Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Pierre Ferrier
Nessim Sibony

Approximation polynomiale pondérée sur une sous-variété totalement réelle de $\mathbb{C}n$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 2 (1970-1971), exp. nº 22, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 22, 9 p.

27 mai 1971

APPROXIMATION POLYNOMIALE PONDÉRÉE SUR UNE SOUS-VARIÉTÉ TOTALEMENT RÉELLE DE $\mathbb{C}^n$

par Jean-Pierre FERRIER et Nessim SIBONY

1. Introduction et notations.

Soient K un compact de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{C}(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K, munie de la topologie de la convergence uniforme. Un problème classique est celui de l'approximation des fonctions de $\mathcal{C}(K)$ par des fonctions holomorphes au voisinage de K, ou encore par des polynômes. Désignons par $H(K)$ l'adhérence dans $\mathcal{C}(K)$ des fonctions holomorphes au voisinage de K, et par $P(K)$ l'adhérence de l'espace des polynômes. Lorsque K est un compact de $\mathbb{C}$, et $K^0 = \emptyset$, un théorème de Mergel'jan permet d'affirmer que $H(K) = \mathcal{C}(K)$ si CK a un nombre fini de composantes connexes, lorsque CK est connexe, on a $P(K) = \mathcal{C}(K)$.

Lorsque K est un compact de $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, la situation est moins simple ; cependant, HÖRMANDER et WERMER ont démontré, dans [3], un théorème d'approximation lorsque K est porté par une sous-variété totalement réelle.

Plus précisément, soit Σ une sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$ de dimension réelle k, pour x dans Σ, désignons par T_x l'espace tangent à Σ en x ; on appelle droite complexe tangente à Σ en x un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de dimension complexe 1 contenu dans T_x.

Si, en tout point, Σ n'a pas de droite complexe tangente, on dit que Σ est totalement réelle, ce qui suppose que $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma \leq n$.

Exemples. - Une sous-variété de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$; une courbe de $\mathbb{C}^n$, i. e. une sous-variété de dimension 1 ; la frontière distinguée d'un polydisque.

Dans $\mathbb{C}^2$, considérons la variété $\Sigma = \{z \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, avec $z_2 = 0\}$. Σ n'a de droites complexes tangentes qu'aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

Etant donné un compact K de $\mathbb{C}^n$, on dit qu'il est polynomialement convexe si, pour tout z n'appartenant pas à K, il existe un polynôme p tel que

$$|p(z)| > \sup_{\zeta \in K} |p(\zeta)| .$$

HÖRMANDER et WERMER ont démontré le théorème suivant [4].

THÉORÈME 1. - *Soit K un compact polynomialement convexe contenu dans une variété Σ totalement réelle de $\mathbb{C}^n$, alors $P(K) = \mathcal{C}(K)$.*

Nous nous proposons, en utilisant les techniques de HÖRMANDER-WERMER, d'étudier le problème d'approximation sur Σ de fonctions continues, ayant une certaine croissance, par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ, puis par des polynômes.

2. Position du problème.

Soient Ω un domaine d'holomorphie dans $\underset{\sim}{C}^n$, et Σ une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ totalement réelle de Ω ; soit δ une fonction lipschitzienne positive de rapport 1 dans $\underset{\sim}{C}^n$ telle que $\Omega = \{z \mid z \in \underset{\sim}{C}^n ,\ \delta(z) > 0\}$. On suppose, de plus, que

$$\delta \leq \delta_0 \ , \text{ où } \ \delta_0(z) = (1 + (z)^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \lim \delta(x) = 0$$

lorsque x tend vers l'infini dans le compactifié d'Aleksandrov de Σ, et enfin que $-\log \delta$ est p. s. h. dans Ω.

Désignons par $\mathcal{C}(k , \delta)$ l'espace des fonctions continues sur Σ telles que

$$\|f\|_k = \sup_{x\in\Sigma} \delta^k(x)\ |f(x)| < \infty ,$$

et par $\mathcal{C}_\delta(\Sigma)$ la réunion des $\mathcal{C}(k , \delta)$ lorsque k parcourt les entiers positifs.

Définition 2. - On dira qu'un espace H de fonctions est dense dans $\mathcal{C}_\delta(\Sigma)$ s'il existe un entier γ tel que, pour tout k entier positif, $\mathcal{C}(k , \delta)$ est dans l'adhérence de H pour la topologie de $\mathcal{C}(\gamma k , \delta)$.

Autrement dit, pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(k , \delta)$, il existe une suite f_p dans H telle que $\|f - f_p\|_{\gamma k}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, γ étant indépendant de k et de f.

Remarque. - Lorsque, pour tout k, $\sup_{z\in\Omega} \delta(z)\ \delta_0^{-k}(z) < \infty$, et que H est l'espace des polynômes, dire que H est dense dans $\mathcal{C}_\delta(\Sigma)$ équivaut à dire que le poids de δ_Σ^γ est fondamental au sens de BERNSTEIN sur Σ (δ_Σ désigne la restriction de δ à Σ). En effet, on peut approcher les fonctions continues sur Σ à croissance polynomiale pour la norme $\|f\| = \sup_{x\in\Sigma} \delta_\Sigma^\gamma(x)\ |f(x)|$.

Pour traiter ce problème d'approximation, nous aurons besoin du théorème suivant, dû à HÖRMANDER [1]. On reprend les notations de l'exposé précédent.

3. Théorèmes.

THÉORÈME 3. - *Soient Ω un domaine d'holomorphie dans $\underset{\sim}{C}^n$, Φ une fonction p. s. h. dans Ω, et g une forme différentielle de type $(0 , 1)$ à coefficients dans $L^2_{loc}(\Omega)$ telle que $\overline{\partial} g = 0$ et $\int_\Omega |g|^2 \exp(-\Phi)\, d\lambda(z) < \infty$. Alors il existe* f dans $L^2_{loc}(\Omega)$ avec $\overline{\partial} f = g$ et

$$\int_\Omega |f|^2 \exp(-\Phi)\ \delta_0^4\ d\lambda(z) \leq \int_\Omega \exp(-\Phi)\ |g|^2\ d\lambda(z) ,$$

où $|g|^2 = \sum_i |g_i|^2$ *si* $g = \sum_i g_i\ \overline{dz}_i$, *avec* $1 \leq i \leq n$.

$H(U)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans l'ouvert U, $d(z, \Sigma)$ la distance du point z à la variété Σ, et enfin

$$T_\alpha = \{z \mid z \in \Omega \text{ tels que } d(z, \Sigma) < \alpha\} .$$

THÉORÈME 4. - Supposons que $d^2(z, \Sigma)$ soit p. s. h. dans T_{α_0}, alors $H(T_{\alpha_0})$ est dense dans $C_\delta(\Sigma)$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de quelques lemmes.

LEMME 5. - Les fonctions C^∞ à support compact dans Σ sont denses dans $C_\delta(\Sigma)$.

Démonstration. - Soit (K_j) une suite exhaustive de compacts de Σ avec $K_j \subset \overset{0}{K}_{j+1}$, et soit Φ_j dans $C^\infty(\Sigma)$, $0 \leq \Phi_j \leq 1$, valant 1 dans un voisinage de K_j et à support dans K_{j+1}.

Pour f dans $C(k, \delta)$, on a

$$\delta_\Sigma^{k+1} |\Phi_j f - f| = \delta_\Sigma^k |f| (1 - \Phi_j) \delta_\Sigma \leq M (1 - \Phi_j) \delta_\Sigma$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini (hypothèse sur δ_Σ).

Donc on peut approcher f dans $C(k+1, \delta)$ par des fonctions à support compact.

Soit alors g à support compact dans Σ, vérifiant $\delta_\Sigma^{k+1} |g| \leq 1$, on peut la prolonger en une fonction $\tilde{g}$ à support compact dans Ω, vérifiant $\delta^{k+1} |\tilde{g}| \leq 1$; en effet, soit g_1 un prolongement de g à support compact dans Ω, on peut toujours supposer g réelle ; posons alors

$$\tilde{g}(z) = \inf(\delta^{-(k+1)}, g_1(z)) \quad \text{lorsque} \quad g_1(z) \geq 0$$

et

$$\tilde{g}(z) = \sup(-\delta^{-(k+1)}, g_1(z)) \quad \text{lorsque} \quad g_1(z) \leq 0 ,$$

on a bien: $\tilde{g}$ est à support compact et $|\tilde{g}| \delta^{k+1} \leq 1$.

ρ étant une fonction ≥ 0 C^∞, à support compact dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$, avec $\int \rho(z) \, d\lambda(z) = 1$; notons $\rho_\varepsilon(z) = \lambda(z/\varepsilon)$ et $\tilde{g}_\varepsilon = \tilde{g} * \alpha_\varepsilon$, pour ε assez petit, $\tilde{g}_\varepsilon$ est à support compact dans Ω, $\tilde{g}_\varepsilon$ est C^∞, et converge uniformément dans Ω vers g, d'où, en prenant les restricitions des $\tilde{g}_\varepsilon$ à Σ, on obtient le lemme.

LEMME 6. - Soit g une fonction C^∞ à support compact dans Ω, il existe un prolongement G de g/Σ, avec G à support compact dans Ω et

$$|\partial G / \partial \overline{z_j}| \leq C \, d(z, \Sigma)^N .$$

Ce lemme est dû à HÖRMANDER-WERMER [4].

Démonstration. - On fait d'abord le prolongement localement. Soit $x_0 \in \Sigma$, il existe un voisinage de x_0, $V(x_0)$, dans $\underset{\sim}{C}^n$, et des fonctions $\rho_1, \dots, \rho_m$ C^∞, définies dans $V(x_0)$, telles que

$$\Sigma \cap V(x_0) = \{x \mid x \in V(x_0) , \ \rho_1(x) = \dots = \rho_m(x) = 0\} .$$

Il existe un voisinage $V_1(x_0) \subset V(x_0)$ et des entiers $\nu_1, \dots, \nu_n$, tels que $(\partial\rho_{\nu_j}/\partial\overline{z}_1, \dots, \partial\rho_{\nu_j}/\partial\overline{z}_n)_x$, $j = 1, \dots, n$, forment une base de $\underset{\sim}{C}^n$ pour tout x dans $V_1(x_0)$.

En effet, posons $\xi_\nu = (\partial\rho_\nu/\partial\overline{z}_1, \dots, \partial\rho_\nu/\partial\overline{z}_n)_{x_0}$, $\nu = 1, \dots, m$, si $\xi_1, \dots, \xi_m$ n'engendraient pas $\underset{\sim}{C}^n$, il existerait $C = (C_1, \dots, C_m) \neq 0$ avec $(C, \xi_\nu) = 0$ pour tout ν, et par suite $\sum_j C_j \, \partial/\partial\overline{z}_j$, $1 \leq j \leq n$, serait un vecteur tangent à Σ en x_0, ce qui signifierait que Σ a une droite complexe tangente en x_0. On peut donc supposer que $\rho_1, \dots \rho_n$ sont tels que

$$(\partial\rho_i/\partial\overline{z}_1 , \dots , \partial\rho_i/\partial\overline{z}_n) , \quad i = 1 , \dots , n ,$$

définissent une base de $\underset{\sim}{C}^n$ dans un voisinage $V_1(x_0)$.

On a donc $(\partial g/\partial\overline{z}_1, \dots, \partial g/\partial\overline{z}_n)(x) = \sum_i h_i(x)(\partial\rho_i/\partial\overline{z}_1, \dots, \partial\rho_i/\partial\overline{z}_n)(x)$ pour $x \in V_1$, avec $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire $\overline{\partial}g = \sum_i h_i \, \overline{\partial}\rho_i$ avec $h_i \in C^\infty(V_1)$, $1 \leq i \leq m$.

Si on pose $g_1 = g - \sum_i h_i \, \rho_i$, $1 \leq i \leq n$, on a $g_1 = g$ sur Σ et

$$\overline{\partial}g_1 = \overline{\partial}g - \sum_i h_i \, \overline{\partial}\rho_i - \sum_i \overline{\partial}h_i \, \rho_\nu = - \sum_i (\overline{\partial}h_i) \, \rho_i , \quad 1 \leq i \leq n ,$$

de même $\overline{\partial}h_i = \sum_j h_{ij} \, \overline{\partial}\rho_j$, $1 \leq j \leq n$, et

$$g_2 = g_1 + \sum_{i,j} h_{ij} \, \rho_i \, \rho_j , \quad \overline{\partial}g_2 = 1/2! \sum_{i,j} \overline{\partial}h_{ij} \, \rho_i \, \rho_j , \quad g_2/\Sigma = g/\Sigma .$$

On définit ainsi, par récurrence, pour un multi-indice I, h_I dans V_1,

$$\overline{\partial}h_I = \sum_j h_{I,j} \, \overline{\partial}\rho_j , \quad 1 \leq j \leq n ,$$

ce qui définit les $h_{I,j}$, et

$$g_N = g_{N-1} + ((-1)^N/N!) \sum_{|I|=N} h_I \, \rho_I ,$$

où $I = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $|I| = \beta_i$, $\rho_I = \rho_1^{\beta_1} \dots \rho_n^{\beta_n}$, $h_I \in C^\infty(V_1)$, et on voit que

$$\overline{\partial}g_N = ((-1)^N/N!) \sum_{|I|=N} (\overline{\partial}h_I) \, \rho_I .$$

Or $|\rho_I(z)| \leq C \, d(z, \Sigma)^N$ dans V_1 si $I = N$, ceci d'après le théorème des accroissements finis, et par suite, pour tout j, $|\partial g_N/\partial\overline{z}_j| \leq C_1 \, d(z, \Sigma)^N$ dans V_1.

Faisons maintenant le prolongement globalement : pour chaque $x \in K = \operatorname{Supp} g/\Sigma$, on choisit un ouvert du type précédent, on recouvre K par $V_1, \dots, V_q$, et soit $X_1 , \dots , X_q$ une partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ de K assujetie au recouvrement (V_i) , on applique la construction précédente à $g_i = gX_i$. On construit le prolongement G_i de g_i/Σ , en notant qu'on peut prendre $G_i = 0$ hors de V_i , et on pose $G = \sum_i G_i$, $1 \leq i \leq q$, on a $|\partial G/\partial \bar{z}_j| \leq q\, C\, d(z , \Sigma)^N$ pour tout j , C et q dépendant de la variété de g et de l'entier N choisi.

LEMME 7. - <u>Posons</u> $\delta_\varepsilon = \inf[\delta , (\varepsilon^2 - d^2(z , \Sigma))^+]$, <u>la fonction</u> $- \log \delta_\varepsilon$ <u>est p. s. h. dans</u> T_ε <u>pour</u> $\varepsilon < \alpha_0$, <u>de plus,</u> $- \log \delta_\varepsilon(z) = \sup_j \varphi_j(z)$ <u>pour</u> $z \in T_\varepsilon$ <u>avec</u> φ_j <u>p. s. h. dans</u> T_{α_0} . <u>Il en résulte que</u> T_ε <u>est un domaine d'holomorphie pour</u> $\varepsilon < \alpha_0$.

<u>Démonstration</u>. - $- \log \delta_\varepsilon = \sup[- \log \delta , - \log(\varepsilon^2 - d^2)^+]$; or d^2 est p. s. h. dans T_{α_0} par hypothèse, et $f(x) = - \log(\varepsilon^2 - x)$ est convexe croissante dans $[0 , \varepsilon[$, donc $- \log(\varepsilon^2 - d^2)^+$ est p. s. h. dans T_ε , il en est donc de même de $- \log \delta_\varepsilon$ comme sup de deux fonctions p. s. h.

$- \log \delta_\varepsilon$ tend vers l'infini lorsque z tend vers la frontière du domaine T_ε , donc T_ε est un domaine pseudo-convexe, donc d'holomorphie.

On remarque que $f(x) = \sup_j f_j(x)$ pour $0 \leq x < \varepsilon$, où f_j est une fonction convexe croissante dans $\underset{\sim}{R}_+$, affine pour x assez grand, par suite,

$$- \log \delta_\varepsilon(z) = \sup[- \log \delta(z) , f_j(d^2(z , \Sigma))] ,$$

pour $z \in T_\varepsilon$, d'où le lemme.

Enfin, nous aurons besoin d'un lemme classique en théorie des équations aux dérivées partielles. Pour plus de commodité, nous en écrirons la démonstration.

LEMME 8. - <u>Si</u> $z_0 \in \underset{\sim}{C}^n$, $B_r = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ <u>et</u> $W \in L^2(B_r)$, W <u>de classe</u> C^2 , <u>alors</u>

$$|W(z_0)| < C \{r^{-n} \|W\|_{L^2(B_r)} + r \sup_{B_r} (\max_{1 \leq j \leq n} |\partial W/\partial \bar{z}_j|)\} .$$

<u>Démonstration</u>. - Plaçons-nous dans le cas $r = 1$, le lemme en résultera en posant $W_1(z) = W(rz)$. Soit $X \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$, $X = 1$ dans $|z| < 1/2$, et soit E la solution fondamentale du laplacien dans $\underset{\sim}{R}^{2n}$.

$$W(0) = (WX)(0) = \langle E , \Delta(XW)\rangle = \langle E , (\Delta X)W\rangle + \langle EX , \Delta W\rangle + 2 \langle E , \textstyle\sum_i \partial X/\partial x_i\, \partial W/\partial x_i\rangle$$
$$= \quad I_1 \quad + \quad I_2 \quad + \quad I_3$$

$1 \leq i \leq 2n$.

Or $|I_1| \leq C \|W\|_{L^2(B)}$, car ΔX est nulle sur $|z| < 1/2$.

$$I_2 = 4 \int (\Sigma_j (\partial^2 W/\partial z_j \partial\bar{z}_j)) X(x) E(x) dx = -4 \int \Sigma_j \partial W/\partial\bar{z}_j \partial/\partial z_i (XE) ,$$

donc $|I_2| \leqslant C \sup_B(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |\partial W/\partial\bar{z}_j|)$, car $\partial/\partial z_j(XE) = 0$ dans $|z| < 1/2$.

$$I_3 = 2 \Sigma_i \int \partial X/\partial x_i \partial W/\partial x_i E(x) dx = - \Sigma \int W \partial/\partial x_i (\partial X/\partial x_i E) , \quad 1 \leq i \leq 2n ,$$

$|I_3| \leqslant C \|W\|_{L^2(B)}$, d'où le résultat.

Démonstration du théorème 4. - Le lemme 5 permet de se ramener à approcher, dans un $\mathcal{C}(p , \delta)$, les fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Σ . Soient g une telle fonction, et G le prolongement construit dans le lemme 6.

Résolvons l'équation suivante

$$\bar{\partial}G_\varepsilon = \bar{\partial}G \tag{1}$$

pour le poids δ_ε^k dans le domaine d'holomorphie T_ε , on peut appliquer le théorème 3, puisque $-k \log \delta_\varepsilon$ est p. s. h. dans T_ε (lemme 7), donc il existe G_ε vérifiant (1) , et l'estimation suivante :

$$\int_{T_\varepsilon} |G_\varepsilon|^2 \delta_\varepsilon^k \delta_0^4 d\lambda(z) \leqslant \int_{T_\varepsilon} |\bar{\partial}G|^2 \delta_\varepsilon^k(z) d\lambda(z) , \tag{2}$$

comme G est à support compact, il en est de même de $\bar{\partial}G$, et il n'y a aucun problème de convergence pour la 2e intégrale.

D'après (1), $G - G_\varepsilon$ est holomorphe dans T_ε , et $G - G_\varepsilon \in L^2(\delta_\varepsilon^k \delta_0^4)$. On va montrer que $G - G_\varepsilon$ converge lorsque ε tend vers 0 vers G/Σ dans $\mathcal{C}(2n+3 , \delta)$, pour cela il nous faut évaluer la norme de $G - (G - G_\varepsilon) = G_\varepsilon$ dans cet espace.

Notons d'abord que la boule de centre x et de rayon $r = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta(x)$, soit $B(x , r)$, est contenue dans T_ε pour tout x dans Σ ; en effet, δ , étant lipschitzienne, est strictement positive dans $B(x , \delta(x))$, et si

$$z \in B(x , r) \; d(z , \Sigma) < \varepsilon^2 \delta(x) < \varepsilon .$$

Remarquons de plus que δ_ε est lipschitzienne de rapport inférieur à 1, puisqu'il en est ainsi de δ et de $(\varepsilon^2 - d^2)^+$, donc pour z dans $B(x , r)$,

$$\delta_\varepsilon(x) \leqslant \delta_\varepsilon(z) + |z - x| \leqslant \delta_2(x) + \tfrac{1}{2} \delta_{\frac{1}{2}}(x) ,$$

et par suite $\delta_\varepsilon(x) \leqslant 2 \delta_\varepsilon(z)$.

Evaluons la norme de G_ε dans $L^2(B(x , r))$.

$$\begin{aligned}(\varepsilon^2 \delta(x))^k \delta_0^4(x) \int_{B(x,r)} |G_\varepsilon|^2 d\lambda &\leqslant \delta_\varepsilon^k(x) \delta_0^4(x) \int_{B(x,r)} |G_\varepsilon|^2 d\lambda \\ &\leqslant 2^{k+4} \int_{B(x,r)} \delta_{\bar{\varepsilon}}^k(z) \delta_0^4(z) |G_\varepsilon|^2 d\lambda ,\end{aligned}$$

d'où en utilisant le lemme 6 et l'inégalité (2) ,

$$(\varepsilon^2\,\delta(x))^k\,\delta_0^4(x)\int_{B(x,r)}|G_\varepsilon|^2\,d\lambda \leqslant 2^{k+4}\int_{T_\varepsilon}\delta_\varepsilon^k\,\delta_0^4\,|G_\varepsilon|^2\,d\lambda$$

$$\leqslant 2^{k+4}\int_{T_\varepsilon}|\bar\partial G|^2\,\delta_\varepsilon^k\,d\lambda \leqslant 2^{k+4}C_1\int_{T_\varepsilon}d(z\,,\,\Sigma)^N\,\delta_\varepsilon^k(z)\,d\lambda\ ,$$

d'où $\|G_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)} \leqslant C_1\ 2^4\ \delta_0^{-4}(x)\ r^{-k}\ \varphi(\varepsilon\,,\,N)$, où

$$\varphi(\varepsilon\,,\,N) = \int_{T_\varepsilon} d(z\,,\,\Sigma)^N\,\delta_\varepsilon^k(z)\,d\lambda(z)\ ,$$

de plus, puisque $\bar\partial G_\varepsilon = \bar\partial G$,

$$|\partial G_\varepsilon/\partial\bar z_j| = |\partial G/\partial \bar z_j| \leqslant C_1\ r^N \quad\text{pour}\quad z\in B_r\ ,$$

d'après le lemme 6.

On peut à présent appliquer le lemme 8, pour la fonction G_ε et la boule $B(x\,,r)$, on voit que

$$|G_\varepsilon(x)| \leqslant C_2\ \{r^{-n-(k/2)}\ \delta_0^{-2}(x)\ \varphi(\varepsilon\,,\,N)^{\frac12} + r^{N+1}\}\ ,$$

d'où

$$\delta_0^2(x)\ \delta(x)^{n+(k/2)}\ |G_\varepsilon(x)| \leqslant C_3\ \{\varphi(\varepsilon\,,\,N)^{\frac12}\ \varepsilon^{-(2n+k)} + \varepsilon^{2(N+1)}\}\ ,$$

or $\varphi(\varepsilon\,,\,N) = \int_{T_\varepsilon} d(z\,,\,\Sigma)^N\,\delta_\varepsilon^k(r)\,d\lambda(r)$.

Si on choisit $k = 2n+1$ et $N = 8n+4$, on a $\int_{T_\varepsilon}\delta_\varepsilon^k\,d\lambda$ converge, puisque $\delta_\varepsilon \leqslant \delta_0$ et $\varphi(\varepsilon\,,\,N) \leqslant C_4\ \varepsilon^N$, puisque $d(z\,,\,\Sigma) < \varepsilon$ dans T_ε , donc

$$\delta_0^2(x)\ \delta(x)^{n+(k/2)}\ |G_\varepsilon(x)| < C_5\{\varepsilon + \varepsilon^{2(N+1)}\}\ ,$$

ce qui montre bien que G_ε tend vers 0 avec ε dans l'espace $\mathcal{C}(2n+3\,,\,\delta)$.

Nous avons pour l'instant approché la fonction g par des fonctions G_ε , holomorphes dans T_ε , et $G_\varepsilon \in L^2(\delta_\varepsilon^k\,\delta_0^4)$, $k = 2n+1$. Or, d'après le lemme 7 , $-\log\delta_\varepsilon(z) = (\sup\varphi_j)(z)$ pour z dans T_ε , avec φ_j p. s. h. dans T_{α_0} , il nous suffit alors d'appliquer la proposition 5 de l'exposé précédent [5] pour approcher G_ε par des fonctions holomorphes dans T_{α_0} . Plus précisément, il existe une constante γ indépendante de ε , telle que, pour tout G_ε , il existe une suite $(G_{\varepsilon,p})_p$ de fonctions holomorphes dans T_{α_0} telle que

$\sup_{z\in T_\varepsilon}\ \delta_\varepsilon^{k\gamma}(z)\ |(G_\varepsilon - G_{\varepsilon,p})(z)|$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Lorsqu'on se restreint à Σ , on a la convergence dans $\mathcal{C}(k\gamma\,,\,\delta)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

On peut remarquer que les fonctions $G_{\varepsilon,p}$ sont dans $\bigcup_j L^2\ (\exp(-k\varphi_j))$.

COROLLAIRE 9. - <u>Si</u> $d^2(z\,,\,\Sigma)$ <u>est bornée dans</u> Ω <u>et p. s. h. dans</u> Ω , <u>et si, de plus,</u> $-\log\delta(z) = (\sup\varphi_j)^*(z)$ <u>pour tout</u> z <u>dans</u> Ω <u>avec</u> $\exp\varphi_j$ <u>à croissance polynomiale,</u> φ_j <u>étant p. s. h. dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>alors les polynômes sont denses dans</u> $\mathcal{C}_\Sigma(\delta)$.

Démonstration. - On peut choisir α_0 tel que $T_{\alpha_0} = \Omega$ puisque $d^2(z , \Sigma)$ est borné et p. s. h. dans Ω , donc, d'après le théorème 4, on peut approcher une fonction g continue, à support compact dans Σ par des fonctions holomorphes dans Ω et qui sont de plus dans $\bigcup_j L^2(\exp(- k\varphi_j))$, or $\varphi_j = \sup(- \log \delta , f_j(d^2(z , \Sigma))$, f_j étant affine pour $d^2(z , \Sigma)$ assez grand, donc ces fonctions holomorphes sont en fait dans $\mathcal{O}(\delta)$, et il suffit alors d'appliquer le corollaire 8 de l'exposé précédent.

Dans le théorème 4 est intervenue la condition $d^2(z , \Sigma)$ p. s. h. dans T_α , on peut se demander la signification géométrique de cette propriété. Pour $n = 1$, la proposition 10 fournit une réponse, pour n quelconque, on a une formulation équivalente qu'il faudrait interpréter en termes de courbure. Considérons dans $\underset{\sim}{C}$ une courbe Σ C^∞ , il existe un ouvert Ω , voisinage de Σ , sur lequel la fonction $d^2(z , \Sigma)$ est de classe C^2 , on a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 10. - Si la courbure de Σ est majorée par une constante C , $d^2(z, \Sigma)$ est alors sous-harmonique dans l'ouvert

$$T_C = \{z \mid z \in \Omega , d(z , \Sigma) < 1/2C\} .$$

Démonstration. - Paramétrons Σ par son abscisse curviligne s , et pour $z = x + iy$ dans Ω , soit $s(z)$ l'abscisse curviligne de la projection de z sur Σ . Σ est définie par $s \to (f(z) , g(s))$.

$$\varphi(z) = d^2(z , \Sigma) = (x - f(s(z)))^2 + (y - g(s(z)))^2 .$$

On calcule $\Delta\varphi$, et on trouve :

$$\Delta\varphi(z) = \frac{2 + 4f''(s(z))\ (f - x) + 4g''(s(z))\ (g - y)}{1 + f''(f - x) + g''(g - y)} .$$

Soit ρ la courbure, on a, en appliquant l'inégalité de Schwarz,

$$|f''(f - x) + g''(g - y)| \leq p(s(z))\ d(z , \Sigma) \leqslant C\ d(z , \Sigma) .$$

Si donc $d(z , \Sigma) < 1/2C$, $\Delta\varphi(z) \geqslant 0$.

Remarque. - Réciproquement, si $d^2(z , \Sigma)$ est sous-harmonique dans

$$\{z \mid z \in \underset{\sim}{C} , d(z , \Sigma) < \alpha\} ,$$

alors la courbure de Σ est majorée par $1/2\alpha$. L'exemple du cercle montre que cette évaluation est la meilleure.

Σ étant une sous-variété totalement réelle de $\underset{\sim}{C}^n$, $\mathrm{Proj}_\Sigma(z)$ désigne la projection de z sur Σ , et $A(z)$ la dérivée au sens complexe de l'application $z \to \mathrm{Proj}_\Sigma(z)$.

PROPOSITION 11. - Si $z \to \mathrm{Proj}_\Sigma(z)$ est C^1 dans un ouvert Ω, $d^2(z, \Sigma)$ est p. s. h. dans cet ouvert équivaut à $\langle (I - A)(z) W, W \rangle \geq 0$ pour tout $z \in \Omega$ et $W \in \mathbb{C}^n$. I désigne l'identité.

Nous omettons la démonstration qui est purement techrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (L.). - L^2 estimates and existence theorems for $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., Uppsala, t. 113, 1965, p. 89-152.

[2] HÖRMANDER (L.). - An introduction to complex analysis in several variables. - New York, D. Van Nostrand Company, 1966 (The University Series in higher Mathematics).

[3] HÖRMANDER (L.) and WERMER (J.). - Uniform approximation on compact subsets in $\mathbb{C}^n$, Math. Scand., t. 23, 1968, p. 5-21.

[4] NIRENBERG (R.) and WELLS (R. O., Jr). - Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold, Trans. Amer. math. Soc., t. 142, 1969, p. 5-35.

[5] SIBONY (N.). - Approximation pondérée de fonctions holomorphes dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, n° 21, 14 p.

(Texte reçu le 13 juillet 1971)

Jean-Pierre FERRIER
12 rue Michel Ney
54 - NANCY

Nessim SIBONY
20 rue de la Glacière
75 - PARIS 13