure maximale, de barycentre Φ_0 : $m - \mu$ est orthogonale au noyau de la forme linéaire $x|x|^\alpha\,dx$, donc

$$m = \mu + \lambda x|x|^\alpha\,dx = |x|^\alpha\,(((\alpha + 3)/2)x^2 + \lambda x)\,dx \ .$$

On voit immédiatement que :

Si $\lambda > 0$, m est < 0 sur un intervalle $]-\varepsilon\ ,\ 0[$;
Si $\lambda < 0$, m est < 0 sur un intervalle $]0\ ,\ \varepsilon[$.

Donc m ne peut être positive que si $\lambda = 0$.

$\mu = ((\alpha + 3)/2)|x|^{\alpha+2}$ <u>est la seule mesure maximale de barycentre</u> Φ_0 .

On pose alors $g(x) = 1/x$, pour tout $x \neq 0$ dans I . On a

$$\int_{-1}^{1}|g|^{p'}\,d\mu = (\alpha + 3)/2 \int dx/|x|^{p'-\alpha-2} < \infty \ , \qquad \text{pour } 1 \leqslant p' < \alpha + 3 \ .$$

D'autre part, g est orthogonale à $\mathcal{A}(X)$, car, si $f \in H$, on a

$$\int f.g\,d\mu = \int_{-1}^{1}(\alpha + 3)/2\ f(x)\ (|x|^{\alpha+2})/x\,dx = 0 \ .$$

Or, si p' est l'exposant conjugué de p , on a

$$p' < \alpha + 3 \iff p > (\alpha + 3)/(\alpha + 2) \ ,$$

donc

$$\forall\ p > (\alpha + 3)/(\alpha + 2) \ , \qquad \mathcal{A}(X) \ \underline{\text{est non dense dans}}\ L^p(\mu) \ .$$

Le lemme est démontré, car $(\alpha + 3)/(\alpha + 2)$ peut prendre toute valeur dans $]1\ ,\ 3/2]$.

<u>Remarque</u> 7. - Le problème $[\mathcal{P}_p]$ ne peut être résolu pour X qui est presque un simplexe, puisque H est de codimension 1 dans $\mathcal{C}(I)$, ou, de façon équivalente, si r désigne l'application résultante de $\mathcal{M}_1^+(I)$ sur X , $r^{-1}(x)$ est de dimension 1 au plus, car $r(\mu) = r(\nu) \implies (\mu - \nu)$ est orthogonale à H , donc $\mu - \nu = \lambda x|x|^\alpha\,dx$. De plus, X est métrisable (compact faible dans le dual d'un espace métrisable séparable), donc on ne pourra espérer des réponses plus favorables en se limitant aux convexes compacts métrisables.

THÉORÈME 8. - Il existe un convexe compact X et un point $\Phi_0 \in X$, tels que Φ_0 soit barycentre d'une seule mesure maximale m, et tels que $\mathcal{A}(X)$ soit non dense dans $L^p(m)$ dès que $p > 1$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $I_n = (-1, 1)$, et

$$H_n = \{f \in \mathcal{C}(I_n) \; ; \; \int_{-1}^{1} x^{2n-1} f(x)\, dx = 0\} \; .$$

Soit K le compactifié d'Aleksandrov de la somme topologique des I_n. On note ω le point à l'infini, et on pose

$$H_0 = \{f \in \mathcal{C}(K) \text{ telles que } f_n = f|_{I_n} \text{ soit dans } H_n \text{ et que } \lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = f(\omega) = 0\} \; .$$

Soit enfin $H = H_0 \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Il est clair que H_0 est fermé dans $\mathcal{C}(K)$, donc H est fermé et contient les constantes. On voit aisément que H sépare les points de K, et, qu'en tout point x de K, il existe une fonction de H qui atteint son maximum strict en x.

Posons $X = H_1'^{+}$. L'application $\delta : x \longmapsto \varepsilon_x$ de K dans X est injective continue, et on déduit de ce qui précède que $\delta(K) = \mathcal{E}(X)$. L'ensemble des mesures maximales sur X s'identifie donc à $\mathcal{M}_1^+(K)$. Comme dans le lemme 6, on montre que $\mathcal{A}(X) = H$.

Etudions maintenant $\Phi_0 = r(\mu)$, où $\mu = \sum_p \mu_p$, avec $1 \leqslant p < \infty$, et $\mu_p = (2p+1)/2^{p+1}\, x^{2p}\, dx$. Il est classique que toute $m \in \mathcal{M}_1^+(K)$ est de la forme

$$m = \sum_{p\geqslant 1} m_p + m(\omega)\, \varepsilon_\omega \; ,$$

avec

$$m_p \geqslant 0 \text{ sur } I_p \; , \quad m(\omega) \geqslant 0 \; , \quad \text{et} \quad \sum_{p\geqslant 1} \|m_p\| + m(\omega) = 1 \; .$$

Si en outre m admet Φ_0 pour barycentre, on a $m(f) = \mu(f)$ pour toute f dans H, donc en particulier $m_p(f) = \mu_p(f)$ pour f dans H_p. La démonstration du lemme 6 montre que $m_p = \mu_p$, et par conséquent $m(\omega) = 1 - \sum_{p\geqslant 1} \|\mu_p\| = 0$, donc

μ est la seule mesure maximale de barycentre Φ_0 .

Pour $p_0 > 1$, $\mathcal{A}(X)$ est non dense dans $L^{p_0}(\mu)$: En effet, soit n un entier tel que $(2n+1)/2n < p_0$, et soit $F \in L^{p_0}(\mu_n)$; alors $F.1_{I_n} \in L^{p_0}(\mu)$. En supposant que $\mathcal{A}(X)$ est dense dans $L^{p_0}(\mu)$, on peut trouver G dans H telle que $\int_K |G - F.1_{I_n}|^{p_0}\, d\mu < \varepsilon$, donc

$$\int_{I_n} |G_n - F|^{p_0} \, d\mu < \varepsilon \ .$$

Or $G_n \in H|_{I_n} = H_n$, donc H_n serait dense dans $L^{p_0}(\mu_n)$, ce qui contredit l'exemple construit au lemme 6. On a donc montré que

$$\forall\ p > 1 \ , \qquad \mathcal{A}(X) \ \underline{\text{est non dense dans}} \ L^p(\mu) \ .$$

THÉORÈME 9. - Il existe un convexe compact X et un $\Phi_0 \in X$, tels que :

1° Pour tout $p \geqslant 1$, il existe, dans $M_{\varepsilon_{x_0}}$, une mesure maximale m_p telle que $\mathcal{A}(X)$ soit dense dans $L^p(m_p)$;

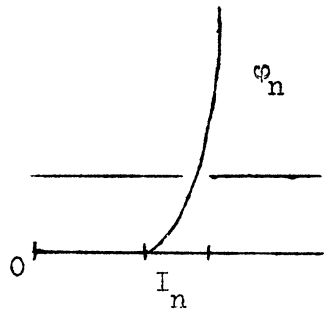
2° Il n'existe aucune mesure maximale, dans $M_{\varepsilon_{x_0}}$, telle que $\mathcal{A}(X)$ soit dense dans $L^p(m)$ pour tout $p \geqslant 1$.

Nous ne donnerons qu'un plan de démonstration. On note $I_n = [1/(n+1) \ , \ 1/n]$, et K le compactifié d'Aleksandrov de la somme topologique des I_n . 0 désignera le point à l'infini, et dx la mesure sur K dont la restriction à chaque I_n est la mesure de Lebesgue. On construit alors une suite φ_n de fonctions mesurables sur K telles que :

(1) $\varphi_n > 0$ presque-partout sur K , et $\varphi_n \equiv 1$ sur I_p , $p \neq n$;

(2) $\int_K \varphi_n \, dx = 1$, et $\int_K (1 - x)\varphi_n \, dx = 1/2$;

(3) Pour tout $p' > 1$, $\int_K \varphi_n^{p'} \, dx = +\infty$.

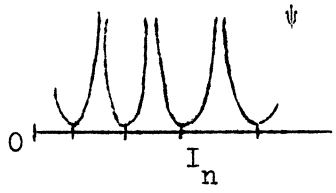


On construit de même ψ vérifiant :

(1') $\psi > 0$ presque-partout (dx) ;

(2') $\int_K \psi \, dx = 1$, $\int_K (1 - x)\psi \, dx = 1/2$;

(3') $\int_K |(\psi - 1)/\psi|^{5/4} \, \psi \, dx < +\infty$, et $\int_K |\psi - 1|^{5/4} \, dx < +\infty$.



Soit

$$H = \{f \in \mathcal{C}(K) \ ; \ \int f \varphi_n \, dx = \int f \psi \, dx = \int f \, dx \ , \ \forall\ n \geqslant 1\} \ .$$

H est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K)$, qui contient les constantes et sépare les points. On montre que la frontière de Choquet de H est K tout entier. On pose alors $X = H_1'^{+}$, et on note δ l'application $x \longmapsto \varepsilon_x$ de K dans X .

Avec ces notations, on a $\mathcal{A}(X) = H$ et $\mathcal{E}(X) = \delta(K)$. On prend $\Phi_0 = r(dx)$. Pour démontrer le théorème, on étudie ceux des points extrémaux de $M_{\varepsilon_{\Phi_0}}$ qui sont des

mesures maximales, et on voit que ce sont les mesures $m \in \mathcal{M}_1^+(K)$ de la forme

$$m = [\sum_{p \in S} (\varphi_p - 1) + 1]\, dx \ , \quad \text{où} \quad S \subset \underline{\mathbb{N}} \ , \quad \text{et} \quad n = \psi\, dx \ .$$

Pour chacune d'elles, on trouve facilement un indice $p' > 1$, et une fonction $g \in L^{p'}(m)$ orthogonale à $\mathcal{A}(X)$, donc l'assertion 2° est démontrée.

Pour montrer le 1°, on étudie $m_n = \varphi_n\, dx$, et on montre, en étudiant les fonctions orthogonales à $\mathcal{A}(X)$, que $\mathcal{A}(X)$ est dense dans $L^p(m_n)$ pour $p < 2n - 1$.

2. Etude des cas favorables.

Soient S un simplexe, x_0 un point de $\mathcal{E}(S)$, et $E = \mathcal{A}_{x_0}(S)$ l'espace des fonctions affines continues sur S , nulles en x_0 . On sait, d'après ROGALSKI [3], que S est affinement isomorphe à $K = \{\ell \in E'_+ \ ; \ \|\ell\| \leqslant 1\}$.

THÉORÈME 10. - *Soit S un simplexe tel que toute mesure maximale soit intérieurement portée par $\mathcal{E}(S)$. Le problème $[\mathcal{P}]$ est alors positivement résolu pour $X = \mathrm{conv}(K \cup -K)$.*

D'après la caractérisation donnée par ROGALSKI [3], E est un espace simplicial, donc E'^+ est un L-espace de Kakutani.

Etudions d'abord $\mathcal{E}(X)$: Si on note $L(K)$ l'ensemble des points de K qui sont de norme 1 , et $\mathcal{E}(E'^+)$ l'ensemble des génératrices extrémales de E'^+ , il est classique que

$$\mathcal{E}(K) = L(K) \cap \mathcal{E}(E'^+) \cup \{0\} \ .$$

On vérifie aisément que X est la boule unité de E'^+ , et que

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(K) \cup \mathcal{E}(-K) - \{0\} \ .$$

Ce sont donc les points de la sphère qui sont sur les génératrices extrémales de E'^+ et leurs symétriques.

$\mathcal{A}(X)$ s'identifie à $E \oplus \underline{\mathbb{R}}|_X$, car E est un espace de Banach. Pour toute $f \in E$, on notera φ_f la forme linéaire sur E' : $\ell \longmapsto \ell(f)$. La démonstration repose sur deux remarques :

1° Soient ℓ_1 et $\ell_2 \in L(K)$ telles que $\inf(\ell_1 , \ell_2) = 0$. Si μ_{ℓ_1} et μ_{ℓ_2} sont les mesures maximales sur K de barycentres ℓ_1 et ℓ_2 , on a alors $\inf(\mu_{\ell_1} , \mu_{\ell_2}) = 0$. En effet, le cône des mesures maximales M est en bijection affine avec le cône $\widetilde{K} = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda(K \times 1)$ par l'application $\mu_\ell \longmapsto (\ell , \|\ell\|)$. Il suffit donc de montrer que $(\ell_1 , 1)$ et $(\ell_2 , 1)$ sont étrangers. Or il résulte d'un calcul facile (voir PHELPS [2]) que

$$\inf[(\ell_1 , 1) ; (\ell_2 , 1)] = (\inf(\ell_1 , \ell_2) , \inf(1 - \|\ell_1\| , 1 - \|\ell_2\|)) = (0 , 0) .$$

2° Si $\ell \in L(K)$, la mesure maximale μ_ℓ est portée par $\mathcal{E}(K) - \{0\}$. En effet, il résulte de l'hypothèse qu'elle est portée par $\mathcal{E}(K)$. Si elle n'est pas portée par $\mathcal{E}(K) - \{0\}$, il existe un entier n tel que, si on pose $K_n = (1 - (1/n))K$, alors $0 < \mu_\ell(K_n) = \alpha < 1$. Posons alors $\nu_1 = 1/\alpha \; \mu_\ell|_{K_n}$, $\nu_2 = (1 - \alpha)^{-1} \; \mu_\ell|_{\complement K_n}$; on a $\mu = \alpha\nu_1 + (1 - \alpha)\nu_2$, donc

$$r(\mu) = \ell = \alpha \; r(\nu_1) + (1 - \alpha) \; r(\nu_2) .$$

On en déduit, puisque $r(\nu_1) \in K_n$, que $\|\ell\| < 1$, ce qui est impossible, car $\ell \in L(K)$.

Choisissons maintenant ℓ_0 dans X :

$$\ell_0 = \ell_0^+ - \ell_0^- \qquad \text{et} \qquad \|\ell_0\| = \|\ell_0^+\| + \|\ell_0^-\| = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

<u>1er cas</u> : Supposons que $\|\ell_0\| = 1$. On peut écrire

$$\ell_0 = \alpha_1 \ell_1 - \alpha_2 \ell_2 , \qquad \text{avec} \begin{cases} \ell_1 = \ell_0^+/\|\ell_0^+\| , & \text{si } \ell_0^+ \neq 0 , \\ \ell_1 = 0 , & \text{si } \ell_0^+ = 0 , \\ \ell_2 = \ell_0^-/\|\ell_0^-\| , & \text{si } \ell_0^- \neq 0 , \\ \ell_2 = 0 , & \text{si } \ell_0^- = 0 . \end{cases}$$

On définit m sur X par

$$\int_X F(\ell) \; dm(\ell) = \alpha_1 \int_K F(\ell) \; d\mu_1(\ell) + \alpha_2 \int_K F(-\ell) \; d\mu_2(\ell) .$$

On vérifie aisément que m est positive, de masse 1 , portée par $\mathcal{E}(X)$, donc maximale et de barycentre ℓ_0 , car, si $F = \varphi_f$, on a

$$\int_X \varphi_f(\ell) \; dm(\ell) = \alpha_1 \ell_1(f) - \alpha_2 \ell_2(f) = \ell_0(f) = \varphi_f(\ell_0) .$$

Pour montrer la densité de $\mathcal{A}(X)$ dans $L^p(m)$, on se donne $F \in C(X)$. μ_{ℓ_1} et μ_{ℓ_2} étant étrangères, il existe deux boréliens disjoints qu'on peut prendre K_σ , contenus dans $\mathcal{E}(K)$ et qui portent $\alpha_1 \mu_{\ell_1}$ et $\alpha_2 \mu_{\ell_2}$, d'après la remarque 2. Soient $B_1 = \bigcup_n B_{1n}$ et $B_2 = \bigcup_n B_{2n}$ ces deux boréliens. On peut, puisque K est un simplexe et que $\{0\} \cup B_{1n} \cup B_{2n}$ est un compact de $\mathcal{E}(K)$, trouver une fonction F_n affine continue sur K , telle que

$$\begin{cases} F_n(\ell) = F(\ell) \ , \ \text{si} \ \ \ell \in B_{1n} \ , \\ F_n(\ell) = -\, F(-\,\ell) \ , \ \text{si} \ \ \ell \in B_{2n} \ , \\ F_n(0) = 0 \ \ \text{et} \ \ \|F_n\| \leqslant \|F\| \ . \end{cases}$$

F_n se prolonge en une fonction affine continue sur X et de même norme. On a

$$\int_X |F - \widetilde{F}_n|^p \, dm \leqslant 2^p \, \|F\|^p \, [\alpha_1 \, \mu_{\ell_1}(K - B_{1n}) + \alpha_2 \, \mu_{\ell_2}(K - B_{2n})] \ ,$$

donc la suite $\widetilde{F}_n$ tend vers F dans $L^p(m)$.

2e cas : Si $0 < \alpha_1 + \alpha_2 = \|\ell_0\| < 1$, on peut supposer par exemple $\ell_1 \neq 0$, donc $B_{11} \neq \emptyset$. Fixons e dans B_{11} , et posons

$$\int_X F(\ell) \, dm(\ell) = \alpha_1 \int_K F(\ell) \, d\mu_{\ell_1}(\ell) + \alpha_2 \int_K F(-\,\ell) \, d\mu_{\ell_2}(\ell) + ((1 - \|\ell_0\|)/2)(F(e) + F(-\,e)) \ .$$

On vérifie aisément que m est maximale de barycentre ℓ_0 , et, pour montrer la densité de $\mathcal{A}(X)$ dans $L^p(m)$, on se donne $F \in C(X)$. On peut remplacer F par $G = F - ((F(e) + F(-\,e))/2)$. On a alors $G(e) = -\, G(-\,e)$. D'après le 1er cas, on peut trouver $\widetilde{F}_n$ dans $\mathcal{A}_0(X)$ telle que

$$\int_K |G(\ell) - \widetilde{F}_n(\ell)|^p \, d\mu_1(\ell) \to 0 \ ,$$

$$\int_K |G(-\,\ell) - \widetilde{F}_n(-\,\ell)|^p \, d\mu_2(\ell) \to 0 \ ,$$

et comme $e \in B_{11}$, on a $\widetilde{F}_n(e) = G(e)$ pour $n \geqslant 1$, donc

$$\widetilde{F}_n(-\,e) = -\, \widetilde{F}_n(e) = -\, G(e) = G(-\,e) \ .$$

On déduit de là, que la suite $\widetilde{F}_n$ tend vers F dans $L^p(m)$.

3e cas : $\ell = 0$. Ce cas se traîte aisément, en posant $m = (1/2)(\varepsilon_e + \varepsilon_{-e})$ où $e \in \mathcal{E}(K)$.

COROLLAIRE 11. - Le problème [P] est positivement résolu, lorsque X est la boule unité du dual d'un M-espace E . En particulier, pour la boule unité de $\mathcal{M}^0(Y)$, espace des mesures bornées sur un espace localement compact Y , et pour la boule unité de $\mathcal{M}(Y)$, espace des mesures sur un compact Y .

En effet, on applique le théorème à $S = K = \{\ell \in E'^+ \ ; \ \|\ell\| \leqslant 1\}$. On sait que S est un simplexe, car E'^+ est réticulé. Toute mesure maximale est portée par $\mathcal{E}(K)$, car, si $\ell \in K$, on écrit $\ell = \|\ell\| \, \ell/\|\ell\| + (1 - \|\ell\|)0 = \|\ell\| \, \ell_1 + (1 - \|\ell\|)0$,

donc $\mu_\ell = \|\ell\| \mu_{\ell_1} + (1 - \|\ell\|)\varepsilon_0$. Or, en raisonnant comme dans la remarque 2, on montre que μ_{ℓ_1} est portée par $\mathcal{E}(K) - \{0\}$, donc μ_ℓ est portée par $\mathcal{E}(K)$. On vérifie aisément que $X = \text{conv}(K \cup -K)$ est la boule unité de E' ; on peut donc appliquer le théorème.

Signalons un cas simple où on sait résoudre [$\mathcal{P}$].

THÉORÈME 12. - Soit X la boule unité du dual d'un espace de Banach, telle que tout point de la sphère unité soit extrémal. Le problème [$\mathcal{P}$] est positivement résolu pour X .

En effet, si $x_0 \in X$, on l'écrit (si $x_0 \neq 0$)

$$x_0 = ((1 + \|x_0\|)/2)(x_0/\|x_0\|) + ((1 - \|x_0\|)/2)(-x_0/\|x_0\|) = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 ,$$

et on pose $m = \alpha\varepsilon_{x_1} + (1 - \alpha)\varepsilon_{x_2}$. Il est alors immédiat que m résout le problème [$\mathcal{P}$]. Le cas $x_0 = 0$ se traîte de façon analogue.

COROLLAIRE 13. - Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact, et soit p tel que $1 < p < \infty$; le problème [$\mathcal{P}$] est positivement résolu pour la boule unité de $L^p(\mu)$.

Nous allons maintenant étudier le cas du dual d'un L-espace.

THÉORÈME 14. - Si B est la boule unité du dual d'un L-espace de Kakutani E , le problème [$\mathcal{P}$] est positivement résolu pour B .

On sait que le dual de E est un M-espace possédant un élément unité, et qu'il est isomorphe pour l'ordre et isométrique à l'espace $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur son spectre X qui est un compact stonien. On démontre, dans KELLEY [1], que E est isomorphe au sous-espace des mesures sur X qui sont nulles sur tout borélien maigre. Nous appellerons "mesure normale" sur X une telle mesure.

Etudions d'abord $\mathcal{E}(B)$: On vérifie aisément que $\mathcal{E}(B)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(X)$ telles que $f^2 = 1$, donc

$$\mathcal{E}(B) = \{f \in \mathcal{C}(X) \ ; \ f = 1_U - 1_{\complement U} \ , \ U \text{ ouvert et fermé de } X\} .$$

E étant un espace de Banach, $\mathcal{A}(B)$ s'identifie avec $E \oplus \underset{\sim}{R}|_B$. On considère E comme sous-espace de $\mathcal{M}(X)$, pour toute mesure ν normale sur X ; nous noterons φ_ν la forme linéaire sur E' définie par $\varphi_\nu(f) = \nu(f)$.

Fixons maintenant $f_0 \in B$. Nous allons construire une application de $(-1 , 1)$

dans $\mathcal{E}(B)$, ce qui nous permettra d'exhiber la mesure maximale résolvant le problème [$\mathcal{P}$] pour f_0 . Pour tout $y \in]-1, 1]$, on pose

$$U'_y = \{x \in X ; \ f_0(x) > y\} \qquad \text{et} \qquad U_y = \overline{U'_y} \ .$$

On définit alors e_y par $e_y(x) = 1\!\!1_{U_y} - 1\!\!1_{\complement U_y}$. L'essentiel de la démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME 15. - Soit $F \in \mathcal{C}(B)$; l'application $y \longmapsto F(e_y)$ de $]-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est continue à droite. Elle est limite presque-partout pour la mesure de Lebesgue d'une suite $\widetilde{F}_n$ de fonctions étagées, de norme $\leqslant \|F\|$, et combinaisons linéaires de 1 et $1\!\!1_{]-1, f_0(a)]}$, où a parcourt l'ensemble des points de X qui sont dans le support d'une mesure normale.

Démonstration. - Il suffit de montrer que $y \longmapsto e_y$ est continue à droite, pour avoir la première assertion. Or, si y_n est une suite décroissante vers y , on a :

1° Pour $x \in X$ tel que $f_0(x) > y$, alors $f_0(x) > y_n$ pour n assez grand.

2° Pour $x \in X$ tel que $f_0(x) \leqslant y$, alors $f_0(x) \leqslant y_n$, donc $e_{y_n}(x)$ tend vers $e_y(x)$ pour tout $x \in U'_y \cup \complement U_y$, et par suite sur le complémentaire d'un ensemble rare. La suite étant bornée, on en déduit, d'après le théorème de Lebesgue, que $\nu(e_{y_n})$ tend vers $\nu(e_y)$ pour toute ν normale. $y \longmapsto F(e_y)$ est donc continue à droite.

Soit $]\alpha , \beta] \subset]-1 , 1]$ le plus petit intervalle contenant l'image $f_0(X)$ de f_0 . Pour tout $y_0 \in]-1 , \beta[$, on peut trouver $h > 0$ tel que l'oscillation de $F \circ e_y$ dans $]y_0 , y_0 + h[$ soit $< \varepsilon = 1/n$. On peut supposer que $y_0 + h$ est dans l'image de f_0 , car, sinon, $y_0 + h \in]f_0(a_1) , f_0(a_2)[$. Or $F \circ e_y$ est constante dans un tel intervalle. Donc, pour tout $y_0 \in]-1 , \beta[$, il existe $a_0 \in X$ tel que l'oscillation de $F \circ e_y$ soit inférieure à ε dans $]y_0 , f_0(a_0)[$. On vérifie aisément qu'on peut recouvrir $]-1 , \beta - (1/n)]$ par une infinité dénombrable de tels intervalles, de manière à réaliser

$$-1 = y_0 < y_1 \leqslant f_0(a_0) < y_2 \leqslant f_0(a_1) < y_3 \leqslant f_0(a_2) < \ldots < f_0(a_p) < \ldots \ .$$

On pose

$$F_n(y) = F(e_{-1}) 1\!\!1_{]-1, f_0(a_0)[} + \sum_i F(e_{f_0(a_i)}) 1\!\!1_{]f_0(a_i), f_0(a_{i+1})[} + F(e_1) 1\!\!1_{]\beta, 1]} \ ,$$

avec $0 \leqslant i < \infty$.

On vérifie que $\|F_n - F\| < \varepsilon$. Pour avoir le lemme, il faut montrer qu'on peut choisir a_i dans le support d'une mesure normale. Or la réunion de ces supports est partout dense dans X , car, dans le cas contraire, on pourrait construire

$f \in C(X) = E'$ telle que $f \neq 0$ et $\nu(f) = 0$, $\forall\ \nu$ normale. Ceci est impossible, car $\sigma(E'\ E)$ est séparée. On peut donc, dans F_n , remplacer a_i par a_i' , contenu dans le support d'une mesure normale et tel que $|f_0(a_i) - f_0(a_i')| < \varepsilon/2^i$. La suite G_n vérifie encore $|G_n - G| < \varepsilon = 1/n$ sur le complémentaire d'un ensemble de mesure $\leqslant 2/n$.

Le lemme est donc démontré, et on peut maintenant poser, puisque $F \circ e_y$ est mesurable,

$$\int_B F(f)\ dm(f) = 1/2 \int_{-1}^{1} F(e_y)\ dy\ , \qquad \forall\ F \in C(B)\ .$$

m est positive de masse 1 , portée par $\mathcal{E}(B)$, donc maximale. Son barycentre est f_0 , car, si on prend $F = \varphi_\nu$, on a

$$\int_B \varphi_\nu(f)\ dm(f) = 1/2 \int_{-1}^{1} dy \int_X e_y(x)\ d\nu(x)\ .$$

La définition montre immédiatement que $e_y = \mathbb{1}_{f_0 > y} - \mathbb{1}_{f_0 \leqslant y}$, sauf sur un ensemble rare, donc ν négligeable. On en tire

$$\int_B \varphi_\nu(f)\ dm(f) = 1/2 \int_{-1}^{1} dy \int_X (\mathbb{1}_{f_0 > y}(x) - \mathbb{1}_{f_0 \leqslant y}(x))\ d\nu(x)\ .$$

Or l'application $(x\ ,\ y) \longmapsto \mathbb{1}_{f_0 > y}(x) - \mathbb{1}_{f_0 \leqslant y}(x)$ est mesurable pour $d\nu \otimes dy$, donc on peut appliquer Fubini, ce qui donne

$$\int_B \varphi_\nu(f)\ dm(f) = 1/2 \int_X d\nu(x) \left(\int_{f_0(x) > y} dy - \int_{f_0(x) \leqslant y} dy\right)$$

$$= 1/2 \int_X 2 f_0(x)\ d\nu(x) = \varphi_\nu(f_0)\ .$$

Il reste à montrer la densité de $\mathcal{A}(B)$ dans $L^p(m)$. D'après le lemme 15, il suffit de se donner a dans le support d'une mesure normale ν sur X , et de montrer que la fonction $\mathbb{1}_{(-1, f_0(a)(}$ est limite dans $L^p(dy)$ d'une suite de fonctions de la forme $g_n(y) = \varphi_{\nu_n}(e_y) + \lambda_n$. On définit une fonction sur X par

$$h_n(x) = \tfrac{1}{2}\, \mathbb{1}_{|f_0 - f_0(a)| < 1/n} / (\nu(\{|f_0 - f_0(a)| < 1/n\}))\ .$$

Le dénominateur est $\neq 0$, car c'est la mesure d'un voisinage de a . On vérifie aisément que $\nu_n = h_n \cdot \nu$ est une mesure normale, et que

$$(y < f_0(a) - (1/n)) \implies (\varphi_{\nu_n}(e_y) = -(1/2))\ ,$$

$$(y > f_0(a) + (1/n)) \implies (\varphi_{\nu_n}(e_y) = (1/2)) \ ,$$

$$|y - f_0(a)| \leqslant (1/n) \implies |\varphi_{\nu_n}(e_y)| \leqslant (1/2) \ .$$

On pose alors

$$\lambda_n = 1/2 \qquad \text{et} \qquad g_n(y) = - \varphi_{\nu_n}(e_y) + \lambda_n \ .$$

g_n est une suite bornée qui tend presque partout vers $\mathbb{1}_{(-1,f_0(a))}$, donc aussi dans $L^p(dy)$. Le théorème est donc démontré.

COROLLAIRE 16. - Soit μ une mesure positive telle que $L^\infty(\mu) = (L^1(\mu))'$. Le problème [P] est positivement résolu pour la boule unité de L^∞ .

En effet, X est la boule unité du dual de $L^1(\mu)$ qui est un L-espace.

COROLLAIRE 17. - Soit I un ensemble d'indices ; $X = [-1 , 1]^I$, muni de la topologie produit, est un convexe compact pour lequel le problème [P] est positivement résolu.

On munit I de la topologie discrète, et on définit μ pour $\mu\{i\} = 1$ pour tout $i \in I$. X est en bijection avec la boule unité de $L^\infty(\mu)$, et la topologie produit est moins fine que la topologie $\sigma(L^\infty , L^1)$; comme elle est séparée, elles sont identiques, et le théorème s'applique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KELLEY (J. L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1963 (University Series in higher Mathematics).

[2] PHELPS (Robert R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

[3] ROGALSKI (Marc). - Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 5e année, 1965/66, n° 12, 62 p.

(Texte reçu le 26 juin 1971)

Michèle CAPON
E. N. S. J. F.
48 boulevard Jourdan
75 - PARIS 14