Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Nessim Sibony

Approximation pondérée de fonctions holomorphes dans un ouvert de $\mathbb{C}n$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° 21, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 21, 14 p.

13 mai 1971

APPROXIMATION PONDÉRÉE DE FONCTIONS HOLOMORPHES DANS UN OUVERT DE $\mathbb{C}^n$

par Nessim SIBONY

1. Position du problème et notations.

Soit ω un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, et soit δ une fonction lipschitzienne positive de rapport 1 , définie sur $\mathbb{C}^n$, telle que $\omega = \{z \mid z \in \mathbb{C}^n , \delta(z) > 0\}$.

On pose $\delta_0(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2}$, avec $|z|^2 = \sum_i |z_i|^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et on supposera, dans toute la suite, que $\delta \leqslant \delta_0$.

$H(\omega)$ désignera l'espace des fonctions holomorphes dans ω , et, pour f dans $H(\omega)$, on pose

$$\|f\|_k = \sup_{z\in\omega} |f(z)| \, \delta^k(z) \quad ;$$

s'il existe un entier k tel que $\|f\|_k < \infty$, on dira que f est à croissance δ tempérée.

On note $E(k , \delta)$ l'espace des fonctions holomorphes dans ω telles que $\|f\|_k < \infty$, et $\mathcal{O}(\delta)$ l'espace des fonctions δ tempérées. Par exemple, on peut prendre $\delta = \delta_\omega$ avec

$$\delta_\omega(z) = \min(\delta_0(z) , d(z)) , \qquad \text{où} \quad d(z) = \inf_{z'\notin\omega} |z - z'| \quad .$$

Lorsqu'une fonction appartient à $\mathcal{O}(\delta_\omega)$, on dit qu'elle est à croissance polynômiale.

DÉFINITION 1. - Un espace de fonctions holomorphes dans ω est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$, s'il existe un entier γ tel que, pour tout entier k , $E(k , \delta)$ est dans l'adhérence de $H \cap E(\gamma k , \delta)$ pour la norme de $E(\gamma k , \delta)$.

Autrement dit, H est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$, si, pour $f \in \mathcal{O}(\delta)$ avec $\|f\|_k < \infty$, il existe une suite f_p de fonctions de H telle que

$$\|f - f_p\|_{\gamma k} \text{ tend vers } 0 , \qquad \text{lorsque } p \text{ tend vers l'infini} \quad ;$$

γ étant indépendant de f et de k .

Le problème est de trouver des espaces de fonctions holomorphes, dans des ouverts strictement plus grands que ω , et qui soient denses dans $\mathcal{O}(\delta)$. En particulier, à quelles conditions sur δ l'espace des polynômes est-il dense dans $\mathcal{O}(\delta)$?

On obtient, par exemple, les résultats suivants : Si ω est un domaine d'holomorphie borné, avec $\overset{\circ}{\overline{\omega}} = \omega$, et $\overline{\omega}$ polynomialement convexe, les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$. Si ω est un domaine d'holomorphie non nécessairement borné, tel que $\omega = \overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{\alpha\in A} \omega_\alpha}}$, où chaque ω_α est un domaine d'holomorphie, $\bigcup_{\alpha\in A} H(\omega_\alpha)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$.

Des problèmes semblables ont été traités par J.-P. FERRIER, dans [3], en utilisant le calcul symbolique de WAELBROECK ; notre méthode semble toutefois plus simple, et permet d'obtenir dans certains cas des résultats plus précis, on y utilise une généralisation d'une proposition, due à B. TAYLOR, ainsi que les résultats de cohomologie à croissance de HÖRMANDER. Nous aurons besoin des notations suivantes :

DÉFINITION 2. - <u>Deux fonctions positives</u> h_1 <u>et</u> h_2, <u>définies dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>sont dites équivalentes, s'il existe une constante</u> $c > 0$ <u>et un entier</u> N <u>tels que</u> $h_1 \geqslant ch_2^N$ <u>et</u> $h_2 \geqslant ch_1^N$; <u>on écrira alors</u> $h_1 \approx h_2$.

Etant donnée une fonction g, à valeurs dans $[-\infty , +\infty[$, localement majorée, on notera g^* la plus petite fonction s. c. s. qui majore g.

ψ étant une fonction mesurable positive, on désignera par $L^2(\Omega , \psi)$ l'espace des fonctions définies sur l'ouvert Ω, et qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure $\psi\, d\lambda$, où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue.

$L^2_{p,q}(\Omega , \exp(-\Phi))$ désigne l'espace des formes différentielles de type (p , q), à coefficients dans $L^2(\Omega , \exp(-\Phi))$; si $g \in L^2_{p,q}(\Omega , \exp(-\Phi))$, elle s'écrit sous la forme

$$g = \sum_{I,J} g_{I,J}\, d\bar{z}^I \wedge d\bar{z}^J ,$$

la sommation portant sur l'ensemble des multi-indices strictement croissants, et où, pour $I = (i_1 , \ldots , i_p)$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, $dz^I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$, et, pour $J = (j_1 , \ldots , j_q)$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n$, $d\bar{z}^J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}$.
On pose

$$|g|^2 = \sum_{I,J} |g_{I,J}|^2 \qquad \text{et} \qquad \|g\|^2 = \int_\Omega |g|^2 \exp(-\Phi)\, d\lambda \;;$$

il est clair que, muni de cette norme, $L^2_{(p,q)}(\Omega , \exp(-\Phi))$ est un espace de Hilbert.

On considère l'opérateur non borné $\bar{\partial}$ de $L^2_{(p,q)}(\Omega , \exp(-\Phi_1))$ dans $L^2_{(p,q+1)}(\Omega , \exp(-\Phi_2))$, défini par

$$\bar\partial g = \sum_{I,J} \sum_k (\partial g_{I,J}/\partial \bar z_h)\, d\bar z_h \wedge d\bar z^I \wedge d\bar z^J , \qquad 1 \leqslant k \leqslant n \quad ;$$

$\partial g_{I,J}/\partial \bar z_h$ est pris au sens des distributions, g est dans le domaine de $\bar\partial$ si $\bar\partial g$ appartient à $L^1_{(p,q+1)}(\Omega , \exp(-\Phi_2))$.

2. Approximation des fonctions à croissance tempérée.

Le théorème 3, qui suit, est dû à HÖRMANDER [3] ; il sera utile pour démontrer la proposition 4 qui généralise une proposition de TAYLOR [6].

THÉORÈME 3. - Soient Ω un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, Φ une fonction p. s. h. (plurisousharmonique) dans Ω , et g une forme différentielle à coefficients dans $L^2_{loc}(\Omega)$ telle que $\bar\partial g = 0$ et $\int_\Omega |g|^2 \exp(-\Phi)\, d\lambda(z) < \infty$. Alors il existe f dans $L^2_{loc}(\Omega)$, avec $\bar\partial f = g$ et

$$\int_\Omega |f|^2 \exp(-\Phi)\, \delta_0^4\, d\lambda(z) \leqslant \int_\Omega |g|^2 \exp(-\Phi)\, d\lambda(z) \quad .$$

PROPOSITION 4. - Supposons que $-\log \delta(z) = (\sup_{i\in I} \varphi_i)^* (z)$ pour tout z dans ω , où chaque φ_i est p. s. h. dans un ouvert d'holomorphie $\Omega_i \supset \omega$; et soit f holomorphe dans ω , avec $\int |f|^2 \delta^k\, d\lambda(z) < \infty$. Alors il existe une suite v_p de fonctions holomorphes, telle que, pour tout p , v_p appartient à la réunion $\bigcup_{i\in I} [H(\Omega_i) \cap L^2(\exp(-(k+z)\varphi_i)\, \delta_0^4)]$, et v_p converge vers f dans $L^2[\delta^{k+z}\, \delta_0^4]$.

Démonstration. - On peut supposer la famille φ_i filtrante croissante, et il est bien connu qu'il existe une suite $i(m)$ d'indices telle que la suite $\varphi_{i(m)}$ soit croissante et $(\sup_m \varphi_{i(m)})^* = (\sup_{i\in I} \varphi_i)^*$ dans ω . Rappelons de plus que $\sup_m \varphi_{i(m)}$ diffère de $(\sup_m \varphi_{i(m)})^*$ seulement sur un ensemble de mesure nulle de ω , car les fonctions φ_i sont p. s. h.

Soient K_p une suite exhaustive de compacts de ω , et α_p une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans ω , $0 \leqslant \alpha_p \leqslant 1$, α_p valant 1 dans un voisinage de K_p et, de plus, vérifiant

$$\sum_\ell |\partial\alpha_p/\partial\bar z_\ell|^2 (z) \leqslant c(1 + (1/\delta_\omega(z)))^2 , \qquad 1 \leqslant \ell \leqslant n \quad ,$$

où c est une constante indépendante de p ; un procédé de régularisation permet de construire une telle suite. Or $\delta(z) \leqslant \delta(z') + |z - z'| = |z - z'|$ pour tout $z' \notin \omega$, car $\omega = \{z \mid \delta(z) > 0\}$, d'où $\delta(z) \leqslant d(z) \leqslant \delta_\omega(z)$, et par suite

$$\sum_\ell |\partial\alpha_p/\partial\bar z_\ell|^2 (z) \leqslant c(1 + (1/\delta(z)))^2 , \qquad 1 \leqslant \ell \leqslant n \quad .$$

Posons $g_p = \bar{\partial}(\alpha_p f) = f(\bar{\partial}\alpha_p)$; c'est une forme différentielle de type $(0, 1)$ à coefficients dans $\mathcal{C}_c^\infty(\omega)$. Soit

$$I(p) = \int_\omega |g_p|^2 \delta^{k+z} d\lambda(z) = \int_\omega |f|^2 |\bar{\partial}\alpha_n|^2 \delta^{k+z} d\lambda(z) \quad ,$$

d'où, d'après la construction de α_p ,

$$I(p) \leqslant c \int_{\omega \setminus K_p} |f|^2 \delta^k (1 + \delta)^2 d\lambda(z) = \varepsilon_p \qquad \text{et} \qquad \lim_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0 \quad ,$$

puisque $f \in L^2(\delta^k)$ et a fortiori à $L^2(\delta^k(1 + \delta)^2)$. De même, soit

$$I(p, j) = \int_{\Omega_j} |g_p|^2 \exp(-(k + z)\varphi_j) d\lambda(z) \quad .$$

Afin d'alléger les notations, on désigne par (φ_j) la suite $(\varphi_{i(m)})$;

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} I(p, j) = \lim_{j\to\infty} & \int_\omega |g_p|^2 \exp(-(k + z)\varphi_j) d\lambda \\
&= \int_\omega |g_p|^2 \exp(-(k + z)(\sup \varphi_j)) d\lambda(z) \\
&= \int_\omega |g_p|^2 \exp(-(k + z)(\sup \varphi_j)^*) d\lambda(z) \\
&= \int_\omega |g_p|^2 \delta^{k+z} d\lambda(z) = I(p) \ .
\end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue, en remarquant que $|g_p|$ est à support compact et que la suite φ_j est croissante. Donc, pour tout p , il existe un indice $j(p)$ avec $I(p, j(p)) < 2\varepsilon_p$.

Résolvons

(1) $$\bar{\partial} u_p = g_p \quad ,$$

dans le domaine d'holomorphie $\Omega_{j(p)}$ pour le poids $\exp(-(k + z)\varphi_{j(p)})$. D'après le théorème 3, il existe une solution u_p , avec

$$\int_{\Omega_{j(p)}} |u_p|^2 \exp(-(k + z)\varphi_{j(p)}) \delta_0^4 d\lambda \leqslant \int_{\Omega_{j(p)}} |g_p|^2 \exp(-(k + z)\varphi_{j(p)}) d\lambda$$
$$= I(p, j(p)) \leqslant 2\varepsilon_p \ .$$

Soit alors $v_p = f\alpha_p - u_p$; d'après (1), $\bar{\partial} v_p = 0$ dans $\Omega_{j(p)}$, donc $v_p \in H(\Omega_{j(p)})$, et de plus,

$$\int_{\Omega_{j(p)}} |v_p|^2 \exp(-(h + z)\varphi_{j(p)}) \delta_0^4 d\lambda < \infty \quad ,$$

car il en est ainsi de u_p , et $f\alpha_p$ est à support compact. Par suite

$$\int_\omega |u_p|^2 \, \delta^{h+z} \, \delta_0^4 \, d\lambda \leqslant \int_\omega |u_p|^2 \exp(-\ (h+z)\varphi_{j(p)}) \, \delta_0^4 \, d\lambda \leqslant 2\varepsilon_p \quad ;$$

en effet, par hypothèse, $\delta^{k+2} \leqslant \exp(-\ (k+2)\varphi_{j(p)})$; et comme $f\alpha_p$ est arbitrairement proche de f dans $L^2(\delta^{h+z}\ \delta_0^4)$, on a bien que v_p converge vers f dans $L^2(\delta^{h+z}\ \delta_0^4)$.

De la proposition 4, on déduit facilement un critère de densité.

PROPOSITION 5. - *Supposons que* $\delta \approx \hat{\delta}$ *avec* $-\log \hat{\delta}(z) = (\sup_{i\in I} \varphi_i)^*(z)$, *pour tout* z *dans* ω , *avec* φ_i *p. s. h. dans un ouvert d'holomorphie* $\Omega_i \supset \omega$; *alors* $\bigcup_{i\in I} H(\Omega_i)$ *est dense dans* $\mathcal{O}(\delta)$.

Nous aurons besoin, pour le démontrer, du lemme suivant, qui se trouve dans [2].

LEMME 6.

(a) *Si* f *est une fonction mesurable dans* ω , *telle que*

$$\|f\|_k = \sup_{z\in\omega} \delta^k(z)\ |f(z)| < \infty \quad ,$$

alors

$$\|f\delta^{k+n+(1/2)}\|_{L^2} \leqslant K_0 \|f\|_k \quad ,$$

où K_0 *est une constante indépendante de* f , *et*

$$\|f\delta^{h+n+(1/2)}\|_{L^2}^2 = \int_\omega |f|^2 \, \delta^{2k+2n+1} \, d\lambda(z) \quad .$$

(b) *Il existe une constante* M *telle que, pour toute* f *dans* $H(\omega)$,

$$\|f\|_{k-n} \leqslant M \|f\delta^k\|_{L^2} \quad .$$

Démonstration. - Le (a) est immédiat, car

$$\|f\delta^{k+n+(1/2)}\|_{L^2}^2 \leqslant \|f\|_k^2 \int_\omega \delta^{2n+1} \, d\lambda \leqslant \|f\|_k^2 \int_\omega \delta_0^{2n+1} \, d\lambda = K_0^2 \|f\|_k^2 \quad .$$

Pour le (b), on remarque que $D_s = \{z \mid |z_i - s_i| \leqslant r\delta(s)\}$ est contenu dans ω , si on choisit $r = Rn^{-1/2}$ avec $R < 1$, d'où, d'après la formule de la moyenne dans D_s ,

$$f(s) = (1/2n)^n \int_0^{2n} \dots \int_0^{2n} f(s + \mu\delta(s) \exp it) \, dt_1 \dots dt_n \quad ;$$

puis on intègre par rapport au paramètre μ , et on applique l'inégalité de Schwarz, ce qui donne

$$|f(s)| \leqslant c_2\, r^{-2n}\left(\int_{D_s} |f|^2\, d\lambda(z)\right)^{1/2} \left(\int_{D_s} d\lambda(z)\right)^{1/2} .$$

Or, dans D_s , on a $\delta(s) - \delta(s + \delta(s)\,\mu \exp it) \leqslant R\delta(s)$, donc $\delta(z) \geqslant \delta(s)(1 - R)$, et par suite

$$|f(s)| \leqslant c_2\, \delta(s)^n\, \delta(s)^{-N}\left(\int_{D_s} (|f(z)|\, \delta^N(z))^2\, d\lambda(z)\right)^{1/2} ,$$

ce qui démontre le lemme.

Démonstration de la proposition 5. - Par hypothèse, $\delta \geqslant c\hat{\delta}^N$ et $\hat{\delta} \geqslant c\delta^N$; soient k un entier, et f dans $H(\omega) \cap L^2(\delta^k)$; en reprenant la démonstration de la proposition 4, on voit que $\hat{I}(p) = \int |g_p|^2\, \hat{\delta}^{N(k+z)}\, d\lambda$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, et de même $\hat{I}(p\ ,\ j) = \int |g_p|^2 \exp(-\,(h + z)\varphi_j)\, d\lambda$ converge vers $\hat{I}(p)$, donc v_p converge vers f dans $L^2(\delta^{N^2(k+z)}\, \delta_0^4)$.

Si maintenant f est dans $E(k\ ,\ \delta)$, d'après le lemme 6, f est dans $L^2(\delta^{2k+2n+1})$, et il existe v_p une suite de fonctions holomorphes convergeant vers f dans $L^2[\delta^{N^2(2k+2n+3)}\, \delta_0^4]$, et par suite, d'après le (b) du lemme 6, v_p converge vers f dans $E[\gamma k\ ,\ \delta]$, où γ ne dépend que de N et n ; on a naturellement supposé que $k \geqslant 1$.

PROPOSITION 7. - <u>Soit ω un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$, tel que $\omega = \widehat{\bigcap_{i\in I} \omega_i}^{\circ}$, où les ω_i sont des domaines d'holomorphie, $\omega_i \supset \omega$. Alors $\bigcup_i H(\omega_i)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$. En particulier, si $\overline{\omega}^{\circ} = \omega$ et $\overline{\omega}$ polynomialement convexe, alors les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$ ($\overline{\omega}$ est donc borné).</u>

<u>Démonstration</u>. - Puisque $\omega = \widehat{\bigcap_{i\in I} \omega_i}^{\circ}$, $\delta_\omega = \inf \delta_{\omega_i}$, d'où

$$-\log \delta_\omega(z) = \sup_i\ (-\log \delta_{\omega_i}(z)) , \qquad \text{pour tout}\ \ z \in \omega ,$$

et $-\log \delta_{\omega_i}$ est p. s. h. dans ω_i , puisque ω_i est un domaine d'holomorphie, d'où le résultat, d'après la proposition 5.

Si $\overline{\omega}$ est un compact polynomialement convexe, on a $\overline{\omega} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \omega_p$, où les ω_p sont des polyèdres polynomiaux [5], et $\omega = \overline{\omega}^{\circ} = \widehat{\bigcap_p \omega_p}^{\circ}$. L'application de la première partie de la proposition permet de dire que l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{\omega}$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$; or, d'après le théorème d'approximation d'Oka, on peut approcher, uniformément sur $\overline{\omega}$, toute fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\omega}$ par des polynômes, d'où le résultat, puisque la convergence uniforme sur $\overline{\omega}$ implique la convergence dans $E[\gamma k , \delta_\omega]$.

Remarque. - De même, si $\overline{\omega}$ est un compact holomorphiquement convexe (resp. rationnellement convexe) dans un domaine d'holomorphie Ω , on a $H(\Omega)$ (resp. l'espace des fractions rationnelles à pôles hors de $\overline{\omega}$) est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$.

Exemple. - Si ω est un ouvert convexe borné de $\underset{\sim}{C}^n$, la proposition 7 permet de dire que l'espace des polynômes est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$; en effet, $\overset{\circ}{\overline{\omega}} = \omega$, et $\overline{\omega}$ est polynomialement convexe.

COROLLAIRE 8. - Si $\delta \approx \hat{\delta}$, avec $-\log \hat{\delta}(z) = (\sup_i \psi_i)^* (z)$ pour tout $z \in \omega$, avec ψ_i p. s. h. dans $\underset{\sim}{C}^n$, et $\exp \psi_i$ à croissance polynomiale dans $\underset{\sim}{C}^n$, alors l'espace des polynômes est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$.

Démonstration. - En effet, pour tout i , on a $\Omega_i = \underset{\sim}{C}^n$, et, d'après la démonstration de la proposition 5, pour toute f dans $E(k , \delta)$, il existe une suite v_p de fonctions entières, telle que v_p converge vers f dans $E(\gamma k , \delta)$, avec de plus, pour tout p ,

$$\int_{\underset{\sim}{C}^n} |v_p|^2 \exp(- rk\ \psi_{j(p)})\ d\lambda(z) < \infty \quad ,$$

où r est un entier ne dépendant que de n et N . Par hypothèse, pour tout $\psi_{j(p)}$, il existe une constante c_p et un entier $s(p)$ tels que

$$|\exp \psi_{j(p)}| \leqslant c_p(1 + |z|^2)^{s(p)} \quad ,$$

donc

$$\int_{\underset{\sim}{C}^n} |v_p|^2\ (1 + |z|^2)^{-krs(p)}\ d\lambda(z) < \infty \quad ,$$

et, par suite, d'après le théorème de Liouville, v_p est un polynôme, d'où le résultat.

Exemple. - Soit $\delta_\alpha(z) = \exp(- |z|^\alpha)$, $\alpha \geqslant 1$.

$$1/\delta = \exp |z|^\alpha = \sup_q\ (\Sigma_j\ |z|^{\alpha j}/j!) \ , \qquad 1 \leqslant j \leqslant q \quad ,$$

d'où

$$- \log \delta(z) = \sup_q\ [\log(\Sigma_j\ |z|^{\alpha j}/j!)] \ , \qquad 0 \leqslant j \leqslant q \quad ;$$

$\log(\Sigma_j\ |z|^{\alpha j}/j!)$, $0 \leqslant j \leqslant q$, est p. s. h. dans $\underset{\sim}{C}^n$, et $\Sigma_j\ |z|^{\alpha j}/j!$, $0 \leqslant j \leqslant q$, est à croissance polynomiale, donc l'espace des polynômes est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\alpha)$

pour tout $\alpha \geqslant 1$.

THÉORÈME 9. - Soit ω un ouvert borné de $\underset{\sim}{C}^n$, tel que

$$\omega = \{z \mid z \in \underset{\sim}{C}^n , \delta(z) > 0\} ,$$

où δ est lipschitzienne de rapport 1 dans $\underset{\sim}{C}^n$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$; de plus, on suppose que $-\log \delta$ est p. s. h. dans ω . Soit Ω un ouvert d'holomorphie contenant ω ; alors $H(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$, si, et seulement si,

(2) $\delta \approx \hat{\delta}$, avec $-\log \hat{\delta}(z) = (\sup_i (c_i \log|f_i|))^* (z)$ pour tout $z \in \omega$,

et où les f_i sont dans $H(\Omega)$, et $c_i > 0$.

Démonstration. - Il est bien connu que $c \log|f|$ est p. s. h. dans Ω lorsque $f \in H(\Omega)$ et $c > 0$, donc il résulte de la proposition 5 que la condition (2) est suffisante. ω est bien un ouvert d'holomorphie, puisque $-\log \delta$ est p. s. h. dans ω , et tend vers l'infini lorsque z tend vers la frontière de ω .

Pour démontrer que la condition (2) est nécessaire, nous avons besoin de la proposition suivante, due à R. NARASHIMAN [7].

PROPOSITION 10. - Soit Ω' un domaine d'holomorphie borné ; il existe un entier k tel que Ω' soit le domaine maximal d'existence de $E(k , \delta_{\Omega'})$; plus précisément, en tout point z^0 de la frontière de Ω' , il existe f dans $E(k , \delta_{\Omega'})$ qui soit singulière en z^0 .

Nous allons montrer qu'il existe une fonction dans $E(k , \delta_{\Omega'})$, singulière en tout point de la frontière de Ω' . Considérons pour cela une suite de points dense dans la frontière de Ω' , et soit (B_j) la famille dénombrable, de polydisques de rayons rationnels centrés en ces points ; E_j désigne l'espace des fonctions holomorphes dans $\Omega' \cup B_j$ dont la restriction à Ω' soit dans $E(k , \delta_{\Omega'})$. On munit E_j de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\Omega' \cup B_j$ et de la convergence suivant $\| \|_k$; c'est un espace de Fréchet. Considérons l'application de restriction $R_j : E_j \rightarrow E(k , \delta_{\Omega'})$; d'après la définition de la topologie de E_j , cette application est continue ; elle n'est pas surjective, d'après la proposition 10, donc, d'après le théorème du graphe fermé, $R_j(E_j)$ est maigre dans l'espace de Banach $E(k , \delta_{\Omega'})$; il en est de même de $\bigcup_j R_j(E_j)$, puisque la famille B_j est dénombrable ; soit f dans $E(k , \delta_{\Omega'})$ et n'appartenant à aucun des $R_j(E_j)$, il est clair qu'une telle f n'est pas prolongeable hors de Ω' .

LEMME 11. - Etant donnés δ et ω vérifiant les hypothèses du théorème 9, il existe une suite (a_ν) de fonctions holomorphes dans ω , et une constante $c > 0$, telles que

$$- \log \delta(z) \leqslant (\sup_\nu (\log|a_\nu|)/\nu)^* (z) \leqslant - \log c\delta^2(z) \ ,$$ <u>pour tout</u> z <u>dans</u> ω .

<u>Démonstration</u>. - Considérons dans $\underset{\sim}{C}^{n+1}$ l'ouvert $\tilde{\omega}$,

$$\tilde{\omega} = \{(z \ , \ w) \mid z \in \omega \ , \ w \in \underset{\sim}{C} \ , \ |w| < \delta(z)\} \ .$$

$\tilde{\omega}$ est un ouvert d'holomorphie dans $\underset{\sim}{C}^{n+1}$; en effet, $\log|w| - \log \delta(z)$ est p. s. h. dans $\omega \times \underset{\sim}{C}$, et $\tilde{\omega} = \{(z \ , \ w) \mid (z \ , \ w) \in \omega \times \underset{\sim}{C} \ , \ \log|w| - \log \delta(z) < 0\}$. Soit $d(z \ , \ w)$ la distance du point $(z \ , \ w)$ au complémentaire de $\tilde{\omega}$;

$$d(z \ , \ w) \leqslant \delta(z) - |w| \ ,$$

car les points $(z \ , \ \lambda\delta(z))$ avec $|\lambda| = 1$ sont dans $\complement\tilde{\omega}$, et par ailleurs $d(z \ , \ w) \geqslant d(z \ , \ 0) - |w|$; or, si $(z' \ , \ w') \in \complement\tilde{\omega}$,

$$|z - z'| + |w'| \geqslant |z - z'| + \delta(z') \geqslant \delta(z) \ ,$$

car δ est lipschitzienne de rapport 1 , par suite $d(z \ , \ 0) = \delta(z)$ et $d(z \ , \ w) = \delta(z) - |w|$.

On a choisi pour norme de $\underset{\sim}{C}^{n+1}$ la norme $|(z \ , \ w)| = |z| + |w|$. $\tilde{\omega}$ étant un domaine d'holomorphie borné, il existe, comme nous venons de le voir, un entier k et une fonction f dans $E(k \ , \ \delta_{\tilde{\omega}})$, dont $\tilde{\omega}$ soit le domaine d'holomorphie.

Considérons le développement de Hartogs de la fonction f :

$$f(z \ , \ w) = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu(z) w^\nu \ , \qquad \text{où } a_\nu(z) = 1/\nu! \ D^\nu f(z \ , \ 0) \ .$$

Posons $- \log R(z) = (\overline{\lim}_\nu \ (1/\nu \log|a_\nu|))^* (z)$; d'après un théorème de Hartogs [1], la série $\sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu(z) w^\nu$ définit une fonction holomorphe dans

$$\omega_R = \{(z \ , \ w) \mid z \in \omega \ , \ |w| < R(z)\} \qquad \text{et} \qquad \delta(z) \leqslant R(z) \ ;$$

or $\tilde{\omega}$ est le domaine d'holomorphie de f , donc $\delta(z) = R(z)$, i. e.

(3) $$- \log \delta(z) = (\overline{\lim}_\nu \ [(\log|a_\nu|)/\nu])^* (z) \ , \qquad \text{pour tout } z \in \omega \ .$$

Par ailleurs, on sait que $d^k(z \ , \ w)|f(z \ , \ w)| \leqslant 1$, et que

$$(D^\nu f(z \ , \ 0))/\nu! = 1/2\pi \int_0^{2\pi} (f(z \ , \ r\delta(z) \exp i\theta))/(r\delta(z) \exp i\theta)^\nu \, d\theta \ , \quad \text{avec } r < 1 \ ;$$

d'où

$$|a_\nu(z)| \leqslant 1/2\pi \int_0^{2\pi} |f(z \ , \ r\delta(z) \exp i\theta)| \ d(z \ , \ r\delta(z))^k \ d(z \ , \ r\delta(z))^{-k} \ r^{-\nu} \ \delta(z)^{-\nu} \, d\theta \ ,$$

donc

$$|a_\nu(z)| \leqslant r^{-\nu}(1 - r)^{-k} \ \delta(z)^{-(k+\nu)} \ ,$$

et

$$((\log|a_\nu|)/\nu)(z) \leqslant ((k + \nu)/\nu) \log(1/\delta) - \log r - (k/\nu) \log(1 - r) \ ,$$

c'est-à-dire

(4) $\qquad (\log|a_\nu(z)|)/\nu \leqslant \log(c/(\delta^2(z)))$, pour ν assez grand .

Le lemme résulte de (3) et (4), puisque $a_\nu(z) \in H(\omega)$.

Démonstration du théorème 9. - Supposons que $H(\Omega)$ soit dense dans $\mathcal{O}(\delta)$; d'après (4), on a $\delta^{2\nu}(z)|a_\nu(z)| \leqslant c^\nu$; la densité de $H(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\delta)$ implique que, pour chaque ν , il existe une suite $(a_{\nu,p})_p$ dans $H(\Omega)$, avec

$$\delta^{2\gamma\nu}|a_\nu - a_{\nu,p}| < 1/p \quad ,$$

d'où

$$\delta^{2\gamma\nu}|a_{\nu,p}| \leqslant c^\nu + (1/p) \qquad \text{et} \qquad (\log|a_{\nu,p}|)/\nu \leqslant -\log c'\delta^{2\gamma} \quad ;$$

par suite, puisque $a_{\nu,p}$ converge uniformément sur tout compact de ω vers a_ν , on a

$$-\log \delta(z) \leqslant [\sup_{\nu,p} (\log|a_{\nu,p}|)/\nu]^* (z) \leqslant -\log c'\delta^{2\gamma}(z) \quad , \qquad \text{pour tout } z \in \omega .$$

Si on pose $-\log \hat{\delta} = (\sup_{\nu,p} (\log|a_{\nu,p}|)/\nu)^*$, on a

$$1/\delta \leqslant 1/\hat{\delta} \leqslant c''/\delta^{2\gamma} \quad ,$$

donc $\delta \approx \hat{\delta}$, et on a de plus les constantes qui interviennent dans $\delta \approx \hat{\delta}$ en fonction de γ .

Remarques.

(a) La démonstration permet de conclure, sous les mêmes hypothèses sur δ et ω, que, si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une famille de domaines d'holomorphie tels que $\Omega_i \supset \omega$, pour tout i , $\bigcup_{i\in I} H(\Omega_i)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ si, et seulement si,

(2') $\quad \delta \approx \hat{\delta}$, avec $-\log \hat{\delta}(z) = (\sup_j (c_j \log|f_j|))^* (z)$ pour tout $z \in \omega$,

avec f_j dans $\bigcup_i H(\Omega_i)$.

(b) Si ω est un ouvert convexe éventuellement non borné, et Ω un domaine d'holomorphie, $\Omega \supset \omega$, $H(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$ si, et seulement si,

$$\hat{\delta} \approx \delta_\omega \qquad \text{et} \qquad -\log \hat{\delta}(z) = (\sup_j c_j \log|f_j|)^* (z) \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \omega ,$$

avec $f_j \in \omega$.

L'hypothèse ω borné n'est intervenue que dans la démonstration de la nécessité de (2), et ce qui était essentiel dans cette démonstration est l'existence d'une fonction holomorphe à croissance polynomiale dans $\tilde{\omega}$ dont $\tilde{\omega}$ soit le domaine d'holomorphie. Or, si ω est convexe, il en est de même de

$$\tilde{\omega} = \{(z , w) \mid z \in \omega , |w| < d_\omega(z)\} , \qquad \text{avec } d_\omega(z) = \min[\inf_{z'\notin\omega} |z - z'| , 1] ;$$

en effet, d_ω est concave. Il suffit alors de remarquer que tout ouvert convexe est le domaine d'holomorphie d'une fonction bornée, car, en tout point de la frontière, on peut trouver une fraction rationnelle singulière en ce point et holomorphe dans l'ouvert.

Exemple. - Dans $\underset{\sim}{C}^2$, considérons le domaine d'holomorphie

$$\omega = \{(z_1 , z_2) \mid (z_1 , z_2) \in \underset{\sim}{C}^2 , \quad |z_1| < |z_2| < 1\} .$$

On montre que $\delta_\omega(z) = d(z , C\omega) = \inf[(1 - |z_2|) , |z_2| - |z_1|]$. Or

$$1/(1 - |z_2|) = \sup_N [\sum_p |z_2|^p] , \qquad 0 \leqslant p \leqslant N ,$$

et

$$1/(|z_2| - |z_1|) = \sup_{N,\lambda_1,\lambda_2} |P_{N,\lambda_1,\lambda_2}(z_1 , z_2)| , \qquad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 ,$$

où $P_{N,\lambda_1,\lambda_2}(z_1 , z_2) = \sum_p (\lambda_1 z_1)^p/(\lambda_2 z_2)^{p+1}$, $0 \leqslant p \leqslant N$, d'où

$$- \log \delta_\omega(z) = (\sup_j \log|f_j|) (z) , \qquad \text{pour tout} \quad z \in \omega ,$$

avec f_j holomorphe dans $\underset{\sim}{C}^2 \setminus (\underset{\sim}{C} \times \{0\}) = \Omega$. Il en résulte que $H(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$.

Cependant les polynômes ne sont pas denses dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$. On peut, soit appliquer le théorème 9, soit remarquer que, pour $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$,

$$\delta_\omega(z_1 , z_2)|1/(\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)| \leqslant 1 ,$$

donc on pourrait approcher les fonctions $(\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)^{-1}$ dans $E(\gamma , \delta_\omega)$. Il existerait donc une suite de polynômes p_n tels que

$$\delta_\omega^\gamma |p_n| \leqslant M \qquad \text{et} \qquad \sup|p_n(z)| \geqslant 1/(|z_2| - |z_1|) ,$$

on aurait alors

$$|p_n(z_1 , z_2)| \leqslant M/(|z_2| - |z_1|)^\gamma \quad \text{dans} \quad |z_1| < |z_2| < (1 + |z_1|)/2 ,$$

d'où

$$|p_n(b/2 \exp i\theta , b)| \leqslant Mz^\gamma/b^\gamma ,$$

donc, d'après le principe du maximum,

$|p_n(0 , b)| \leqslant Mz^\gamma b^{-\gamma}$, c'est-à-dire $|z_2|^\gamma |p_n(0 , z_2)| \leqslant c_1$ sur $|z_2| = b$,

donc dans $|z_2| < b$, ce qui contredit $\sup_n |p_n(0 , z_2)| \geqslant 1/|z_2|$.

Remarque. - Soit h une fonction > 0 sur ω , telle que, pour tout N ,

$\sup_{z\in\omega} h(z)\ \delta_\omega^{-N}(z) < \infty$. Considérons $\mathcal{O}(\delta_\omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_h = \sup_{z\in\omega} h(z)\,|f(z)| \quad .$$

Le problème classique de Bernstein consiste, dans notre cadre, à se demander à quelles conditions, sur h , les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta_\omega)$ muni de la norme $\|\ \|_h$. On a trouvé ici une condition suffisante :

$$\delta_\omega \approx \hat{\delta}\ , \qquad \text{avec}\ -\log\hat{\delta}(z) = (\sup \psi_i)^*\ (z) \quad \text{pour tout}\quad z\in\omega\ ,$$

avec ψ_i p. s. h. dans $\underset{\sim}{C}^n$, et $\exp\psi_i$ à croissance polynomiale.

<u>Exemple</u>. - On peut prendre $h(z) = [\exp(-\ (\log\delta_\omega(z))^2)]$.

3. Approximation par des fonctions à croissance tempérée.

Dans cette partie, on cherche à approcher, pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, les fonctions de $H(\omega)$ par les fonctions de $\mathcal{O}(\delta)$. Comme précédemment, soient δ lipschitzienne de rapport 1 dans $\underset{\sim}{C}^n$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, et $\omega = \{z \mid \delta(z) > 0\}$; on suppose que ω est un domaine d'holomorphie.

THÉORÈME 12. - <u>Si</u> $-\log\delta$ <u>est p. s. h. dans</u> ω , $\mathcal{O}(\delta)$ <u>est dense dans</u> $H(\omega)$, <u>pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.</u>

La démonstration suit, avec quelques modifications évidentes, celle du théorème 4.4.4 de [5], où $\omega = \underset{\sim}{C}^n$, et on montre alors que les fonctions entières avec une certaine croissance sont denses dans $H(\underset{\sim}{C}^n)$.

<u>Démonstration</u>. - On sait qu'une topologie équivalente sur $H(\omega)$ est celle de la convergence L^2 sur tout compact. Donc, soit $v\in L^2(K)$ orthogonal aux éléments de $\mathcal{O}(\delta)$, et montrons qu'il est orthogonal à $H(\omega)$.

Posons

$$L(u) = \int u\bar{v}\ d\lambda(z)\ , \qquad \text{pour}\quad u\in H(\omega)\quad ;$$

on a $L(u) = 0$, si $u\in\mathcal{O}(\delta)$. Soit

$$K_R = \{z \mid \delta(z) \geqslant R\}\quad ,$$

on a $\Omega = \cup_{R>0} K_R$; on peut supposer v nulle hors de K_{R_0} . Posons

$$\varphi_N = -\log\delta + \log(1+|z|^2) - NX(\log\delta)\quad ,$$

où X est une fonction convexe nulle sur $(-\infty\ ,\ -\log R_0)$ et linéaire sur $(-\log R\ ,\ +\infty)$. Puisque $-\log\delta$ est p. s. h., on a

$$\sum_{j,h} (\partial^2 \varphi_N)/(\partial z_j \, \partial \bar{z}_h) \, w_j \, \bar{w}_h \geqslant (\sum_j |w_j|^2)(1 + |z|^2)^{-2} , \qquad 1 \leqslant j , h \leqslant n .$$

Considérons l'opérateur $T = \bar{\partial}$ de

$$L_{(0,0)}(\omega , \exp(- \varphi_N)) \longmapsto L_{(0,1)}(\omega , \exp(- \varphi_N) \, \delta_0^4) .$$

Le noyau de cet opérateur est constitué par les fonctions holomorphes dans ω telles que $\int |u|^2 \exp(- \varphi_N) \, d\lambda(z) < \infty$, et, d'après le lemme 6 (b), ces fonctions sont dans $\mathcal{O}(\delta)$. v étant orthogonal à $\mathcal{O}(\delta)$, $v(\exp \varphi_N)$ est orthogonal à ker T dans $L^2(\omega , \exp(- \varphi_N))$. D'après le théorème 2.2.1' de [4], Im T est fermé, donc Im T^* aussi (T^* est le transposé de T). Or ker T = Im T^* , donc il existe $f \in L^2_{(0,1)}(\omega , \exp(- \varphi_N) \, \delta_0^4)$ telle que $T^* f = v(\exp \varphi_n)$. Si on traduit l'équation $T^* f = v(\exp \varphi_N)$, on a, au sens des distributions,

$$\sum_j \partial/\partial z_j \, (f_{N,j} \exp(- \varphi_N)) = - v , \qquad \text{si} \quad f_N = \sum_j f_{N,j} \, d\bar{z}_j , \quad 1 \leqslant j \leqslant n .$$

Posons $g_N = f_N \exp(- \varphi_N)$, on a

$$\sum_j \partial/\partial z_j \, (g_{N,j}) = - v , \qquad 1 \leqslant j \leqslant n ,$$

avec

$$\int_\omega |g_N|^2 \, (1 + |z|^2)^{-2} \exp(\varphi_N) \, d\lambda(z) \leqslant \int_\omega |v|^2 \exp(\varphi_N) \, d\lambda \leqslant c ,$$

puisque v est à support dans K_{R_0} . Soit g la limite faible de g_N . Comme φ_N croît avec N et tend vers l'infini hors de K_{R_0} , g est nulle hors de K_{R_0} , et

$$\sum_j \partial/\partial z_j \, (g) = - v , \quad 1 \leqslant j \leqslant n , \quad \text{au sens des distributions} .$$

Donc, si $u \in \mathcal{D}(\omega)$,

$$\int u\bar{v} \, d\lambda = \sum_j \int \partial u/\partial \bar{z}_j \, \bar{g}_j \, d\lambda , \qquad 1 \leqslant j \leqslant n .$$

Soient $u \in H(\omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\psi = 1$ au voisinage de K_{R_0} ,

$$L(u) = \int_\omega u\bar{v} = \int_\omega u\psi.\bar{v} = \sum_j \int_{K_{R_0}} (\partial(u\psi))/\partial \bar{z}_j \, g_j \, d\lambda = 0 , \qquad 1 \leqslant j \leqslant n ,$$

d'où le résultat de densité.

COROLLAIRE 13. - <u>Pour tout compact</u> $K \subset \omega$, <u>soit</u>

$$\hat{K}_\delta = \{z \mid z \in \omega , \ |f(z)| \leqslant \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| \ \underline{\text{pour toute}} \ f \in \mathcal{O}(\delta)\} ;$$

$\hat{K}_\delta$ <u>est compact.</u>

Démonstration. - Puisque ω est un domaine d'holomorphie, l'enveloppe holomorphiquement convexe $\widetilde{K}$ de K est compacte, et la propriété d'approximation du théorème 12 permet facilement de conclure que $\widetilde{K} = \hat{K}_\delta$.

Remarque. - Ce résultat généralise le théorème 5 de [7], où l'on suppose que ω est borné, et où on montre alors que

$$\hat{K}_H = \{z \mid z \in \omega , \ |f(z)| \leqslant \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| \text{ pour toute } f \in H\}$$

est compact, si H est la famille de fonctions holomorphes dans ω vérifiant $|f(z)| \leqslant \exp(\log^2 \delta_\omega(z))$. Il est clair que l'espace vectoriel engendré par H contient $\mathcal{O}(\delta)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREMERMANN (H. J.). - Die Charakteriesierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonic Funktionen, Math. Annalen, t. 136, 1958, p. 173-186.

[2] CNOP (I.). - A theorem concerning holomorphic function with bounded growth, Thèse Sc. math. Bruxelles, 1970 (à paraître).

[3] FERRIER (J.-P.). - Approximation des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes avec croissance, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 722-724.

[4] HÖRMANDER (L.). - L^2 estimates and existence theorems for $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., Uppsala, t. 113, 1965, p. 89-152.

[5] HÖRMANDER (L.). - An introduction to complex analysis in several variables. - New York, D. Van Nostrand Company, 1966 (The University Series in higher Mathematics).

[6] LELONG (P.). - Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). - Montréal, Presses de l'Université de Montréal, 1968 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1967, 28).

[7] NARASHIMAN (R.). - Cohomology with bounds on complex spaces, Several complex variables, I ; p. 141-150. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 155).

[8] TAYLOR (B. A.). - On weighted polynomial approximation of entire functions, Pacific J. of Math., t. 36, 1971, p. 523-539.

(Texte reçu le 13 juillet 1971)

Nessim SIBONY
20 rue de la Glacière
75 - PARIS 13