Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Louveau

Ultrafiltres absolus

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 1 (1970-1971), exp. n° 11, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 11, 11 p.

21 janvier 1971

ULTRAFILTRES ABSOLUS

par Alain LOUVEAU

Les recherches récentes concernant les ultrafiltres ont porté principalement dans deux directions : d'une part, essayer de classifier les ultrafiltres ; d'autre part, parmi l'ensemble des ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, essayer de dégager certaines classes d'ultrafiltres intéressantes dans les applications par des propriétés extrémales.

Parmi ces classes d'ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, l'une des plus étudiées est certainement celle des ultrafiltres que j'appellerai absolus. Il n'existait pas d'article faisant le tour des propriétés de ces ultrafiltres, et particulièrement de leurs propriétés caractéristiques (qui se cachent derrière des terminologies différentes suivant les auteurs). C'est cette lacune que cet exposé voudrait combler. Il ne faut donc pas s'attendre à de nombreux résultats nouveaux (à l'exception de certaines démonstrations et de la propriété caractéristique (R_7)) : il s'agit pour l'essentiel d'un travail de mise à jour.

1. Rappels et définition des ultrafiltres absolus.

Nous allons commencer par rappeler quelques propriétés concernant un ordre sur $\beta\mathbb{N}$, appelé ordre de Rudin-Keisler (terminologie de [1]).

DÉFINITION 1. - *Soient* $\mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{G}$ *deux ultrafiltres sur* $\mathbb{N}$. *Nous dirons que* $\mathfrak{F} \geq \mathfrak{G}$ *(pour l'ordre de Rudin-Keisler), s'il existe une application* φ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que* $\varphi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{G}$.

Il est facile de voir que cette relation définit un préordre sur $\beta\mathbb{N}$.

DÉFINITION 2. - *Deux ultrafiltres* $\mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{G}$ *sur* $\mathbb{N}$ *seront dits équivalents (et nous noterons* $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{G}$), *s'il existe une bijection* φ *de* $\mathbb{N}$ *sur* $\mathbb{N}$ *telle que* $\varphi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{G}$.

Il n'est pas immédiat de voir que cette relation d'équivalence est la relation associée au préordre de Rudin-Keisler. C'est une conséquence du lemme suivant.

LEMME de Kenyon-Katětov. - *Soient* X *un ensemble, et* f *une application de* X *dans lui-même. Il existe une partition de* X *en quatre ensembles* X_0 , X_1 , X_2 , X_3 , *vérifiant* :

1° f , *restreinte à* X_0 , *est l'identité* ;
2° *Pour* $i = 1 , 2 , 3$, $f(X_i) \cap X_i = \emptyset$.

COROLLAIRE 3. - *Soit* $\mathfrak{F}$ *un ultrafiltre sur* $\underset{\sim}{N}$, *et soit* φ *une application de* $\underset{\sim}{N}$ *dans* $\underset{\sim}{N}$ *telle que* $\varphi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. *Alors* $\{n \mid \varphi(n) = n\}$ *est un élément de* $\mathfrak{F}$.

COROLLAIRE 4. - *La relation d'équivalence associée au préordre de Rudin-Keisler est la relation* $\sim$.

DÉFINITION 5. - *Un ultrafiltre* $\mathfrak{F}$, *non trivial, sur* $\underset{\sim}{N}$, *sera appelé ultrafiltre absolu, s'il est minimal pour l'ordre de Rudin-Keisler dans l'ensemble des ultrafiltres non triviaux sur* $\underset{\sim}{N}$.

Les ultrafiltres absolus ont été définis et étudiés par G. CHOQUET dans [2]. Il y démontre l'existence d'un ultrafiltre absolu (en admettant l'hypothèse du continu), et la proposition suivante, dont la démonstration est facile :

PROPOSITION 6. - *Soit* $\mathfrak{F}$ *un ultrafiltre non trivial sur* $\underset{\sim}{N}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(A_1) $\mathfrak{F}$ *est un ultrafiltre absolu* ;
(A_2) *Pour toute partition* $\mathcal{P} = (P_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ *de* $\underset{\sim}{N}$, *telle que* $\mathcal{P} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, *il existe un élément* A *de* $\mathfrak{F}$ *tel que, pour tout* $n \in \underset{\sim}{N}$, $\operatorname{card}(P_n \cap A) \leqslant 1$.

Dans ce même article, G. CHOQUET s'intéresse aux ultrafiltres qui vérifient la propriété semblable à (A_2), où les partitions sont remplacées par des recouvrements ponctuellement finis de $\underset{\sim}{N}$ (tout point de $\underset{\sim}{N}$ n'est recouvert que par un nombre fini d'ensembles du recouvrement), c'est-à-dire les ultrafiltres non triviaux qui vérifient :

(A_3) *Pour tout recouvrement ponctuellement fini* $\mathcal{R} = (R_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ *de* $\underset{\sim}{N}$, *tel que* $\mathcal{R} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, *il existe un élément* A *de* $\mathfrak{F}$ *tel que, pour tout* $n \in \underset{\sim}{N}$, $\operatorname{card}(R_n \cap A) \leqslant 1$.

Il est immédiat que ces ultrafiltres sont absolus. Réciproquement, nous démontrerons (théorème 11) que tout ultrafiltre absolu vérifie (A_3).

2. Ultrafiltres de Ramsey.

Nous allons maintenant nous intéresser à une autre classe d'ultrafiltres sur $\underset{\sim}{N}$, qui ont été introduits à partir de travaux et de théorèmes combinatoires, en particulier à partir du théorème de Ramsey, d'où leur nom (cf. [1]).

Introduisons tout d'abord quelques notations. Nous noterons $\overline{\mathcal{P}}(\underset{\sim}{N})$ l'ensemble des parties finies de $\underset{\sim}{N}$, et $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$ l'ensemble des parties de $\underset{\sim}{N}$ de cardinal n .

Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{N}$, nous noterons :

$\mathfrak{F}^{(2)}$ le filtre sur $\underset{\sim}{N}^2$ dont une base est formée des ensembles

$$(F \times F) \cap \{\{m , n\} , m < n\} , \qquad \text{où } F \text{ parcourt } \mathfrak{F} ;$$

$\mathfrak{F}^2$ le filtre sur $\underset{\sim}{N}^2$ dont une base est formée des ensembles

$$\bigcup_{n \in F} (n \times F_n) , \qquad \text{où } F \text{ et les } (F_n)_{n \in F} \text{ parcourent } \mathfrak{F} .$$

La proposition suivante va nous permettre de définir les ultrafiltres de Ramsey. Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre non trivial sur $\underset{\sim}{N}$; et considérons les six énoncés suivants concernant $\mathfrak{F}$:

(R_1) Pour toute famille $(A_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{F}$, il existe une application strictement croissante g de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}$, vérifiant $g(\underset{\sim}{N}) \in \mathfrak{F}$, et, pour tout n , $g(n + 1) \in A_{g(n)}$ (remarquons que nous pouvons toujours supposer la suite $(A_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ décroissante, et $n \notin A_n$).

(R_2) Pour toute partie $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{P}_2(\underset{\sim}{N})$, qui vérifie : Il existe un élément A de $\mathfrak{F}$ tel que, pour tout $n \in A$, l'ensemble $A_n = \{m \mid \{m , n\} \in \mathfrak{M}\}$ est un élément de $\mathfrak{F}$, alors il existe un élément A' de $\mathfrak{F}$ tel que $\mathcal{P}_2(A') \subset \mathfrak{M}$.

(R_3) Le filtre $\mathfrak{F}^{(2)}$ est identique à $\mathfrak{F}^2$.

(R_4) Le filtre $\mathfrak{F}^{(2)}$ est un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{N}^2$.

(R_5) Pour toute fonction f de $\mathcal{P}_2(\underset{\sim}{N})$ dans $\{0 , 1\}$, il existe un élément A de $\mathfrak{F}$ tel que f soit constante sur $\mathcal{P}_2(A)$.

(R_6) Pour tous $m , n \in \underset{\sim}{N}$, et pour toute application f de $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$ dans $\{0 , \ldots , m\}$, il existe un élément A de $\mathfrak{F}$ tel que f soit constante sur $\mathcal{P}_n(A)$.

PROPOSITION 7. - Les implications suivantes sont vraies :

$$(R_1) \Longrightarrow (R_6) \Longrightarrow (R_5) \Longleftrightarrow (R_4) \Longleftrightarrow (R_3) \Longleftrightarrow (R_2) .$$

Nous dirons qu'un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ non trivial sur $\underset{\sim}{N}$ est de Ramsey, s'il vérifie (R_6) (nous démontrerons plus loin, au théorème 11, que l'implication $(R_2) \Longrightarrow (R_1)$ est également vraie, donc que toutes ces propositions sont en fait équivalentes).

Démonstration de la proposition 7. - Les seules implications non triviales sont $(R_3) \Longleftrightarrow (R_4)$ et $(R_1) \Longrightarrow (R_6)$.

Pour démontrer que $(R_3) \iff (R_4)$, il suffit de remarquer que le filtre $\mathfrak{F}^{(2)}$ est toujours moins fin que le filtre $\mathfrak{F}^2$, et, d'autre part, que celui-ci est un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{N}^2$, ce qui est facile à vérifier.

Pour démontrer $(R_1) \implies (R_6)$, nous pouvons supposer $m = 1$ sans diminuer la généralité de (R_6). Nous allons alors démontrer l'implication par récurrence sur n . Tout ultrafiltre vérifie (R_6), pour $n = 1$. Supposons donc l'avoir démontré pour $(n - 1)$, et soit f une application de $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$ dans $\{0 , 1\}$. Pour tous a , A , $a \notin A$, et $A \in \mathfrak{F}$, nous pouvons définir une application f_a de $\mathcal{P}_{n-1}(A)$ dans $\{0 , 1\}$ par $f_a(M) = f(M \cup \{a\})$, $M \in \mathcal{P}_{n-1}(A)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors un ensemble $F(a , A)$ appartenant à $\mathfrak{F}$, contenu dans A , tel que f_a soit constante sur $\mathcal{P}_{n-1}(F(a , A))$. Posons alors, pour $n \in \underset{\sim}{N}$,

$$A_n = F(n , \{m \mid m > n\}) .$$

Comme $\mathfrak{F}$ est non trivial, $\{m \mid m > n\}$ est un élément de $\mathfrak{F}$, et, par suite, les A_n le sont aussi. L'un des deux ensembles

$$A' = \{n \mid f_n \text{ est égale à } 0 \text{ sur } \mathcal{P}_{n-1}(A_n)\}$$

et

$$A'' = \{n \mid f_n \text{ est égale à } 1 \text{ sur } \mathcal{P}_{n-1}(A_n)\}$$

est donc un élément de $\mathfrak{F}$. Nous le notons $A = \{a_n \mid n \in \underset{\sim}{N}\}$. Puisque $\mathfrak{F}$ vérifie (R_1), il existe une application g strictement croissante de A dans A , telle que $g(A) \in \mathfrak{F}$, et, pour tout n , $g(a_{n+1}) \subset A_{g(a_n)}$. $g(A)$ a la propriété désirée : en effet, soit $M \in \mathcal{P}_n(g(A))$,

$$M = \{g(a_{k_1}) , g(a_{k_2}) , \dots , g(a_{k_n})\} .$$

Alors les $g(a_{k_i})$, $i > 1$, sont tous dans $A_{g(a_{k_1})}$, donc

$$f(M) = f_{g(a_{k_1})}(\{g(a_{k_2}) , \dots , g(a_{k_n})\}) ,$$

et f est constante sur $\mathcal{P}_n(g(A))$.

La proposition est donc démontrée.

Nous allons maintenant indiquer une nouvelle propriété des ultrafiltres de Ramsey, encore de caractère combinatoire.

Introduisons quelques nouvelles notions :

DÉFINITION 8. - <u>Une partition</u> $\mathcal{P}$ <u>sur</u> $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$ <u>sera dite fondamentale, s'il existe un entier</u> k , $0 \leqslant k \leqslant n$, <u>et des entiers</u> $\nu_1 , \dots , \nu_k$, $0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k \leqslant n$, tels que, pour tous A et $B \in \mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$, où $A = (a_i)_{i=1}^n$ et $B = (b_i)_{i=1}^n$ (ordonnés par l'ordre de $\underset{\sim}{N}$), $(A \equiv B \ (\mathcal{P})) \iff (\forall i \ , \ 0 \leqslant i \leqslant k \ , \ a_{\nu_i} = b_{\nu_i})$.

(Nous écrirons de préférence $A \equiv B \ (\mathcal{P})$ à : A et B appartiennent au même ensemble de la partition $\mathcal{P}$.)

Soient $(A_i)_{i=1}^n$ et $(B_i)_{i=1}^n$ des familles de parties finies de $\underset{\sim}{N}$. Nous dirons que ces deux familles sont isomorphes pour l'ordre de $\underset{\sim}{N}$, et nous noterons $(A_i)_{i=1}^n | (B_i)_{i=1}^n$, s'il existe une bijection croissante f de $\bigcup_{i=1}^n A_i$ sur $\bigcup_{i=1}^n B_i$, telle que, pour tout i , $f(A_i) = B_i$.

Remarquons que, si $A_1 \subset A_2$, et si B_2 est une partie finie de $\underset{\sim}{N}$ telle que card A_2 = card B_2 , alors $(A_1 , A_2)|(B_1 , B_2)$ définit de façon unique $B_1 \subset B_2$. Nous noterons $B_1 = \varphi_{(A_1,A_2)}(B_2)$.

Soit alors $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre non trivial sur $\underset{\sim}{N}$. Nous dirons que $\mathfrak{F}$ vérifie (R_7), si :

(R_7) Pour tout n , et pour toute partition $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$, il existe un élément A de $\mathfrak{F}$, et une partition fondamentale $\mathcal{P}^*$ de $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$, tels que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ coïncident sur $\mathcal{P}_n(A)$.

Avec les notations introduites précédemment, (R_7) peut s'exprimer de la manière suivante :

Pour tout n , et pour toute partition $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$, il existe un élément A de $\mathfrak{F}$, et une partie C_0^* de $\{1 , \ldots , n\} = C_0$, tels que, pour tous M et N appartenant à $\mathcal{P}_n(A)$,

$$M \equiv N \quad (\mathcal{P}) \iff \varphi_{(C_0^*,C_0)}(M) = \varphi_{(C_0^*,C_0)}(N) \quad .$$

Avec ces définitions, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 9. - *Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre non trivial sur $\underset{\sim}{N}$. Pour que $\mathfrak{F}$ vérifie (R_7), il faut et il suffit que $\mathfrak{F}$ soit un ultrafiltre de Ramsey et absolu.*

Démonstration.

$(R_7) \implies (A_2)$ est immédiat. En effet, (A_2) n'est autre que la proposition (R_7) pour $n = 1$.

$(R_7) \implies (R_6)$. Il suffit de remarquer que, pour qu'une partition fondamentale $\mathcal{P}$ soit finie, il faut et il suffit que $k = 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est la partition triviale de $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$, dont le seul élément est $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$.

Si donc $\mathcal{P}$ est une partition finie de $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$, dire que $\mathfrak{F}$ vérifie (R_7), c'est dire qu'il existe un élément A de $\mathfrak{F}$ tel que $\mathcal{P}$ coïncide sur $\mathcal{P}_n(A)$ avec la partition triviale, donc $\mathcal{P}_n(A)$ est contenu dans une des classes d'équivalence de $\mathcal{P}$, et $\mathfrak{F}$ vérifie (R_6).

$((A_2)$ et $(R_6)) \Longrightarrow (R_7)$. Nous allons démontrer cette implication par réccurence sur n. Nous avons déjà remarqué que (R_7), pour $n = 1$, n'était autre que (A_2). Supposons donc avoir démontré l'implication jusqu'à $(n - 1)$, et soit $\mathcal{P}$ une partition de $\mathcal{P}_n(\underset{\sim}{N})$.

Soit $D_0 = \{1, \ldots, 2n\}$. Pour tout $A \in \mathcal{P}_{2n}(\underset{\sim}{N})$, nous allons définir

$$\Phi(A) = \{(D', D'') \mid \text{card } D' = \text{card } D'' = n, \ D' \subset D_0, \ D'' \subset D_0,$$
$$\exists A', A'', \ \text{card } A' = \text{card } A'' = n, \ A' \cup A'' \subset A, \ A' \equiv A'' \ (\mathcal{P}),$$
$$\text{et } (A', A'', A) | (D', D'', D_0)\}.$$

Cette application Φ définit une partition $\mathcal{P}_\Phi$ sur $\mathcal{P}_{2n}(\underset{\sim}{N})$, qui est finie. Par suite, $\mathfrak{F}$ vérifiant (R_6), il existe un élément F de l'ultrafiltre $\mathfrak{F}$ tel que Φ soit constante sur $\mathcal{P}_{2n}(F)$.

Nous allons montrer que $\mathcal{P}$ est alors invariante sur $\mathcal{P}_n(F)$, c'est-à-dire que, si $A, B, C, D \in \mathcal{P}_n(F)$ vérifient $A \equiv B \ (\mathcal{P})$ et $(A, B) | (C, D)$, alors $C \equiv D \ (\mathcal{P})$.

Ceci résulte immédiatement du fait que nous pouvons trouver D_1 et $D_2 \in \mathcal{P}_{2n}(F)$ tels que $(A, B, D_1) | (C, D, D_2)$. Alors, puisque $\Phi(D_1) = \Phi(D_2)$, d'après la définition de Φ, $C \equiv D \ (\mathcal{P})$. Soit $F = \{a_n\}_{n \in \underset{\sim}{N}}$, $a_n < a_{n+1}$; comme $F \in \mathfrak{F}$, l'un des deux ensembles $F_1 = \{a_{2n}\}_{n \in \underset{\sim}{N}}$ ou $F_2 = \{a_{2n+1}\}_{n \in \underset{\sim}{N}}$ est un élément de l'ultrafiltre $\mathfrak{F}$. Supposons par exemple que ce soit F_1.

Si, sur $\mathcal{P}_n(F)$, $(A \equiv B \ (\mathcal{P})) \Longrightarrow (A = B)$, alors $\mathfrak{F}$ vérifie (R_7) pour n avec l'élément F de $\mathfrak{F}$ et $C_0 = \{1, \ldots, n\}$. Sinon, il existe A_0 et B_0 appartenant à $\mathcal{P}_n(F)$, $A_0 \neq B_0$ et $A_0 \equiv B_0 \ (\mathcal{P})$. On pose alors

$$A_1 = \{a_{2n} \mid a_n \in A_0\} \qquad \text{et} \qquad B_1 = \{a_{2p} \mid a_p \in B_0\},$$

et, si $a_{n_0} \in B_0$ et $a_{n_0} \notin A_0$, on pose

$$B_2 = (B_1 \dot{-} \{a_{2n_0}\}) \cup \{a_{2n_0+1}\}.$$

D'après l'invariance de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}_n(F)$, $A_1 \equiv B_1 \equiv B_2 \ (\mathcal{P})$.

Soit toujours $C_0 = \{1, \ldots, n\}$. On pose $C_0' = \varphi_{(B_0 \dot{-} \{a_{n_0}\}, B_0)}(C_0)$, et nous allons définir une partition $\mathcal{P}'$ sur $\mathcal{P}_{n-1}(F_1)$ de la façon suivante :

$(A' \equiv B' \ (\mathcal{P}')) \Longleftrightarrow$ (Pour tous A et B de $\mathcal{P}_n(F)$ tels que

$$(A', A) = (B', B) = (C'_0, C_0) \quad ,$$

on a $A \equiv B \ (\mathcal{P})$).

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{P}'$ est une partition. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un élément F' de $\mathfrak{F}$ contenu dans F_1, et une partie C''_0 de C'_0, tels que, pour tous éléments A' et B' de $\mathcal{P}_{n-1}(F')$,

$$(A' \equiv B' \ (\mathcal{P}')) \Longleftrightarrow (\varphi_{(C''_0, C'_0)}(A') = \varphi_{(C''_0, C'_0)}(B')) \quad .$$

Mais alors, d'après la définition de $\mathcal{P}'$, pour tous éléments A et B de $\mathcal{P}_n(F')$,

$$(A \equiv B \ (\mathcal{P})) \Longleftrightarrow (\varphi_{(C''_0, C_0)}(A) = \varphi_{(C''_0, C_0)}(B)) \quad ,$$

et $\mathfrak{F}$ vérifie (R_7) pour n : la proposition est démontrée.

3. Les K-ultrafiltres et le théorème fondamental.

Dans un article [4] sur la classification des filtres, S. SIROTA a introduit une classe intéressante d'ultrafiltres sur $\underline{N}$, qu'il a appelés K-ultrafiltres. La définition de ces ultrafiltres est donnée par la proposition suivante : Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre non trivial sur $\underline{N}$; et considérons les deux énoncés suivants concernant $\mathfrak{F}$:

(K_1) *Pour toute application Φ de A, élément de $\mathfrak{F}$, dans $\mathfrak{F}$, il existe un élément A' de $\mathfrak{F}$ contenu dans A, et qui vérifie :*
Pour tout élément M de $\overline{\mathcal{P}}(A')$, il existe un point a_M de M tel que $M \subset \{a_M\} \cup \Phi(a_M)$.

(K_2) *Pour toute partie $\mathfrak{M}$ de $\overline{\mathcal{P}}(\underline{N})$ vérifiant :*
1° $\emptyset \in \mathfrak{M}$,
2° *Pour tout $M \in \mathfrak{M}$, l'ensemble $A_M = \{n \mid M \cup \{n\} \in \mathfrak{M}\}$ est un élément de l'ultrafiltre $\mathfrak{F}$,*
il existe un élément A de $\mathfrak{F}$ tel que $\overline{\mathcal{P}}(A) \subset \mathfrak{M}$.

PROPOSITION 10. - *Les énoncés (K_1) et (K_2) sont équivalents.*

Un ultrafiltre non trivial sur $\underline{N}$, vérifiant (K_1) ou (K_2), est appelé K-ultrafiltre.

Démonstration de la proposition.

$(K_2) \Longrightarrow (K_1)$ est facile. Si Φ est une application de $A \in \mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$, on pose

$$\mathfrak{M}_\Phi = \{\emptyset\} \cup \{M \in \overline{\mathcal{P}}(A) \ ; \ \exists\, a_M \in M \ , \ M \subset \{a_M\} \cup \Phi(a_M)\} \ .$$

Il est immédiat de vérifier que $\mathfrak{M}_\Phi$ vérifie les hypothèses de (K_2), donc que, si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre vérifiant (K_2), il existe un élément A' de $\mathfrak{F}$ tel que $\overline{\mathcal{P}}(A') \subset \mathfrak{M}_\Phi$. Mais alors A' est l'élément cherché pour que $\mathfrak{F}$ vérifie (K_1).

$(K_1) \implies (K_2)$. Soit $\mathfrak{M}$ une partie de $\overline{\mathcal{P}}(\underset{\sim}{N})$ vérifiant les hypothèses de (K_2). A tout $n \in \underset{\sim}{N}$, associons

$$\Phi(n) = \Big(\bigcap_{\substack{M \subset \{0,\dots,n\} \\ M \in \mathfrak{M}}} A_M\Big) \dot{-} \{0 \ , \ \dots \ , \ n\} \qquad (A_M = \{n \mid M \cup \{n\} \in \mathfrak{M}\}) \ .$$

Puisque, pour tout M de $\mathfrak{M}$, $A_M \in \mathfrak{F}$, l'application Φ est de $\underset{\sim}{N}$ dans $\mathfrak{F}$, et de plus Φ est décroissante, et $n \notin \Phi(n)$. $\mathfrak{F}$ vérifiant (K_1), il existe donc un élément A_Φ de $\mathfrak{F}$ vérifiant la conclusion de (K_1). Nous allons prouver que l'élément $A_\Phi \cap A_\emptyset$ de $\mathfrak{F}$ vérifie les conclusions de (K_2), c'est-à-dire $\overline{\mathcal{P}}(A_\Phi \cap A_\emptyset) \subset \mathfrak{M}$. Raisonnons par récurrence sur le cardinal de $M \in \overline{\mathcal{P}}(A_\Phi \cap A_\emptyset)$. Tout d'abord $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Si $M = \{a_1\}$, alors $a_1 \in A_\emptyset$, donc $M \in \mathfrak{M}$. Soit alors $k \geqslant 2$, et supposons avoir démontré que tout élément de $\mathcal{P}_{k-1}(A_\Phi \cap A_\emptyset)$ est dans $\mathfrak{M}$. Soit $M = \{a_1 \ , \ \dots \ , \ a_{k-1} \ , \ a_k\}$, $a_i < a_{i+1}$. La partie $\{a_{k-1} \ , \ a_k\}$ vérifie, d'après (K_1), $a_{k-1} \in \Phi(a_k)$ ou $a_k \in \Phi(a_{k-1})$. Mais, comme Φ est décroissante, $a_{k-1} \in \Phi(a_k)$ entraîne $a_{k-1} \in \Phi(a_{k-1})$, ce qui est impossible. Donc $a_k \in \Phi(a_{k-1})$, et, d'après la définition de Φ, on a en particulier $a_k \in A_{M'}$, où $M' = \{a_1 \ , \ \dots \ , \ a_{k-1}\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $M' \in \mathfrak{M}$ et $A_{M'} \ni a_k$, donc $M = M' \cup \{a_k\} \in \mathfrak{M}$, et la proposition est entièrement démontrée.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de cet exposé, qui résume plusieurs des énoncés précédents.

THÉORÈME 11. - <u>Soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>un ultrafiltre non trivial sur</u> $\underset{\sim}{N}$. <u>Les propositions</u> (A_i) $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, (R_i) $(1 \leqslant i \leqslant 7)$ <u>et</u> (K_i) $(1 \leqslant i \leqslant 2)$ <u>sont équivalentes. (Donc les notions d'ultrafiltre absolu, d'ultrafiltre de Ramsey et de</u> K-<u>ultrafiltre coïncident.</u>)

<u>Démonstration</u>. - La majeure partie du travail a déjà été faite. En fait, si nous démontrons les implications $(R_2) \implies (K_1)$, $(K_2) \implies (A_3)$ et $(A_2) \implies (R_1)$, il est facile de voir que nous aurons tout démontré.

$(R_2) \implies (K_1)$. Il suffit de démontrer (K_1) pour une application Φ décroissante et vérifiant $n \notin \Phi(n)$. La partie $\mathfrak{M} = \{(a_1 \ , \ a_2) \mid a_2 \in \Phi(a_1)\}$ de $\mathcal{P}_2(\underset{\sim}{N})$ vérifie alors les hypothèses de (R_2), et par suite il existe $A' \in \mathfrak{F}$ tel que $\mathcal{P}_2(A') \subset \mathfrak{M}$. Soient alors $M \in \overline{\mathcal{P}}(A')$, et a_M son plus petit élément. D'après les hypothèses sur Φ, on a nécessairement, pour tout $a \in M$ différent de a_M,

$a \in \Phi(a_M)$, donc $M \subset \{a_M\} \cup \Phi(a_M)$, et $\mathfrak{F}$ vérifie (K_1).

$(K_2) \implies (A_3)$. Soit $\mathcal{R} = (R_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ un recouvrement ponctuellement fini de $\underset{\sim}{N}$, tel que $\mathcal{R} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$.

Posons $\mathfrak{M} = \{M \in \overline{\mathcal{P}}(\underset{\sim}{N})\ ;\ \forall\, n \in \underset{\sim}{N}\ ,\ \mathrm{card}(R_n \cap M) \leqslant 1\}$. Il est facile de vérifier que $\mathfrak{M}$ vérifie les hypothèses de (K_2), donc qu'il existe un élément A de $\mathfrak{F}$ tel que $\overline{\mathcal{P}}(A) \subset \mathfrak{M}$. Mais alors A vérifie immédiatement $\mathrm{card}(A \cap R_n) \leqslant 1$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, donc $\mathfrak{F}$ vérifie (A_3).

$(A_2) \implies (R_1)$ (la démonstration est due à K. KUNEN). Soit $(A_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de parties de $\mathfrak{F}$. Nous pouvons toujours supposer que la suite $(A_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est décroissante, et que $n \notin A_n$. Comme $\mathfrak{F}$ vérifie (A_2), il existe un élément B de $\mathfrak{F}$ tel que $B \dot{-} A_m$ soit fini pour tout m . Soit $B = \{b_n\}_{n\in\underset{\sim}{N}}$, $b_n < b_{n+1}$; nous allons construire une suite b'_n de la façon suivante :

Soit $f(m) = \inf\{n \mid B \dot{-} A_m \subset \{b_0\ ,\ \ldots\ ,\ b_{n-1}\}\}$. On pose $b'_0 = b_0$ et, pour tout n , $b'_n = b_{f(b_{n-1})}$. Soient enfin $P_n = \{b \in B\ ;\ b'_n < b \leqslant b'_{n+1}\}$, et $Q = \{b_0\} \cup (\underset{\sim}{N} \dot{-} B)$. Q et les $(P_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ forment une partition $\mathcal{P}$ de $\underset{\sim}{N}$, et $\mathcal{P} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, puisque $Q \notin \mathfrak{F}$ et les P_n sont finis. D'après (A_2), il existe un élément A de $\mathfrak{F}$ tel que $A \cap P_n$ a au plus un point, pour tout n de $\underset{\sim}{N}$. On note $A = \{a_n \mid n \in \underset{\sim}{N}\}$, avec $a_n < a_{n+1}$, et on pose $g(n) = a_{2n}$ ou $g(n) = a_{2n+1}$, suivant que $\{a_{2n} \mid n \in \underset{\sim}{N}\}$ ou $\{a_{2n+1} \mid n \in \underset{\sim}{N}\}$ est un élément de $\mathfrak{F}$. g est une application strictement croissante de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}$, et $g(\underset{\sim}{N})$ est un élément de $\mathfrak{F}$ par construction. Enfin, comme pour tout b de P_n , $b \leqslant b'_{n+1}$, donc $A_b \supset A_{b'_{n+1}} \supset \{b'' \in B\ ;\ b'' \geqslant b'_{n+2}\} \supset P_{n+2}$, on a, pour tout n , $g(n+1) \in A_{g(n)}$, et $\mathfrak{F}$ vérifie (R_1).

Ceci termine la démonstration du théorème.

4. Un exemple d'application : l'existence de groupes topologiques séparés, dénombrables, et dont la topologie est extrêmement discontinue et non discrète.

Dans ce paragraphe, nous allons donner un exemple d'utilisation des notions que nous venons d'étudier. Cet exemple est tiré de [3], mais nous en donnerons ici une exposition simplifiée.

Soit G le groupe $\overline{\mathcal{P}}(\underset{\sim}{N})$ muni de la différence symétrique (notée additivement : $A + B = (A \cup B) \dot{-} (A \cap B)$, $A\ ,\ B \in \overline{\mathcal{P}}(\underset{\sim}{N})$). Nous munissons G de la topologie, dont une base fondamentale est formée, des ouverts

$$\mathcal{O}_A(M) = M + \overline{\mathcal{P}}(A) \quad ,$$

où $M \in \overline{\mathcal{P}}(\underset{\sim}{N})$, et A parcourt $\mathfrak{F}$, ultrafiltre non trivial sur $\underset{\sim}{N}$. On vérifie facilement que G , muni de cette topologie, notée $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$, est un groupe topologique dénombrable, séparé et non discret.

THÉORÈME 12 (S. SIROTA). - *Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre absolu sur $\underline{N}$. Alors G , muni de $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$, est extrêmement discontinu.*

Démonstration. - Nous allons utiliser la propriété caractéristique (K_2) des ultrafiltres absolus. Remarquons que cette propriété, en termes de la topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$, s'exprime de la façon suivante :

(K_2') Pour qu'une partie $\mathfrak{M}$ de $\overline{\mathcal{P}}(\underline{N})$ soit ouverte pour la topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$, il faut et il suffit que $\mathfrak{M}$ vérifie :

(I) Pour tout M de $\mathfrak{M}$, $A_M = \{n \mid M + \{n\} \in \mathfrak{M}\}$ est un élément de $\mathfrak{F}$.

En effet, (K_2) signifie exactement que, si $\mathfrak{M}$ est une partie de $\overline{\mathcal{P}}(\underline{N})$, vérifiant $\emptyset \in \mathfrak{M}$, et (I), alors $\mathfrak{M}$ est un voisinage de $\emptyset$ pour $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$. Donc (K_2') implique (K_2). Mais réciproquement, si nous supposons que $\mathfrak{F}$ vérifie (K_2), alors, d'une part, un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$ vérifie trivialement (I), et, d'autre part, si $\mathfrak{M}$ vérifie (I), alors, pour tout M de $\mathfrak{M}$, $M + \mathfrak{M}$ vérifie (I) et $\emptyset \in \mathfrak{M} + M$, donc $\mathfrak{M}$ est un voisinage de M : $\mathfrak{M}$, voisinage de tous ses points, est ouvert pour $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$.

Nous allons donner une autre caractérisation, plus utile, de la propriété (I).

LEMME 13. - *Soit $\mathfrak{M}$ une partie de $\overline{\mathcal{P}}(\underline{N})$. Pour que $\mathfrak{M}$ vérifie (I), il faut et il suffit que, pour tout élément M de $\mathfrak{M}$, on ait $\emptyset \in \overline{\mathcal{P}_1(\underline{N}) \cap (\mathfrak{M} + \{M\})}$ (l'adhérence est prise au sens de la topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$).*

Démonstration. - Par translation, il suffit de se ramener au cas $M = \emptyset$. Si $\mathfrak{M}$ vérifie (I) pour $\emptyset$, alors $A_\emptyset = \{n \mid \{n\} \in \mathfrak{M}\}$ est un élément de $\mathfrak{F}$, donc $A_\emptyset$ rencontre tous les éléments A de $\mathfrak{F}$, donc $\mathcal{P}_1(A_\emptyset) \cap \overline{\mathcal{P}}(A) \neq \emptyset$ et $\mathcal{P}_1(A_\emptyset) = \mathfrak{M} \cap \mathcal{P}_1(\underline{N})$. Donc $\emptyset \in \overline{\mathcal{P}_1(\underline{N}) \cap \mathfrak{M}}$. Réciproquement, si $\emptyset \in \overline{\mathcal{P}_1(\underline{N}) \cap \mathfrak{M}}$, alors $A_\emptyset$ rencontre tous les éléments de $\mathfrak{F}$, donc $A_\emptyset \in \mathfrak{F}$, et $\mathfrak{M}$ vérifie (I) pour $\emptyset$.

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème : Soit $\mathfrak{M}$ un ouvert de $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$, et soit $M \in \overline{\mathfrak{M}}$.

1er cas : $M \in \mathfrak{M}$. Alors $\emptyset \in \overline{\mathcal{P}_1(\underline{N}) \cap (\mathfrak{M} + \{M\})} \subset \overline{\mathcal{P}_1(\underline{N}) \cap (\overline{\mathfrak{M}} + \{M\})}$.

2e cas : $M \in \overline{\mathfrak{M}} \mathbin{\dot{-}} \mathfrak{M}$. Supposons que $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}_1(\underline{N}) \cap (\overline{\mathfrak{M}} + \{M\})}$. Comme $\emptyset \in \overline{\mathcal{P}_1(\underline{N})}$, ceci implique que $\emptyset \in \overline{\mathcal{P}_1(\underline{N}) \cap \complement(\overline{\mathfrak{M}} + \{M\})}$. Mais alors la partie $\mathfrak{M}' = \{\emptyset\} \cup \complement(\overline{\mathfrak{M}} + \{M\})$ vérifie les hypothèses du lemme, donc vérifie (I). Par suite, comme $\mathfrak{F}$ est absolu, $\mathfrak{M}'$ est un ouvert de $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$. Mais ceci est contradictoire : en effet, puisque $\emptyset \notin \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' = \emptyset$, donc $\emptyset \notin \overline{\mathfrak{M}}$.

Ceci prouve donc que, pour tout élément M de $\overline{\mathfrak{M}}$,

$$\emptyset \in \overline{\mathcal{P}_1(\underset{\sim}{N}) \cap (\overline{\mathfrak{M}} + M)} \quad ,$$

et, en utilisant de nouveau le lemme, $\overline{\mathfrak{M}}$ est ouvert.

Le théorème est donc démontré.

COROLLAIRE 14. - En admettant l'hypothèse du continu, il existe des groupes topologiques dénombrables, séparés, extrêmement discontinus, et non discrets.

Démonstration. - Si l'on admet l'hypothèse du continu, il existe un ultrafiltre absolu sur $\underset{\sim}{N}$ (cf. [2]).

Le théorème précédent fournit alors une solution au problème posé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOOTH (David D.). - Countably indexed ultrafilters, Thèse Univ. Wisconsin, Madison, 1969.

[2] CHOQUET (Gustave). - Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\underset{\sim}{N}$, Bull. Sc. math., t. 92, 1968, p. 143-153.

[3] SIROTA (S.). - Product of topological groups and extremal disconnectedness, Math. USSR-Sbornik, t. 8, 1969, p. 169-180.

[4] SIROTA (S.). - The problem of classification of filters, Soviet Math. Doklady, t. 11, 1970, p. 408-411.

(Texte reçu le 10 février 1971)

Alain LOUVEAU
92 rue du Dessous des Berges
75 - PARIS 13