Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Goullet de Rugy
Claudy Schol-Cancelier
Brenda Taylor-MacGibbon

Quelques résultats nouveaux sur les points extrémaux d'un simplexe compact

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 2 (1970-1971), exp. n° 18, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_2_A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 18 , 13 p.

1er avril 1971

QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX SUR LES POINTS EXTRÉMAUX D'UN SIMPLEXE COMPACT

par

Alain GOULLET de RUGY, Claudy SCHOL-CANCELIER
et Brenda TAYLOR-MacGIBBON

1. Introduction. - Le présent travail résume les principaux résultats obtenus par un groupe de travail réunissant les trois auteurs. Dans ce groupe ont été développées et mises au point quelques idées proposées par le premier des auteurs.

Dans la première partie, on étudie deux nouveaux procédés de construction de simplexes compacts. Le premier, décrit au § II, montre que, si X est un simplexe compact, et F une face fermée de X , il existe un simplexe compact Y dont l'ensemble des points extrémaux $\mathcal{E}(Y)$ est homéomorphe à $(\mathcal{E}(X) \setminus F)$. Le second, décrit au § III, associe à une famille quelconque $(X_i)_{i\in I}$ de simplexes, un simplexe X tel que $\mathcal{E}(X)$ s'écrive $\mathcal{E}(X) = (\bigcup_{i\in I} Z_i) \cup \{x_0\}$, où chaque Z_i est homéomorphe à $\mathcal{E}(X_i)$.

Dans la seconde partie, on étudie quelques familles remarquables de simplexes analytiques. Au § IV, on montre surtout (théorème 23) que tout simplexe compact X , dont l'ensemble des points extrémaux $\mathcal{E}(X)$ est un espace de Lindelöf, est un simplexe analytique. Enfin, au § V, on améliore sensiblement quelques résultats de ROGALSKI, montrés initialement pour les simplexes analytiques réguliers.

I. Notations et rappels.

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, X désignera un simplexe compact, et $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble de ses points extrémaux.

On note $C(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X , $A(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur X , et $S(X)$ l'espace des fonctions convexes continues sur X . On note $\mathcal{B}(X)$ (resp. $\mathcal{A}(X)$) l'espace des fonctions bornées de Baire (resp. de Baire-affines) sur X , c'est-à-dire le plus petit espace de fonctions bornées sur X , stable par limite simple de suites et contenant $C(X)$ (resp. $A(X)$).

Si $f \in S(X)$, on pose :

(I.1) $$\hat{f} = \inf\{\ell \in A(X) \ ; \ \ell \geq f\} .$$

Rappelons que, comme X est simplexe, $\hat{f}$ est affine s. c. s. ([10, théorème 5.12).

Si F est une face fermée de X, on note F', et on appelle face complémentaire de F, la réunion des faces de X ne rencontrant pas F. Rappelons (cf. [10], corollaire 4.18) que tout $x \in X$ s'écrit $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ avec $y \in F$, $z \in F'$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Cette écriture est unique lorsque $x \notin (F \cup F')$.

Enfin, notons $A(X)'_+$ la partie positive du dual de $A(X)$. On sait qu'on peut identifier X à l'ensemble des éléments de $A(X)'_+$ de norme égale à 1. Aussi, nous désignerons par la même lettre x un point de X ou l'application $f \to f(x)$ $(f \in A(X))$. On notera que, puisque X est un simplexe, $A(X)'_+$ est un cône réticulé.

II. Construction d'un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est un ouvert facial donné.

Dans ce paragraphe, nous allons résoudre le problème suivant.

2. Problème. - Soit F une face fermée de X. Existe-t-il un simplexe compact Y dont l'ensemble des points extrémaux soit homéomorphe à $(\mathcal{E}(X) \setminus F)$?

3. Réduction du problème. - Dans [15], ROGALSKI a construit un simplexe Y ayant un point extrémal privilégié y_0 tel que $(\mathcal{E}(Y) \setminus \{y_0\})$ soit homéomorphe à $(\mathcal{E}(X) \setminus F)$. Autrement dit, à un point extrémal près, il a résolu le problème 2. Pour le résoudre complètement, il nous suffit donc d'examiner le cas où F se réduit à un point extrémal a.

4. Notations. - Désormais a désignera un point extrémal fixe de X. Pour simplifier, on pose $G = \{a\}'$.

Fixons $x_0 \in G$ non extrémal, et posons :

$$D = \{f \in A(X) \ ; \ f(a) = f(x_0)\} .$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de $A(X)$ contenant les constantes. Posons

$$Y = \{L \in D'_+ \ ; \ L(1) = 1 = \|L\|\} .$$

C'est un convexe compact pour $\sigma(D', D)$. Enfin, si x est un point de X, considéré comme forme linéaire sur $A(X)$ (cf. I), notons $\delta(x)$ sa restriction à D, et δ l'application $x \mapsto \delta(x)$ de X dans Y.

5. LEMME. - L'application δ est une application affine surjective et continue de X sur Y.

Démonstration. - Comme X et Y sont munis respectivement des topologies faibles $\sigma(A(X)', A(X))$ et $\sigma(D', D)$, l'application δ est affine continue. Cela étant, prenons $y \in Y$. Comme $1 \in D$, le théorème de Hahn-Banach (forme analytique, [1], p. 83) montre que y se prolonge en une forme linéaire positive $\tilde{y}$ sur $A(X)$. Comme $\tilde{y}(1) = y(1) = 1$, on a $\|\tilde{y}\| = 1$, soit $\tilde{y} \in X$, ce qui prouve la surjectivité.

6. LEMME. - La restriction à G de l'application δ est injective.

Démonstration. - Soient x et $y \in G$ vérifiant $\delta(x) = \delta(y)$, c'est-à-dire dont les restrictions à D coïncident. Comme D est l'hyperplan $(a - x_0)^{-1}(0)$, il existe un réel tel que $x - y = k(a - x_0)$, d'où

$$x + kx_0 = y + ka .$$

Comme X est la base du cône réticulé $A(X)'_+$, il résulte du lemme de décomposition de Riesz qu'il existe z_1 et z_2 dedans tels que $ka = z_1 + z_2$, avec $z_1 \leq x$ et $z_2 \leq kx_0$. Comme $z_2 \leq ka$, on a $z_2 \leq k.\inf(x_0, a)$, de sorte que, comme x_0 et a sont étrangers ([10], p. 11), $z_2 = 0$. De la même façon, on voit que $z_1 = 0$, d'où $ka = 0$, soit $k = 0$. Finalement, $x = y$.

7. LEMME. - L'application δ restreinte à G est une bijection affine de G sur Y.

Démonstration. - Compte tenu du lemme précédent, seule la surjectivité est à vérifier. Soit $y \in Y$. D'après le lemme 5, il existe $x \in X$ tel que $\delta(x) = y$. Par ailleurs, comme a est extrémal, $\{a\}$ est une face fermée. On a donc une écriture

$$x = \alpha a + (1 - \alpha) g , \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ et } g \in G .$$

Considérons alors l'élément $g' = \alpha x_0 + (1 - \alpha) g$. On a $g' \in G$ et

$$\delta(g') = \alpha\delta(x_0) + (1 - \alpha)\, \delta(g) = \alpha\delta(a) + (1 - \alpha)\, \delta(g) = \delta(x) = y .$$

8. LEMME. - L'application δ restreinte à $\mathcal{E}(G) = (\mathcal{E}(X) \setminus \{a\})$ est un homéomorphisme de $\mathcal{E}(G)$ sur $\mathcal{E}(Y)$.

Démonstration. - Par les lemmes 5 et 7, on sait déjà que l'application δ est une bijection continue de $\mathcal{E}(G)$ sur $\mathcal{E}(Y)$. Reste à voir que δ, restreinte à $\mathcal{E}(G)$, est fermée. Pour cela, il nous suffit de montrer que si F est un fermé de X, on a

$$\delta(F \cap \mathcal{E}(G)) = \delta(F) \cap \mathcal{E}(Y) . \tag{8.1}$$

En effet, comme F est compact, $\delta(F)$ est compact, donc fermé dans Y, et (8.1) prouvera que $\delta(F \cap \mathcal{E}(G))$ est fermé dans $\mathcal{E}(Y)$. Vérifions (8.1). Comme clairement $\delta(F \cap \mathcal{E}(G)) \subset \delta(F) \cap \mathcal{E}(Y)$, seule reste à vérifier l'inégalité inverse.

Soit $y \in \delta(F) \cap \mathcal{E}(Y)$. On a $y = \delta(x)$ pour un $x \in F$. Par ailleurs, x s'écrit

$$x = \alpha a + (1 - \alpha)\, g \text{ , avec } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ et } g \in G \text{ ,}$$

d'où

(8.2) $$y = \alpha\delta(a) + (1 - \alpha)\, \delta(g) \text{ .}$$

Comme $\delta(a) = \delta(x_0)$, et comme x_0 n'est pas extrémal dans G , par hypothèse, $\delta(x_0)$ n'est pas extrémal dans Y , d'après le lemme 7. Par contre, comme y est extrémal, l'égalité (8.2) n'est possible qu'avec $\alpha = 0$. Ainsi $x = g \in G$. Il résulte alors du lemme 7 que $x \in \mathcal{E}(G)$. Finalement, $y \in \delta(F \cap \mathcal{E}(G))$.

9. THÉORÈME. - <u>Soit</u> F <u>une face fermée d'un simplexe compact</u> X . <u>Alors, il existe un simplexe compact</u> Y <u>et une surjection affine continue</u> δ <u>de</u> X <u>sur</u> Y , <u>dont la restriction à</u> $(\mathcal{E}(X) \setminus F)$ <u>est un homéomorphisme de</u> $(\mathcal{E}(X) \setminus F)$ <u>sur</u> $\mathcal{E}(Y)$.

<u>Démonstration</u>. - Considérons d'abord le simplexe Z , quotient de X par F (cf. [15]). Il existe une surjection affine continue φ de X sur Z dont la restriction à $(\mathcal{E}(X) \setminus F)$ est un homéomorphisme de $(\mathcal{E}(X) \setminus F)$ sur $(\mathcal{E}(Z) \setminus \{z_0\})$, où z_0 est un point extrémal convenable de Z (théorème 12 de [15]). On est ainsi ramené à prouver le théorème lorsque F se réduit à un point extrémal a . Ceci résulte immédiatement des lemmes précédents. Il y a seulement à vérifier que le convexe Y obtenu est un simplexe. Or Y est affinement isomorphe à la face $G = \{a\}'$ de X . Comme X est un simplexe, G est un simplexe (proposition 2.8 de [10]). Ainsi Y est un simplexe.

10. <u>Problème</u>. - Peut-on, dans le théorème 9, remplacer F par une suite (F_n) de faces fermées ? Autrement dit, existe-t-il un simplexe Y dont l'ensemble des points extrémaux soit homéomorphe au G_δ facial $(\mathcal{E}(X) \setminus \bigcup_n F_n)$? Lorsque X est un simplexe de Bauer métrisable, CHOQUET affirme que la réponse est positive (cf. CHOQUET [3], théorème 29.9).

III. <u>La somme directe d'une famille de simplexes compacts</u>.

Donnons d'abord la définition de la somme directe d'une famille $\{X_i\}_{i \in I}$ de convexes compacts.

Pour chaque $i \in I$, soit X_i un convexe compact contenu dans un espace localement convexe séparé E_i . Supposons que, pour chaque i , il existe un hyperplan fermé $\{f_i = 1\}$ tel que $X \subset \{f_i = 1\}$. Soit Y_i l'enveloppe convexe de $\{0\}$ et de X_i , et soit $\tilde{X}_i$ le cône engendré par Y_i pour chaque i .

Soit $E = \prod_i E_i$, $i \in I$, muni de la topologie produit. Alors $Z = \prod_i \tilde{X}_i \subset \prod_i E_i$, $i \in I$, est un cône faiblement complet.

Pour chaque i , soit p_i la projection $p_i : Z \to \tilde{X}_i$. Considérons la jauge suivante j sur Z : $j = \sum_i f_i \circ p_i$, $i \in I$.

11. LEMME. - j définit un chapeau de Z , c'est-à-dire que l'ensemble $C = \{j \leq 1\}$ est un convexe compact de Z et que $(Z \setminus C)$ est convexe.

Démonstration. - Il suffit de démontrer que C est compact. On a

$$C \subset \bigcap_{i\in I} \{f_i \circ p_i \leq 1\} \cap Z .$$

Or $z = \{z_i\}_{i\in I} \in Z$, et si $f_i \circ p_i(z) = f_i(z_i) \leq 1$, alors $z_i \in Y_i$. Donc $C \subset \prod_{i\in I} Y_i$ (compact). Comme j est s. c. i., C est fermé, et donc compact.

12. Définition. - On appelle somme directe des convexes compacts $\{X_i\}_{i\in I}$, l'ensemble $C = \{j \leq 1\}$. On le note $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

13. PROPOSITION. - Pour que $\bigoplus_{i\in I} X_i$ soit un simplexe, il faut et il suffit que chaque X_i soit un simplexe.

Démonstration. - Supposons que chaque X_i soit un simplexe. Alors, chaque cône $\tilde{X}_i$ est réticulé, par définition d'un simplexe, et par suite, leur produit Z est réticulé. Ainsi la somme directe des X_i , qui est un chapeau de Z , est un simplexe (cf. [13], p. 93). Inversement, supposons que $\bigoplus_{i\in I} X_i$ soit un simplexe compact. Pour chaque $i \in I$, soit q_i l'injection de X_i dans Z , définie par $q_i(x_i) = (0 , 0 , \ldots , 0 , x_i , 0 , \ldots)$. Alors q_i définit un isomorphisme entre X_i et $q_i(X_i)$. Pour chaque $i \in I$, $q_i(X_i)$ est une face fermée de $\bigoplus_{i\in I} X_i$. Donc $q_i(X_i)$ est un simplexe compact (cf. [10], p. 15).

14. PROPOSITION. - Soit $\bigoplus_{i\in I} X_i$ la somme directe d'une famille $\{X_i\}_{i\in I}$ de simplexes compacts. Alors l'ensemble des points extrémaux de $\bigoplus_{i\in I} X_i$ est égal à $\bigcup_{i\in I} q_i(\mathcal{E}(X_i)) \cup \{0\}$, où $\mathcal{E}(X_i)$ désigne l'ensemble des points extrémaux de X_i , et $\{0\}$ désigne le point $(0 , 0 , \ldots)$ de Z .

Démonstration. - Soit $x = (0 , \ldots , x_j , 0 , \ldots)$, où $x_j \in \mathcal{E}(X_j)$ et $f_j(x_j) = 1$. Supposons que $x = (y + z)/2$, où $y , z \in \bigoplus_{i\in I} X_i$. Alors

$$y = \{y_i\}_{i\in I} \quad \text{et} \quad z = \{z_i\}_{i\in I} .$$

On a $y_i = x_i = 0$ pour tous $i \neq j$, et on a $y_i = z_i = x_i$. Donc $x \in \mathcal{E}(\bigoplus_{i\in I} X_i)$.

Soit $x = \{x_i\}_{i\in I} \in \mathcal{E}(\bigoplus_{i\in I} X_i)$. Si $x \neq \{0\}$, il y a deux cas à considérer.

Premier cas : Tous les $x_i = 0$ sauf pour $i = i_0$. Parce que x est extrémal, $x \in (\mathcal{E}_g(Z) \cap \{j = 1\}$, où $\mathcal{E}_g(Z)$ désigne la réunion des génératrices extrémales de Z . Mais $j(x) = 1$ entraîne que $j(x) = \sum_{i\in I} f_i \circ p_i(x) = f_{i_0}(x_{i_0}) = 1$. Donc $x_{i_0} \in (\mathcal{E}_g(\tilde{X}_{i_0}) \cap \{f_{i_0} = 1\}$, et donc $x_{i_0} \in \mathcal{E}(X_{i_0})$.

Deuxième cas : $x = (\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots)$, où $f_i(x_i) = \alpha > 0$, $f_j(x_j) = \beta > 0$ et chaque $\alpha, \beta < 1$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \alpha$ et $\varepsilon < \beta$. Soit

$$y = (y_1, \ldots, (1 - (\varepsilon/\alpha))\, x_i, \ldots, (1 + (\varepsilon/\beta))\, x_j, \ldots)$$

et

$$z = (z_1, \ldots, (1 + (\varepsilon/\alpha))\, x_i, \ldots, (1 - (\varepsilon/\beta))\, x_j, \ldots),$$

où $y_k = z_k = x_k$ pour tous $k \neq i$ et $k \neq j$. On a y et $z \in \bigoplus_{i\in I} X_i$ et $x = (y + z)/2$. Alors $x \notin \mathcal{E}(\bigoplus_{i\in I} X_i)$. Donc $\mathcal{E}(\bigoplus_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} q_i(\mathcal{E}(X_i)) \cup \{0\}$.

IV. Propriétés des convexes et simplexes compacts, dont l'ensemble des points extrémaux est Lindelöf.

15. Définition. - Soit T un espace topologique. On dit que T est un espace de Lindelöf si, de tout recouvrement ouvert de T, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable.

16. PROPOSITION. - *Soit X un convexe compact dont l'ensemble des points extrémaux soit un espace de Lindelöf. Alors, pour tout compact K disjoint de $\mathcal{E}(X)$ et toute mesure maximale θ, on a $\theta(K) = 0$.*

Démonstration. - Pour tout $x \in \mathcal{E}(X)$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dont l'adhérence ne rencontre pas K. Comme $\mathcal{E}(X)$ est Lindelöf, il existe une suite (x_n) dans $\mathcal{E}(X)$ telle que $\bigcup_n U_{x_n}$ recouvre $\mathcal{E}(X)$. Ainsi $\bigcup_n \overline{U_{x_n}}$ est un K_σ contenant $\mathcal{E}(X)$. Par suite, la mesure maximale θ est portée par ce K_σ. Comme il ne rencontre pas K, on a nécessairement $\theta(K) = 0$.

17. Définition. - On dit qu'une fonction réelle f sur un convexe compact X satisfait au calcul barycentrique si :

(a) f est universellement mesurable ;

(b) Pour toute mesure de Radon θ positive et de masse 1 sur X, on a $\theta(f) = f(x)$, où x est la résultante de θ.

18. COROLLAIRE. - *Soit X un convexe compact dont l'ensemble des points extrémaux soit un espace de Lindelöf. Alors, deux fonctions f et g satisfaisant au calcul barycentrique, et coïncidant sur $\mathcal{E}(X)$, coïncident partout.*

Démonstration. - Soient A l'ensemble des points où f et g coïncident, et θ une mesure maximale sur X. L'ensemble A est universellement mesurable, en particulier θ-mesurable, et il contient $\mathcal{E}(X)$. Par suite, $\theta(A) = \theta^*(A) \geqslant \theta^*(\mathcal{E}(X))$. D'après la proposition précédente, on a $\theta^*(\mathcal{E}(X)) = 1$, d'où $\theta(A) = 1$. Par suite,

$\theta(f) = \theta(g)$, d'où $f(x) = \theta(f) = \theta(g) = g(x)$, où x est la résultante de θ . Comme tout point de X est résultante d'une mesure maximale, on en déduit que $f = g$.

Le résultat suivant est probablement bien connu. Cependant, faute d'en connaître de référence, nous en donnons la démonstration.

19. PROPOSITION. - Soit T un espace complètement régulier. Alors, pour que T soit un espace de Lindelöf, il faut et il suffit que, de toute famille $\mathfrak{F}$ de fonctions continues sur T , d'enveloppe supérieure égale à une fonction continue f sur T (ou seulement à la fonction constante 1), on puisse extraire une sous-famille dénombrable de même enveloppe supérieure.

Démonstration. - Supposons que T soit un espace de Lindelöf, et prenons $\mathfrak{F}$ et f comme indiqué. Fixons $\varepsilon = 1/n$, pour n entier ≥ 1. Pour tout $t \in T$, il existe une fonction $f_t^n \in \mathfrak{F}$ et un voisinage ouvert U_t^n de t sur lequel $f_t^n \geq f - \varepsilon$. Comme T est Lindelöf, on peut extraire du recouvrement ouvert $(U_t^n)_{t\in T}$ un sous-recouvrement dénombrable $(U_t^n)_{t\in A_n}$, où A_n est une partie dénombrable de T . On en déduit que la sous-famille dénombrable $(f_t^n)_{(t\in A_n),(n\geq 1)}$, a pour enveloppe supérieure la fonction f .

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de T . Pour tout $t \in T$, choisissons un ouvert $U_t \in \mathfrak{U}$, contenant t . Par complète régularité, il existe une fonction continue f_t sur T telle que :

(i) $0 \leq f_t \leq 1$,

(ii) $f_t(t) = 1$,

(iii) $f_t(x) = 0$ pour $x \notin U_t$.

La famille $(f_t)_{t\in T}$ a pour enveloppe supérieure 1 . Par suite, il existe une partie dénombrable A de T telle que la sous-famille $(f_t)_{t\in A}$ ait encore 1 comme borne supérieure. Par suite,

$$T \subset \bigcup_{t\in A} \{f_t > 0\} \subset \bigcup_{t\in A} U_t ,$$

ainsi, $(U_t)_{t\in A}$ est un recouvrement ouvert dénombrable de T , extrait de $\mathfrak{U}$.

C. Q. F. D.

20. Notation. - Soit X un simplexe compact. Pour tout $x \in X$, on note μ_x la mesure maximale de résultante x , et L l'opérateur linéaire défini sur $C(X)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^X$ par la formule

$$L(f)(x) = \mu_x(f) .$$

21. Définition. - On dit que X est un simplexe analytique si $L(C(X)) \subset \mathfrak{A}(X)$.

Ces simplexes ont été étudié en détail par ROGALSKI dans [14]. En particulier, il a montré qu'ils sont identiques aux simplexes de Lion. La preuve qu'un simplexe est analytique est rendue facile par le résultat suivant, de démonstration aisée, et que nous admettrons (cf. [14], p. 480).

22. PROPOSITION. - Pour un simplexe compact X , les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) X est analytique ;

(b) $\mathfrak{a}(X)$ est réticulé pour son ordre propre ;

(c) Pour toute $f \in S(X)$, $\hat{f}$ est de première classe de Baire-affine.

23. THÉORÈME. - Tout simplexe compact X , dont l'ensemble des points extrémaux est un espace de Lindelöf, est un simplexe analytique.

Démonstration. - Il nous suffit de montrer le (c) de la proposition précédente. Prenons $f \in S(X)$, et notons $\mathfrak{F} = \{\ell \in A(X) ; \ell \geq f\}$. Comme X est un simplexe, il résulte du théorème d'Edwards que la famille $\mathfrak{F}$ est filtrante décroissante. De plus, sa borne inférieure est $\hat{f}$. Cela étant, notons $\mathfrak{F}'$ l'ensemble des restrictions à $\mathcal{E}(X)$ des fonctions de $\mathfrak{F}$. La borne inférieure de $\mathfrak{F}'$ est $\hat{f}_{|\mathcal{E}(X)}$. Comme $\hat{f}_{|\mathcal{E}(X)} = f_{|\mathcal{E}(X)}$, cette borne inférieure est continue. Par suite, d'après la proposition 19, il existe une sous-famille dénombrable et filtrante décroissante $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{F}'$ de même enveloppe inférieure. Notons $\mathfrak{G}$ la sous-famille de $\mathfrak{F}$ dont les restrictions à $\mathcal{E}(X)$ sont dans $\mathfrak{G}'$. D'après KREJN-MIL'MAN, $\mathfrak{G}$ est dénombrable et filtrante décroissante. Par suite, sa borne inférieure g est affine s. c. s. et de première classe de Baire-affine. De plus, par construction, $g_{|\mathcal{E}(X)} = \hat{f}_{|\mathcal{E}(X)}$. Or, on sait, avec le principe du maximum de Bauer, que deux fonctions affines s. c. s. qui coïncident sur $\mathcal{E}(X)$ coïncident partout. On a donc $\hat{f} = g$, ce qui achève la démonstration.

24. COROLLAIRE (H. FAKHOURY). - Un simplexe compact dont l'ensemble des points extrémaux est $\mathcal{K}$-analytiques est un simplexe analytique.

Démonstration. - Cela résulte de ce que tout ensemble $\mathcal{K}$-analytique est un espace de Lindelöf (voir SION [16]).

25. Remarques.

(a) La démonstration du théorème 23 proposée ici est plus intuitive que celle proposée par H. FAKHOURY [7], et qui utilise les capacités fonctionnelles. Par ailleurs, le théorème 23 est effectivement plus général que le corollaire 24, car il existe des simplexes X tels que $\mathcal{E}(X)$ soit Lindelöf sans être $\mathcal{K}$-analytique (cette remarque a été faite par Brenda TAYLOR-MacGIBBON).

(b) De la proposition 16, on déduit le résultat classique de CHOQUET-MEYER ([2], corollaire 18).

26. Propriétés de permanence. - Contrairement aux simplexes analytiques, on ignore si les convexes compacts dont l'ensemble des points extrémaux est Lindelöf sont stables par produit tensoriel ou limite projective dénombrable (cf. [8]). Cela tient à ce qu'un produit V d'espaces de Lindelöf n'est pas en général un espace de Lindelöf. Par contre, comme l'image continue d'un espace de Lindelöf est du même type, l'image directe ([8], définition 2) d'un convexe compact, dont l'ensemble des points extrémaux est Lindelöf, a la même propriété. Enfin, pour ce qui est de la somme directe, on a le résultat suivant.

27. PROPOSITION. - Soit X la somme directe $\bigoplus_{i\in I} X_i$ d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de convexes compacts. Alors, pour que $\mathcal{E}(X)$ soit un espace de Lindelöf, il faut et il suffit que $\mathcal{E}(X_i)$ soit un espace de Lindelöf pour tout $i \in I$.

Démonstration. - Supposons que $\mathcal{E}(X)$ soit un espace de Lindelöf, et soit $i \in I$. Avec les notations de la démonstration de la proposition 13, $\mathcal{E}(X_i)$ est homéomorphe à $q_i(\mathcal{E}(X_i))$ qui est un fermé de $\mathcal{E}(X)$. Comme un fermé d'un espace de Lindelöf est encore un espace de Lindelöf, il en résulte que $\mathcal{E}(X_i)$ est un espace de Lindelöf. Inversement, supposons que, pour tout $i \in I$, $\mathcal{E}(X_i)$ soit un espace de Lindelöf, et soit $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de $\mathcal{E}(X)$. Rappelons que, d'après la proposition 14, on a

$$\mathcal{E}(X) = \{0\} \cup (\bigcup_{i\in I} q_i(\mathcal{E}(X_i))) .$$

Il existe donc un α_0 tel que U_{α_0} contienne $\{0\}$. Mais alors, vu la topologie X, il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour tout $i \notin J$, U_{α_0} contienne $q_i(\mathcal{E}(X_i))$. Cela étant, pour $j \in J$, $q_j(\mathcal{E}(X_j))$ est un espace de Lindelöf, et il existe une partie dénombrable A_j de A telle que $(U_\alpha)_{\alpha\in A_j}$ recouvre $q_j(\mathcal{E}(X_j))$. Finalement, la famille d'ouverts

$$\{U_{\alpha_0} , \bigcup_{j\in J} (U_\alpha)_{\alpha\in A_j}\}$$

est un sous-recouvrement ouvert dénombrable de $\mathcal{E}(X)$.

C. Q. F. D.

28. Remarque. - On sait que c'est un problème ouvert de construire un convexe compact X, dont l'ensemble des points extrémaux $\mathcal{E}(X)$, soit un $\mathcal{K}$-borélien sans être un $K_{\sigma\delta}$, ou $\mathcal{K}$-analytique sans être $\mathcal{K}$-borélien.

Les méthodes de construction de convexes compacts proposées aux § II et III ne semblent pas faire avancer la solution de ce problème. Ainsi; par exemple, si on prend une famille quelconque (X_i) de convexes compacts tels que $\mathcal{E}(X_i)$ soit un $K_{\sigma\delta}$, alors l'ensemble des points extrémaux de leur somme directe est encore un $K_{\sigma\delta}$.

29. Problème. - Soit X un convexe compact tel que $\mathcal{E}(X)$ soit Lindelöf. D'après le théorème 27.9 de CHOQUET [3], $\mathcal{E}(X)$ est fortement α-favorable. D'où le problème : Caractériser les espaces topologiques qui sont à la fois Lindelöf et fortement α-favorables, en particulier de Baire.

V. Les simplexes analytiques pré-réguliers.

30. Définition. - On dit qu'un simplexe compact X est pré-régulier (resp. pré-régulier de type zéro) si, pour toute fonction continue bornée f sur $\mathcal{E}(X)$, il existe une suite de fonctions dans $\mathcal{B}(X)$ (resp. dans $\mathcal{C}(X)$) qui converge simplement vers f sur $\mathcal{E}(X)$.

Dans [14], définition 75, ROGALSKI a défini les simplexes réguliers, pour généraliser quelques résultats d'ALFSEN sur les simplexes métrisables. Ces simplexes sont pré-réguliers en notre sens, mais jouissent d'une propriété supplémentaire. En fait, et c'est l'objet de ce paragraphe, nous allons voir que cette propriété est superflue.

31. LEMME. - Soit X un simplexe compact pré-régulier. Alors, toute fonction de Baire bornée sur $\mathcal{E}(X)$ est la restriction à $\mathcal{E}(X)$ d'une fonction de $\mathcal{B}(X)$.

Démonstration. - Supposons d'abord que f soit continue et bornée sur $\mathcal{E}(X)$. Par définition, il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{B}(X)$, qui converge simplement vers f sur $\mathcal{E}(X)$. Sans restriction, on peut supposer que $-M \leqslant f_n \leqslant M$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, pour une certaine constante $M > 0$. Posons alors

$$g = \limsup_{n \to \infty} (f_n) .$$

Cette fonction est dans $\mathcal{B}(X)$ et sa restriction à $\mathcal{E}(X)$ est égale à f. A partir de là, en raisonnant par récurrence transfinie sur les ordinaux dénombrables, on en déduit le résultat cherché.

32. LEMME. - Soit X un convexe compact. Pour toute fonction $f \in \mathcal{A}(X)$, on a

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| , \ x \in \mathcal{E}(X)\} . \tag{32.1}$$

Démonstration. - Notons d'abord qu'une fonction de $\mathcal{A}(X)$ satisfait au calcul barycentrique ([8], prop. 26). Par suite, elle est bornée. On peut donc supposer $f \geqslant 0$. Notons α le second membre de (32.1), et posons $T = \{f \leqslant \alpha\}$. C'est un ensemble de Baire, donc un $\mathcal{K}$-borélien contenant $\mathcal{E}(X)$. Par suite, d'après [2], proposition 19, toute mesure maximale est portée par T . Finalement, soient $x \in X$ et θ la mesure maximale de résultante x . D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$f(x) = \theta(f) \leqslant \alpha.\theta(T) = \alpha \ ,$$

d'où $\|f\| \leqslant \alpha$. L'inégalité inverse étant vraie, l'égalité (32.1) est démontrée.

33. Définition. - Soient X un convexe compact, et F une face de X . On dit que F est $\mathcal{A}(X)$-*exposée* si F est l'ensemble des points où une fonction de $\mathcal{A}(X)$ atteint son maximum.

34. LEMME. - *Soient X un simplexe analytique, et F une face $\mathcal{A}(X)$-exposée. Alors, il existe une fonction f de $\mathcal{A}(X)$ dont la restriction à $\mathcal{E}(X)$ est égale à la fonction caractéristique de $F \cap \mathcal{E}(X)$.*

Démonstration. - C'est un conséquence directe de la proposition 22 (b), appliquée au théorème 34 de [9].

35. THÉORÈME. - *Pour un simplexe analytique X , on a les équivalences suivantes :*

(a) X *est pré-régulier ;*

(b) *Toute fonction de Baire sur $\mathcal{E}(X)$ est la restriction d'une (et d'une seule) fonction de $\mathcal{A}(X)$;*

(c) *Tout ensemble de Baire de $\mathcal{E}(X)$ est la trace d'une (et d'une seule) face $\mathcal{A}(X)$-exposée.*

Démonstration. - (a) $\Longleftrightarrow$ (b). Compte tenu du lemme 31 et avec les notations 20, il suffit de montrer que $L(f) \in \mathcal{A}(X)$, dès que $f \in \mathcal{A}(X)$. Or, par récurrence transfinie sur les ordinaux dénombrables, cela résulte de la définition 21. L'unicité, quant à elle, résulte du lemme 32. Elle est indépendante du (a).

(b) $\Longrightarrow$ (c). Soit A un ensemble de Baire de $\mathcal{E}(X)$. D'après le (b), il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(X)$ dont la restriction à $\mathcal{E}(X)$ est égale à la fonction caractéristique de A . Notons F l'ensemble des points où f atteint son maximum. d'après le lemme 32, ce maximum est 1 (pourvu que A soit non vide !). Ainsi F est une face $\mathcal{A}(X)$-exposée dont la trace sur $\mathcal{E}(X)$ est A . L'unicité, quant à elle, résulte du lemme 34 et de l'unicité du (b).

(c) $\Longrightarrow$ (a). D'après le (c) et le lemme 34, toute fonction de Baire en escalier sur $\mathcal{E}(X)$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{A}(X)$. Cela étant, prenons une fonction continue et bornée sur $\mathcal{E}(X)$. Il est bien connu qu'on peut exprimer f sous la forme $f = \sup(f_n)$ pour une suite (f_n) croissante de fonctions de Baire en escalier, majorées par $\|f\|$. D'après ce qu'on vient de dire, chaque f_n se prolonge en une fonction g_n de $\mathcal{A}(X)$. D'après le lemme 32, la suite (g_n) est croissante et majorée par $\|f\|$. Par suite, $g = \lim g_n \in \mathcal{A}(X)$, et sa restriction à $\mathcal{E}(X)$ est f . Ainsi, X est pré-régulier.

36. Remarque. - Ce théorème généralise les théorèmes 76 et 79 de [15], et transforme les propriétés qui y sont énoncées en conditions nécessaires et suffisantes.

Le résultat suivant étend le théorème 77 de [14]. Il figure implicitement dans [14] et se base sur le résultat suivant.

37. THÉORÈME (HAGER [11], p. 156). - Soient T un espace de Lindelöf, et A un sous-anneau de l'espace des fonctions continues bornées de T , contenant les constantes et séparant les points des fermés de T . Alors, toute fonction continue de T est limite simple d'une suite de A .

38. PROPOSITION. - Un simplexe, dont l'ensemble des points extrémaux est un espace de Lindelöf, est pré-régulier de type zéro.

Démonstration. - Il suffit d'appliquer le théorème 37 à $T = \mathcal{E}(X)$ et $A = C_{\mathcal{E}(X)}$ l'espace des restrictions à $\mathcal{E}(X)$ des fonctions de $C(X)$.

39. Remarque. - Il y a des simplexes analytiques qui ne sont pas pré-réguliers.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[2] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 139-154.

[3] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis. Vol. 2. - New York, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[4] EDWARDS (D. A.). - On the homeomorphic affine embedding of a locally compact cone into a Banach dual space endowed with the vague topology, Proc. London math. Soc., t. 14, 1964, p. 399-414.

[5] FAKHOURY (H.). - Une caractérisation des simplexes compacts et des cônes réticulés, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/70, n° 2, 12 p.

[6] FAKHOURY (H.). - Stabilité des simplexes de Lion, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 110-112.

[7] FAKHOURY (H.). - Propriétés des simplexes dont l'ensemble des points extrémaux est $\mathcal{K}$-analytiques, Bull. Sc. math., 2e série, t. 95, 1971, p. 267-272.

[8] GOULLET de RUGY (A.). - Caractère réticulé de certains cônes de fonctions linéaires sur un cône convexe décomposable, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 5, 24 p.

[9] GOULLET de RUGY (A.). - Faces complémentables dans un simplexe, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 6, 21 p.

[10] GOULLET de RUGY (A.). - Géométrie des simplexes. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1971.

[11] HAGER (A. W.). - Approximation of real continuous functions on Lindelöf spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 22, 1969, p. 156-163.

[12] JALLETT (F.). - Homomorphisms and inverse limits of Choquet simplexes, Math. Z., t. 103, 1968, p. 219-226.

[13] PHELPS (R. R.). - Lectures on Choquet's theorem. - New York, D. Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

[14] ROGALSKI (M.). - Opérateur de Lion, projecteurs boréliens et simplexes analytiques, J. of funct. Anal., t. 2, 1968, p. 458-488.

[15] ROGALSKI (M.). - Etude du quotient d'un simplexe par une face fermée et application à un théorème d'Alfsen, quotient par une relation d'équivalence, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 2, 17 p.

[16] SION (M.). - On capacity and mesurability, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 83-98.

(Texte reçu le 12 juillet 1971)

Alain GOULLET de RUGY
10 parc du Château
78 - LOUVECIENNES

Claudy SCHOL-CANCELIER
3 rue Bargue
75 - PARIS 15

Brenda TAYLOR-MacGIBBON
McGill University
Department of Mathematics
MONTREAL, Québec (Canada)