François Aribaud

Sur le théorème de Alaoglu-Birkhoff

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 1 (1970-1971), exp. n° 15, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 15, 19 p.
4 mars 1971

SUR LE THÉORÈME DE ALAOGLU-BIRKHOFF

par François ARIBAUD

1. Introduction : théorie ergodique et analyse convexe.

La théorie ergodique est née de l'étude des systèmes dynamiques dans le cadre de la mécanique statistique.

Un système dynamique est caractérisé par un point dans un espace de phases, espace mesuré (X , m) de masse totale finie. La loi d'évolution du système équivaut à la donnée d'un groupe à un paramètre (T_t) de transformations mesurables de X conservant la mesure m . Les propriétés "physiques" du système se traduisent en équations faisant intervenir des moyennes de fonctions sur tous les états possibles, i. e. des moyennes "spatiales" $\int f(x)\, dm(x)$. Or l'expérience conduit à des résultats sur les moyennes "temporelles" $\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f(T_t\, x)$. L'objet originel de la théorie ergodique est la comparaison de ces deux types de moyennes, moyenne spatiale et moyenne temporelle.

Les premiers résultats généraux dans ce domaine ont été obtenus par G. D. BIRKHOFF et J. von NEUMANN :

Sous les hypothèses et notations précédentes, la limite $\lim_{s\to\infty} \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f(T_t\, x)\, dt$ existe, pour une fonction f de $L^\infty(X , m)$:

(a) Pour presque tous les x (au sens de la mesure m) (G. D. BIRKHOFF),
(b) Au sens de la convergence L^2 (von NEUMANN).

Alors que le théorème "individuel" de BIRKHOFF appartient au domaine de la théorie de la mesure, il est apparu rapidement que le théorème "moyen" de von NEUMANN n'était qu'un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général de la théorie des espaces de Hilbert.

La définition générale de la moyenne d'une fonction presque-périodique sur un groupe topologique, donnée par von NEUMANN, conduisait à la formulation suivante du théorème ergodique "moyen" :

Dans l'enveloppe convexe fermée des translatées $f(T_t\, x)$ d'une fonction f de $L^2(X , m)$, il existe une fonction invariante par le groupe à un paramètre (T_t) .

Ce nouveau point de vue devait être systématiquement développé par L. ALAOGLU et G. BIRKHOFF (cf. [1]) qui établissaient le résultat suivant :

Soit G un groupe d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert H . Si P est le projecteur orthogonal de H sur le sous-espace H^G des éléments invariants par G , pour tout $h \in H$, Ph est l'unique élément invariant appartenant à l'enveloppe convexe fermée des translatés de h par les éléments de G .

Un théorème analogue était également donné pour les espaces uniformément convexes. Le lien était ainsi établi entre la théorie ergodique et les théorèmes de points fixes de l'analyse convexe. Il convenait ensuite de sortir du cadre "trop étroit" des espaces de Hilbert et des espaces uniformément convexes. W. EBERLEIN (cf. [2]) attirait l'attention sur l'importance de la compacité faible dans cette question, et introduisait les fonctions faiblement presque-périodiques. Mais il lui manquait un théorème de points fixes, qui ne fut établi que récemment par C. RYLL-NARDZEWSKI (cf. [4]). Grâce à ce théorème, il est maintenant possible d'étendre considérablement le champ d'application des raisonnements de ALAOGLU et BIRKHOFF.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe (e. v. t. l. c.), et soit G un groupe d'opérateurs linéaires continus dans E . On dit que G est simplement borné, si, pour tout $x \in E$, l'orbite Gx de x est un ensemble borné de E . On dit qu'un élément x de E est presque-périodique par rapport à G , si l'orbite Gx de x dans E est relativement compacte. On dit que G est un groupe presque-périodique d'opérateurs de E , si tout élément x de E est presque-périodique par rapport à G . Lorsque l'on considère sur E la topologie affaiblie $\sigma(E , E')$, on parle d'éléments faiblement presque-périodiques et de groupes faiblement presque-périodiques.

Nous démontrerons dans ce qui suit les théorèmes suivants :

THÉORÈME A. - Soient E un e. v. t. l. c., G un groupe d'opérateurs équicontinu et simplement borné dans E . Soit K un sous-ensemble convexe faiblement compact de E , stable par G . L'ensemble K contient au moins un point invariant par G .

THÉORÈME B. - Soient E un e. v. t. l. c. quasi-complet, G un groupe d'opérateurs équicontinu et faiblement presque-périodique dans E . Il existe un projecteur continu unique P de E sur le sous-espace fermé E^G des éléments de E invariants par G , tel que $P(gx) = Px$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in E$.

L'élément Px est l'unique élément invariant appartenant à l'enveloppe convexe fermée de l'orbite Gx de x . L'espace E est somme directe topologique du sous-espace fermé E^G et du sous-espace fermé E_G , engendré par les différences $gx - x$, $g \in G$ et $x \in E$.

2. Remarques préliminaires.

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel topologique localement convexe séparé quelconque. Si G est un groupe topologique, une représentation linéaire continue r de G dans E est une représentation (au sens algébrique) de G dans le groupe des automorphismes linéaires continus de E, telle que l'application $(g, x) \longmapsto r(g)x$ de $G \times E$ dans E soit continue. La représentation est équicontinue si, pour tout voisinage V de 0 dans E, $\bigcap_{g \in G} g^{-1}(V)$ est encore un voisinage de 0.

On notera, d'autre part, $CB(G)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues bornées sur G (pour la norme de la convergence uniforme).

LEMME 1. - *Supposons que r réalise G comme un groupe simplement borné d'opérateurs de E. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E'$, la fonction $g \longmapsto \langle gx , y\rangle$ appartient à $CB(G)$.*

En effet, l'orbite Gx est un ensemble borné dont l'image par y, fonction continue, est bornée dans $\mathbb{C}$.

COROLLAIRE 1. - *On suppose de plus que r est équicontinue. Pour toute forme linéaire continue m sur $CB(G)$, et toute $y \in E'$, $x \longmapsto m_g(\langle gx , y\rangle)$ est une forme linéaire continue sur E.*

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver un voisinage V_ε de 0 tel que $|\langle s , y\rangle| < \varepsilon$ pour tout $s \in V_\varepsilon$. Comme r est équicontinue, il existe un voisinage W_ε de 0 tel que $g(W_\varepsilon) \subset V_\varepsilon$ pour tout $g \in G$. Pour tout $x \in W_\varepsilon$, on a $|\langle gx , y\rangle| < \varepsilon$ quel que soit $g \in G$, et $|m_g(\langle gx , y\rangle)| \leqslant \varepsilon\|m\|$.

Q. E. D.

COROLLAIRE 2. - *On garde les hypothèses et les notations du corollaire 1, et on fait opérer G sur $CB(G)$ par translations à droite. On se donne un élément x de E faiblement presque-périodique par rapport à G. La fonction $\omega(g) = \langle gx , y\rangle$ est alors un élément faiblement presque-périodique de $CB(G)$ relativement à G.*

Soit U un ultrafiltre sur G. Comme Gx est relativement compact pour la topologie affaiblie, il existe $x_\infty \in E$ tel que $x_\infty = \lim_{h}{}_U\, hx$; on a alors $\langle x_\infty , y\rangle = \lim_{h}{}_U \langle hx , y\rangle$ pour toute $y \in E'$. Soit m une forme linéaire continue sur $CB(G)$; d'après le corollaire 1, il existe un $y_m \in E'$ tel que

$$m_g(\langle gx , y\rangle) = \langle x , y_m\rangle , \qquad \text{pour tout } x \in E .$$

On a ainsi

$$m_g(\langle gx_\infty , y\rangle) = \langle x_\infty , y_m\rangle = \lim_{h} {}_U \langle hx , y_m\rangle = \lim_{h} {}_U m_g(\langle ghx , y\rangle) = \lim_{h} {}_U m_g(\omega(gh)) .$$

Autrement dit, $g \longmapsto \langle gx_\infty , y\rangle$ est la limite faible dans $CB(G)$ des translatées à droite $\omega_h(g) = \omega(gh)$ de ω suivant l'ultrafiltre U .

3. Critères de compacité faible.

L'étude des ensembles faiblement relativement compacts d'un e. v. t. l. c. s'appuie sur trois résultats essentiels dont nous nous bornerons à rappeler les énoncés :

THÉORÈME d'Eberlein. - Soient E un e. v. t. l. c. quasi-complet, H un sous-ensemble de E . Pour que H soit relativement compact pour $\sigma(E , E')$, il faut et il suffit que toute suite (h_n) d'éléments de H possède une valeur d'adhérence pour $\sigma(E , E')$.

THÉORÈME de Smul'jan. - Soient E un espace de Fréchet, H un sous-ensemble de E . Pour que H soit relativement compact, il faut et il suffit que de toute suite d'éléments de H on puisse extraire une suite convergente pour $\sigma(E , E')$.

THÉORÈME de Krejn. - Soient E un e. v. t. l. c. quasi-complet, H un sous-ensemble de E relativement compact pour $\sigma(E , E')$. L'enveloppe convexe fermée de H est compacte pour $\sigma(E , E')$.

Nous aurons également besoin de résultats plus précis concernant le cas où E est l'espace de Banach $CB(S)$ des fonctions continues bornées sur un espace topologique S . Ces résultats s'appuient sur le lemme suivant, qui joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème d'Eberlein.

LEMME d'Eberlein. - Soient K un espace compact, H un sous-ensemble borné de $C(K)$. Pour que H soit un sous-ensemble relativement compact de $C(K)$ muni de la topologie de la convergence simple, il faut et il suffit que toute suite de H ait une valeur d'adhérence dans $C(K)$, valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence simple.

En fait, la condition du lemme d'Eberlein caractérise les sous-ensembles H de $C(K)$ faiblement relativement compacts.

PROPOSITION 1. - Pour qu'un sous-ensemble borné H de $C(K)$ soit relativement compact pour $\sigma(C(K) , M(K))$, il faut et il suffit qu'il soit relativement compact dans $C(K)$ muni de la convergence simple.

Comme la topologie de la convergence simple est définie par les mesures de Dirac, la condition est <u>nécessaire</u>.

Montrons qu'elle est <u>suffisante</u>. D'après le théorème d'Eberlein, il s'agit de montrer que toute suite (h_n) de fonctions de H possède une valeur d'adhérence pour la topologie affaiblie $\sigma(C(K), M(K))$. A la suite (h_n), on associera la relation d'équivalence " $x \equiv y$ si $h_n(x) = h_n(y)$ pour tout n ". Cette relation d'équivalence est fermée ; on désignera par K_1 l'espace quotient de K par cette relation, espace qui est séparé et compact. On remarquera que cette relation d'équivalence est compatible avec la convergence simple : si (k_p) est une suite de fonctions constantes sur chaque classe d'équivalence, toute valeur d'adhérence de la suite (k_p) est constante sur chaque classe d'équivalence. Il en résulte que, si $\tilde{h}_n$ est la fonction sur K_1 obtenue à partir de h_n par passage au quotient, la suite $(\tilde{h}_n)$ possède une valeur d'adhérence $\tilde{k}$ dans $C(K_1)$ muni de la topologie de la convergence simple : toute valeur d'adhérence de (h_n) dans $C(K)$ passe au quotient. La même remarque s'applique à toute suite extraite de la suite des $\tilde{h}_n$: une telle suite possède au moins une valeur d'adhérence dans $C(K_1)$ muni de la topologie de la convergence simple. Le lemme d'Eberlein montre alors que $(\tilde{h}_n)$ est relativement compact dans $C(K_1)$ muni de la topologie de la convergence simple.

Mais l'espace K_1 est séparable, puisque la suite des (h_n) sépare les points de K_1. Soit D un sous-ensemble partout dense de K_1. Par procédé diagonal, on peut extraire de la suite $\tilde{h}_n$ de fonctions de $C(K_1)$, une suite $(\tilde{k}_p)$ telle que, pour tout $d \in D$, la suite numérique $k_p(d)$ soit convergente. D'autre part, $(\tilde{k}_p)$, sous-ensemble de $(\tilde{h}_n)$, est un ensemble relativement compact de $C(K_1)$. Il résulte de la construction de $(\tilde{k}_p)$ que deux valeurs d'adhérence $\tilde{k}'$ et $\tilde{k}''$ de cette suite coïncident sur l'ensemble partout dense D de K_1 ; comme elles sont continues, elles coïncident partout. Autrement dit, la suite $(\tilde{k}_p)$ n'a qu'une valeur d'adhérence ; comme l'ensemble $(\tilde{k}_p)$ est relativement compact, d'après ce qui précède, la suite $(\tilde{k}_p)$ converge vers cette valeur d'adhérence $\tilde{k}$.

Revenons maintenant à K : k, relèvement de $\tilde{k}$, est la limite, pour la topologie de la convergence simple, des relèvements (k_p) des $(\tilde{k}_p)$. D'après le théorème de Lebesgue, on a $m(k) = \lim_p m(k_p)$ pour toute mesure de Radon m sur K. Autrement dit, k est la limite, pour $\sigma(C(K), M(K))$, de la suite (k_p), qui est une suite extraite de la suite (h_n) que nous avons considérée au début. Le théorème d'Eberlein montre alors que H est relativement compact pour $\sigma(C(K), M(K))$.

Q. E. D.

<u>Remarque</u>. - Lors de la démonstration de la proposition 1, nous avons en fait établi le résultat plus précis suivant, analogue du théorème de Smul'jan :

Les notations étant celles de la proposition, il y a équivalence entre :

(a) H est relativement compact pour $\sigma(C(K), M(K))$;

(b) De toute suite (h_n) d'éléments de H, on peut extraire une suite (k_p) qui converge simplement vers une fonction continue.

Le lemme technique suivant va nous permettre d'étendre les résultats qui précèdent aux espaces de fonctions continues bornées sur un espace topologique quelconque :

LEMME 2. - Soient K un espace compact, D un sous-ensemble partout dense de K, H un sous-ensemble de $C(K)$. Il y a équivalence entre :

(a) H est relativement compact pour $\sigma(C(K), M(K))$;

(b) H est borné et, si (h_n) est une suite d'éléments de H, et (d_p) une suite d'éléments de D, telles que $\gamma = \lim\limits_p \lim\limits_n h_n(d_p)$ et $\delta = \lim\limits_n \lim\limits_p h_n(d_p)$ existent, on a $\gamma = \delta$.

D'après la proposition 1, il s'agit en fait d'établir l'équivalence de (b) et de la propriété suivante :

(c) Toute suite de H possède une valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence simple.

Montrons d'abord que (c) implique (b) : Soit (h_n) une suite de H, et introduisons la relation d'équivalence associée à (h_n). On désignera par K_1 le quotient de K par cette relation. Les énoncés (b) et (c) passent au quotient K_1. Autrement dit, on peut supposer K métrisable, et on peut extraire de d_p une suite (e_s) convergeant vers un élément e. De même, d'après (c) et la remarque qui suit la proposition 1, on peut extraire de (h_n) une suite (k_m) convergeant vers une fonction continue h. Comme $(h_n(d_p))$ est une suite convergente en n pour tout p, on ne modifie pas la limite par passage à une suite extraite, et on a ainsi

$$\lim_n h_n(d_p) = \lim_m k_m(d_p) = h(d_p) \quad .$$

De même, comme la suite en p, $\lim\limits_n h_n(d_p)$ est convergente, on a

$$\lim_p (\lim_n h_n(d_p)) = \lim_r (\lim_n h_n(e_r)) = \lim_r h(e_r) = h(e) \quad .$$

Des remarques analogues montrent que

$$\lim_p h_n(d_p) = \lim_r h_n(e_r) = h_n(e)$$

et

$$\lim_n (\lim_p h_n(d_p)) = \lim_m \lim_p (k_m(d_p)) = \lim_m k_m(e) = h(e) \quad .$$

D'où (b).

Supposons maintenant (b) satisfaite. Nous allons établir (c) par l'absurde. Soit (h_n) une suite d'éléments de H . Comme H est borné, la suite (h_n) est bornée, et l'ensemble des h_n est relativement compact dans l'espace des fonctions (non nécessairement continues) sur K , muni de la topologie de la convergence simple. D'après le lemme d'Eberlein, dire que (c) n'est pas satisfaite revient à dire que toute valeur d'adhérence k de la suite (h_n) dans l'espace des fonctions bornées muni de la topologie de la convergence simple est non continue. Comme D est partout dense dans l'espace compact, donc régulier, K , dire que k n'est pas continue revient à dire :

- Ou bien que la restriction de k à D n'est pas continue ;
- Ou bien qu'il existe un x dans $K - D$ tel que $k(x)$ ne soit pas la limite de $k(d)$ pour $d \in D$ tendant vers x .

Dans les deux cas, on voit qu'il existe un $\delta > 0$ et un $x \in K$ tels que tout voisinage V de x dans K contienne un $d_V \in V \cap D$ tel que

(1) $$|k(x) - k(d_V)| \geqslant \delta \quad .$$

On va maintenant définir par récurrence une suite (k_p) extraite de (h_n) , et une suite (d_q) d'éléments de D , telles que :

(i) $k(x) = \lim_p \lim_q k_p(d_q)$,

(ii) $\lim_q k(d_q)$ existe,

(iii) $|k(x) - k(d_q)| \geqslant \delta$.

On remarque d'abord, qu'en passant à une suite extraite de la suite des (d_q) , on n'altère pas les conditions (i) et (iii). Comme les (h_n) sont uniformément bornées, on voit qu'il suffit de construire des suites (k_p) et (d_q) satisfaisant à (i) et (iii), la condition (ii) étant ensuite obtenue par passage à une suite extraite.

La construction se fait par récurrence : On choisit d'abord $k_1 \in (h_n)$ telle que $|k(x) - k_1(x)| < 1$, ce qui est possible puisque k est une valeur d'adhérence de la suite (h_n) pour la topologie de la convergence simple. D'après (1), on peut trouver un $d_1 \in D$ tel que

$$|k(x) - k(d_1)| \geqslant \delta \quad .$$

En remarquant à nouveau que k est une valeur d'adhérence de (h_n) pour la topologie de la convergence simple, on construit $k_2 \in (h_n)$ tel que

$$|k(x) - k_2(x)| < \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad |k(d_1) - k_2(d_1)| < \frac{1}{2} \; .$$

Comme k_1 et k_2 sont des fonctions continues, l'ensemble des $y \in K$ tels que $|k_1(x) - k_1(y)| < \frac{1}{2}$ et $|k_2(x) - k_2(y)| < \frac{1}{2}$ est un voisinage de x dans K, et la condition (1) montre qu'il existe $d_2 \in D$ tel que

$$|k(x) - k(d_2)| \geqslant \delta \, , \qquad |k_1(x) - k_1(d_2)| < \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad |k_2(x) - k_2(d_2)| < \frac{1}{2} \; .$$

D'une façon générale, ayant construit $k_1 , \dots , k_p \in (h_n)$ et $d_1 , \dots , d_p \in D$ tels que

$$|k(x) - k_i(x)| < \frac{1}{i} \, , \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant p \; ,$$

$$|k(d_i) - k_j(d_i)| < \frac{1}{j} \, , \qquad \text{pour} \quad i < j \; ,$$

$$|k_i(x) - k_i(d_j)| < \frac{1}{j} \, , \qquad \text{pour} \quad i \leqslant j \; ,$$

$$|k(x) - k(d_i)| \geqslant \delta \, , \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant p \; ,$$

on construit $k_{p+1} \in (h_n)$ tel que

$$|k(x) - k_{p+1}(x)| < \frac{1}{p+1} \qquad \text{et} \qquad |k(d_i) - k_{p+1}(d_i)| < \frac{1}{p+1} \, , \qquad \text{pour} \quad i \leqslant p \; ,$$

en remarquant qu'un tel k_{p+1} existe, puisque k est une valeur d'adhérence de (h_n) pour la topologie de la convergence simple. Comme l'ensemble des $y \in K$, tels que $|k_i(x) - k_i(y)| < \frac{1}{p+1}$ pour $i \leqslant p+1$, est un voisinage de x, il existe, d'après (1), un $d_{p+1} \in D$ tel que

$$|k(x) - k(d_{p+1})| \geqslant \delta \qquad \text{et} \qquad |k_i(x) - k_i(d_{p+1})| < \frac{1}{p+1} \; .$$

Comme $|k_i(x) - k_i(d_j)| < \frac{1}{j}$ pour $i \leqslant j$, on a

$$k_i(x) = \lim_q k_i(d_q) \, , \qquad \text{pour tout} \quad i \; .$$

Comme $|k(x) - k_{p+1}(x)| < \frac{1}{p+1}$, on a $k(x) = \lim_p k_p(x)$, d'où

$$k(x) = \lim_p \lim_q k_p(d_q) \; .$$

D'autre part, comme $|k(d_i) - k_j(d_i)| < \frac{1}{j}$ pour $i < j$, on a

$$k(d_i) = \lim_p k_p(d_i) \qquad \text{et} \qquad \lim k(d_q) = \lim_q \lim_p k_p(d_q) \; .$$

Enfin, comme $|k(x) - k(d_q)| \geq \delta$ pour tout q , on a

$$|\lim_p \lim_q k_p(d_q) - \lim_p \lim_q k_p(d_q)| \geq \delta \quad ,$$

ce qui contredit l'assertion (b).

Q. E. D.

On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME (GROTHENDIECK). - Soient S un espace topologique, $CB(S)$ l'espace des fonctions continues bornées sur S . On désigne par H un sous-ensemble borné de $CB(S)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) H est relativement compact pour $\sigma(CB(S) , CB(S)')$;

(b) Si $(h_n) \in H$ et $(s_p) \in S$ sont deux suites telles que $c = \lim_n \lim_p h_n(s_p)$ et $d = \lim_p \lim_n h_n(s_p)$ existent, on a $c = d$.

Introduisons le compactifié de Stone-Čech βS de S . L'espace βS est le spectre de Gel'fand de $CB(S)$, et S s'envoie sur un sous-espace partout dense de βS . D'autre part, $C(\beta S)$ s'identifie à $CB(S)$. Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent.

Q. E. D.

COROLLAIRE 1. - Soit G un groupe topologique, et soit $f \in CB(G)$. Pour que l'ensemble des translatées à gauche $\gamma_g f(x) = f(g^{-1} x)$ (resp. des translatées à droite $\delta_g f(x) = f(xg)$) de f par les éléments de G soit relativement compact pour $\sigma(CB(G) , CB(G)')$, il faut et il suffit que, pour toutes suites (g_i) et (h_j) de G , telles que $c = \lim_i \lim_j f(g_i h_j)$ et $d = \lim_j \lim_i f(g_i h_j)$ existent, on ait $c = d$.

C'est une simple traduction du théorème.

COROLLAIRE 2. - Soit $f \in CB(G)$. Il y a équivalence entre :

(a) L'ensemble des translatées à gauche de f est relativement compact pour $\sigma(CB(G) , CB(G)')$, i. e. f est faiblement presque-périodique à gauche ;

(b) L'ensemble des translatées à droite de f est relativement compact pour $\sigma(CB(G) , CB(G)')$, i. e. f est faiblement presque-périodique à droite.

On parlera donc simplement de fonctions faiblement presque-périodiques sur G , et on désignera par $W(G)$ l'ensemble de ces fonctions faiblement presque-périodiques.

4. Fonctions faiblement presque-périodiques.

Soit G un groupe topologique. Le but de ce paragraphe est d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Le sous-ensemble $W(G)$ des fonctions faiblement presque-périodiques sur G est une sous-algèbre de Banach de l'algèbre de Banach $CB(G)$ des fonctions continues bornées sur G (pour la norme de la convergence uniforme).

Il est immédiat qu'un multiple scalaire d'une fonction de $W(G)$ appartient encore à $W(G)$.

Soient f_1 et f_2 dans $W(G)$, et considérons une suite (g_n) de G . D'après le théorème de Smul'jan, on peut extraire une suite (g'_p) de (g_n) telle que la suite des $f_1(g'_p\, x)$ soit convergente dans $CB(G)$ muni de la topologie faible ; on peut de même extraire de (g'_p) , une suite (g''_q) telle que $f_2(g''_q\, x)$ soit convergente dans $CB(G)$ muni de la topologie faible. Alors $(f_1 + f_2)(g''_q\, x)$ est convergente dans $CB(G)$ muni de la topologie faible ; autrement dit, $f_1 + f_2$ appartient à $W(G)$. Il en résulte que $W(G)$ est un sous-espace vectoriel de $CB(G)$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy (pour la topologie de la convergence uniforme) de limite f , et considérons une suite (g_p) d'éléments de G . Par procédé diagonal, on peut extraire de (g_p) une suite (h_q) telle que la suite en q , $(f_n(h_q\, x))$, soit faiblement convergente pour tout n ; on désignera par k_n cette limite faible pour tout entier n . On a, en posant $E = CB(G)$,

$$\|k_n - k_m\| = \sup_{\substack{z\in E' \\ \|z\|=1}} |z(k_n - k_m)| = \sup_{\substack{z\in E' \\ \|z\|=1}} \lim_q |z(f_n(h_q\, x)) - z(f_m(h_q\, x))|$$

$$\leqslant \lim_q \|f_n(h_q\, x) - f_m(h_q\, x)\| = \|f_n - f_m\| \ .$$

Il en résulte que (k_n) est une suite de Cauchy de $CB(G)$; soit k sa limite. Pour tout $z \in CB(G)'$, on a

$$|z(k) - z(f(h_q\, x))|$$
$$\leqslant |z(k) - z(k_n)| + |z(k_n) - z(f_n(h_q\, x))| + |z(f_n(h_q\, x)) - z(f(h_q\, x))|$$
$$\leqslant \|z\|\ \|k - k_n\| + \|z\|\ \|f_n - f\| + |z(k_n) - z(f_n(h_q\, x))| \ .$$

En prenant n assez grand, on peut réaliser $\|z\|\ \|k - k_n\| < \varepsilon/3$ et $\|z\|\ \|f_n - f\| < \varepsilon/3$. En prenant ensuite q assez grand, on peut réaliser $|z(k_n) - z(f_n(h_q\, x))| < \varepsilon/3$. Il en résulte que k est la limite faible des translatées à gauche $f(h_q\, x)$ de f . Autrement dit, la suite $f(h_q\, x)$ est faiblement convergente et, d'après le théorème de Šmul'jan, $f \in W(G)$. On a ainsi montré que $W(G)$ est un sous-espace fermé de $CB(G)$.

Reste à voir que $W(G)$ est stable par multiplication. Soit βG le spectre de Stone-Čech de G . L'algèbre de Banach $CB(G)$ s'identifie à $C(\beta G)$, par définition de βG . Soit g_n une suite d'éléments de G , et soient f' , $f'' \in W(G)$. D'après la remarque qui suit la proposition 1, on peut extraire de (g_n) une suite (g'_p) telle que $f'(g'_p\, x)$ soit simplement convergente sur βG ; de même, de (g'_p) on peut extraire une suite (g''_q) telle que $f''(g''_q\, x)$ soit simplement convergente sur βG . La suite $f'(g''_q\, x)\, f''(g''_q\, x)$ est alors simplement convergente sur βG . D'après la remarque qui suit la proposition 1, la suite $f'(g''_q\, x)\, f''(g''_q\, x)$ est alors convergente dans $CB(G)$ muni de la topologie faible, et $f'.f'' \in W(G)$.

Q. E. D.

Comme il est d'autre part immédiat qu'une fonction est faiblement presque-périodique si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont, il résulte du théorème 1 et du théorème de Gel'fand-Najmark que l'algèbre de Banach $W(G)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact wG , que l'on appellera <u>le compactifié d'Eberlein de</u> G .

La proposition suivante précise le rôle du compactifié d'Eberlein dans la théorie des représentations :

PROPOSITION 2. - <u>Soient</u> G <u>un groupe topologique,</u> r <u>une représentation linéaire équicontinue de</u> G <u>comme groupe d'opérateurs simplement borné de</u> E . <u>Si</u> x <u>est un élément faiblement presque-périodique par rapport à</u> G <u>de</u> E , <u>l'application continue</u> $g \longmapsto gx$ <u>de</u> G <u>dans</u> E <u>muni de la topologie affaiblie, se prolonge en une application continue du compactifié d'Eberlein</u> wG <u>de</u> G <u>dans</u> E <u>muni de la topologie affaiblie.</u>

Soit βG le compactifié de Stone-Čech de G . L'injection canonique de $W(G)$ dans $CB(G)$ se transpose en une application surjective continue $\beta G \longmapsto wG$. Le compactifié d'Eberlein wG s'identifie ainsi au quotient de βG par la relation d'équivalence : $x \equiv y$ si, et seulement si, $f(x) = f(y)$ pour toute $f \in W(G) \subset CB(G) = C(\beta G)$.

Soit alors x un élément faiblement presque-périodique de E par rapport à G . Par définition d'une représentation linéaire continue, l'application $g \longmapsto gx$ est continue pour la topologie initiale de E et, a fortiori, pour la topologie affaiblie $\sigma(E\, ,\, E')$. Par définition du compactifié de Stone-Čech βG de G , ou plus exactement en raison de sa propriété universelle, l'application précédente de G dans l'adhérence faible $\overline{Gx}$ de l'orbite Gx de x , se prolonge en une application continue de βG dans $\overline{Gx}$ muni de la topologie induite par la topologie faible. Si $z \in E'$, la fonction continue bornée $g \longmapsto \langle gx , z \rangle$ appartient à $W(G)$, en vertu du corollaire 2 du lemme 1 du paragraphe 2. Si η et ω sont deux éléments de βG tels que $f(\eta) = f(\omega)$ pour toute $f \in W(G)$, on a $\langle \eta x , z \rangle = \langle \omega x , z \rangle$ pour toute $z \in E'$, d'où $\eta x = \omega x$. Autrement dit, l'application $\beta G \longmapsto E$ est constante sur les classes d'équivalence qui définissent wG comme quotient de βG. D'où la proposition.

Q. E. D.

5. La moyenne invariante sur wG.

Soit toujours G un groupe topologique. La sous-algèbre de Banach $W(G)$ de $CB(G)$, composée des fonctions faiblement presque-périodiques, est évidemment stable par translations à droite et à gauche par des éléments de G. Comme de telles translations sont des opérations unitaires, on en déduit que ces translations sont associées à des homéomorphismes de wG :

Soit ω l'isomorphisme de $W(G)$ sur $C(wG)$. Pour tout $g \in G$ et toute $f \in W(G)$, on désigne par $\sigma_g f$ (resp. par $\tau_g f$) la translatée à gauche (resp. à droite) de f par g, définie par $\sigma_g f(h) = f(g^{-1} h)$ (resp. $\tau_g f(h) = f(hg)$). Il existe alors une représentation (au sens algébrique) unique γ (resp. δ) de G dans le groupe des homéomorphismes de l'espace compact wG, telle que, pour toute $f \in W(G) \simeq C(wG)$ et tout $g \in G$, on ait

$$\omega(\sigma_g f) = \omega(f) \circ \gamma(g) \qquad (\text{resp. } \omega(\tau_g f) = \omega(f) \circ \delta(g)) .$$

Il est immédiat que $\gamma(g) \circ \delta(h) = \delta(h) \circ \gamma(g)$, quels que soient g et h dans G.

La construction de la mesure de Haar sur un groupe compact, donnée par von NEUMANN, conduit plus généralement au résultat suivant :

LEMME 3. - *Soient G un groupe, et S un espace compact. On suppose données deux représentations r et s de G dans le groupe des homéomorphismes de S, telles que :*

1° *Pour tous g et $h \in G$, $r(g) \circ s(h) = s(h) \circ r(g)$;*

2° *Toute $f \in C(S)$, telle que $f \circ r(g) = f$ (resp. $f \circ s(g) = f$) pour tout $g \in G$, est constante ;*

3° *Pour toute $f \in C(S)$, il existe, dans l'enveloppe convexe fermée (pour la topologie de la convergence uniforme) des translatées $f \circ r(g)$ (resp. $f \circ s(g)$) de f, au moins une fonction constante.*

Alors il existe une mesure positive m sur S, de masse totale 1, invariante

<u>par les représentations</u> r <u>et</u> s . <u>Toute mesure sur</u> S <u>invariante par</u> r (<u>resp. par</u> s) <u>est proportionnelle à</u> m .

Montrons d'abord qu'il existe, dans l'enveloppe convexe fermée des translatées $f \circ r(g)$ (resp. $f \circ s(g)$) de f , une fonction constante, et une seule :

D'après le 3°, on peut trouver une constante $c(f)$ (resp. $d(f)$) satisfaisant à la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_1 , \dots , c_n > 0$ (resp. $d_1 , \dots , d_p > 0$), de somme 1 , et $g_1 , \dots , g_n \in G$ (resp. $h_1 , \dots , h_p \in G$), tels que

$$\|c(f) - \sum c_i \, f \circ r(g_i)\| < \varepsilon \qquad (\text{resp. } \|d(f) - \sum d_j \, f \circ s(h_j)\| < \varepsilon \text{) } .$$

On en déduit, en remarquant que les $r(g)$ et les $s(h)$ sont unitaires comme opérateurs dans $C(S)$,

$$\|c(f) - \sum_{i,j} c_i \, d_j \, f \circ r(g_i) \circ s(h_j)\| < \varepsilon$$

et

$$\|d(f) - \sum_{i,j} c_i \, d_j \, f \circ s(h_j) \circ r(g_i)\| < \varepsilon \ .$$

Comme, d'après le 1°, $r(g_i) \circ s(h_j) = s(h_j) \circ r(g_i)$ pour tous i et j , on a $\|c(f) - d(f)\| < 2\varepsilon$. Or ε est arbitraire, d'où $c(f) = d(f)$. Si $c'(f)$ est une deuxième fonction constante appartenant à l'enveloppe convexe fermée des translatées $f \circ r(g)$ de f , on a, d'après ce qui précède, $c'(f) = d(f) = c(f)$. On montre, de même, qu'il existe une constante unique $d(f)$ dans l'enveloppe convexe fermée des translatées $f \circ s(h)$ de f . On désignera, dans ce qui suit, par $m(f)$ la valeur commune de $c(f)$ et de $d(f)$, qui est donc l'unique constante appartenant à l'enveloppe convexe fermée des translatées $f \circ r(g)$ (resp. $f \circ s(h)$) de f pour la représentation r (resp. s). Il est immédiat que $|m(f)| \leqslant \|f\|$ pour toute $f \in C(S)$, que $m(\lambda f) = \lambda m(f)$ pour toute $f \in C(S)$ et toute constante λ , que $m(1) = 1$, et que $m(f \circ r(g)) = m(f)$ (resp. $m(f \circ s(h)) = m(f)$) pour toute $f \in C(S)$ et tout $g \in G$ (resp. $h \in G$). En particulier, soit $k(f)$ une constante qui appartient à l'enveloppe convexe fermée des translatées $f \circ r(g) \circ s(h)$ de f ; pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $g_1 , \dots , g_n \in G$, $h_1 , \dots , h_p \in G$, et une famille double (c_{ij}) , $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, de nombres > 0 , de somme 1 , tels que $\|k(f) - \sum c_{ij} \, f \circ r(g_i) \circ s(h_j)\| < \varepsilon$. On a alors

$$\|k(f) - \sum c_{ij} \, m(f \circ r(g_i) \circ s(h_j))\| < \varepsilon \ ,$$

soit

$$\|k(f) - \sum c_{ij} \, m(f)\| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|k(f) - m(f)\| < \varepsilon \ .$$

Comme ε est arbitraire, on a ainsi $k(f) = m(f)$.

Pour montrer que m est une mesure sur S , il suffit de vérifier l'additivité : $m(f_1 + f_2) = m(f_1) + m(f_2)$.

On peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, des éléments $g_1 , \ldots , g_m$ (resp. $h_1 , \ldots , h_n$) de G , et des nombres réels > 0 , $c_1 , \ldots , c_m$ (resp. $d_1 , \ldots , d_n$), tels que

$$\|m(f_1) - \sum c_i\, f_1 \circ r(g_i)\| < \varepsilon \qquad (\text{resp. } \|m(f_2) - \sum d_j\, f_2\, r(h_j)\| < \varepsilon\ ) \quad .$$

On a alors

$$\|m(f_1) + m(f_2) - \sum c_i\, d_j (f_1 + f_2) \circ r(g_i) \circ s(h_j)\| < 2\varepsilon \quad .$$

Il en résulte que $m(f_1) + m(f_2)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée des translatées $(f_1 + f_2) \circ r(g) \circ s(h)$ de $(f_1 + f_2)$. D'après les remarques faites plus haut, on a $m(f_1) + m(f_2) = m(f_1 + f_2)$.

Soit maintenant μ une mesure sur S invariante par r ; on désignera par $\|\mu\|$ la norme de μ . Soit $f \in C(S)$; pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $c_1 , \ldots , c_n$, nombres réels > 0 , de somme 1 , et $g_1 , \ldots , g_n \in G$, tels que

$$\|m(f) - \sum c_i\, f \circ r(g_i)\| < \varepsilon \quad .$$

On a alors

$$|m(f)\, \mu(1) - \sum c_i\, \mu(f \circ r(g_i))| < \varepsilon\|\mu\| \quad ,$$

soit

$$|m(f)\, \mu(1) - \mu(f)| < \varepsilon \quad .$$

Or ε est arbitraire, d'où $\mu(f) = m(f)\, \mu(1)$ pour toute $f \in C(S)$. On montre de même que $\nu(f) = m(f)\, \nu(1)$ pour toute mesure ν sur S invariante par s .

La démonstration du lemme 3 est ainsi achevée.

Q. E. D.

Soit G un groupe topologique. Nous allons appliquer le lemme précédent à l'espace compact wG et aux deux représentations γ et δ de G dans le groupe des homéomorphismes de wG . On vérifie aussitôt que les conditions 1° et 2° du lemme sont satisfaites, une fonction de $CB(G)$ invariante à droite ou à gauche par G étant constante. Quant à la condition 3°, elle sera une conséquence immédiate du théorème suivant, qui est un cas particulier du théorème A :

THÉORÈME de Ryll-Nardzewski. - Soient E un espace de Banach, G un groupe d'automorphismes unitaires de E , et K un ensemble convexe faiblement compact de E stable par G . L'ensemble K contient au moins un point invariant par G .

On va d'abord procéder à quelques réductions. On peut représenter G comme la réunion de ses sous-groupes H de type fini ; on a alors $E^G = \bigcap E^H$ et $E^G \cap K = \bigcap(E^H \cap K)$, cette dernière famille étant une famille filtrante décroissante d'ensembles faiblement fermés de l'ensemble faiblement compact K . Donc, si chacun des $E^H \cap K$ est non vide, il en est de même de leur intersection. Autrement dit, on peut supposer que G est de type fini.

Soit $k \in K$, et soit F le sous-espace de Banach engendré par l'orbite Gk de k ; comme G est de type fini, F est séparable. La topologie affaiblie $\sigma(F , F')$ induit, sur l'enveloppe convexe fermée L de Gk , une topologie moins fine que la topologie affaiblie $\sigma(E , E')$ de E ; autrement dit, L est aussi un sous-ensemble convexe faiblement compact de l'espace de Banach F . Donc, si le théorème est vrai pour le triplet (F , G , L) , il est valable pour le triplet initial. On peut donc supposer que l'espace E du théorème est séparable.

Enfin, il est immédiat que toute famille décroissante, totalement ordonnée de sous-ensembles convexes faiblement compacts et stables par G de E , possède un plus petit élément, à savoir l'intersection des ensembles qui composent cette famille. On peut donc parler des ensembles convexes faiblement compacts et stables par G <u>minimaux</u> de E . Le théorème de Ryll-Nardzewski équivaut à dire qu'un tel ensemble minimal est réduit à un point.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 4 (NAMIOKA and ASPLUND ; cf. [4], appendix 2). - <u>Soient</u> E <u>un espace de Banach séparable,</u> K <u>un sous-ensemble convexe faiblement compact de</u> E <u>non réduit à un point, et</u> ε <u>un nombre réel</u> > 0 . <u>Il existe un sous-ensemble convexe faiblement</u> $K_\varepsilon \subset K$, $K_\varepsilon \neq K$, <u>tel que le diamètre du complémentaire</u> $\complement_K K_\varepsilon$ <u>soit</u> $< \varepsilon$.

L'ensemble K , qui est faiblement compact, est borné. Si $\varepsilon > \operatorname{diam} K$, la démonstration du lemme est immédiate, puisqu'il suffit de prendre pour K_ε un point quelconque de K . On supposera donc, dans ce qui suit, que $\varepsilon \leqslant \operatorname{diam} K$.

Soit B la boule fermée de centre 0 et de rayon $\varepsilon/4$, et soit P l'adhérence faible de l'ensemble des points extrêmaux de K . Comme E est séparable, on peut trouver une suite (p_n) d'éléments de P tels que $\bigcup(p_n + B) \supset P$. Comme B est un ensemble convexe fermé, B est faiblement fermé, ainsi que $p_n + B$ pour tout n . Comme P est faiblement compact, et est donc un espace de Baire pour la topologie faible, il existe un $p \in P$ et un ouvert W (pour la topologie affaiblie $\sigma(E , E')$), tels que $P \cap (p + B) \supset P \cap W \neq \emptyset$. On notera K_1 (resp. K_2) l'enveloppe fermée de $P \cap \complement W$ (resp. de $W \cap P$). On a évidemment $K_1 \subset K$ (resp. $K_2 \subset K$). On ne peut avoir $P = W \cap P$: $W \cap P$ est de diamètre $\varepsilon/2$, et son enveloppe convexe fermée K_2 est donc de diamètre $\varepsilon/2 < \operatorname{diam} K$. Comme $P \cap W \neq P$ est un ensemble faiblement fermé, il résulte du théorème de Krejn-Mil'man que $K_1 \neq K$.

Pour tout nombre réel $0 \leqslant r \leqslant 1$, on posera $L_r = (tk_1 + (1-t)k_2)$, $k_i \in K_i$, $r \leqslant t \leqslant 1$. La famille L_r est une famille décroissante de $L_0 = K$ (L_0 étant l'enveloppe convexe fermée de $K_1 \cup K_2$ qui contient P) à K_1 , d'ensembles convexes faiblement compacts. Pour tout $r > 0$, on a $L_r \neq K$: un point extrêmal de L_r est de la forme $k = tk_1 + (1-t)k_2$, avec $k_i \in K_i$ et $t \geqslant r$. Si $L_r = K$, un tel point extrêmal k est aussi un point extrêmal de K , et, comme t est $\neq 0$, on devrait avoir $k = k_1$; autrement dit, tous les points extrêmaux de K seraient contenus dans K_1 , et on aurait $K = K_1$, contrairement à ce que l'on a vu plus haut.

Soit $k \in K \cap \complement L_r$, avec $r > 0$; on a $k = tk_1 + (1-t)k_2$, avec $k_i \in K_i$ et $t < r$. Par suite,

$$\|k - k_2\| = \|tk_1 + (1-t)k_2 - k_2\| = |t| \, \|k_1 - k_2\| \leqslant |r| \, \|k_1 - k_2\| \quad .$$

Comme K est borné, on a ainsi la majoration

$$\|k - k_2\| \leqslant r \operatorname{diam} K \quad .$$

Soit k' un deuxième élément de K n'appartenant pas à L_r ; on a

$$\|k - k'\| \leqslant \|k - k_2\| + \|k_2 - k_2'\| + \|k_2' - k'\| \leqslant 2r \operatorname{diam} K + \operatorname{diam} K_2 \quad ,$$

d'où

$$\operatorname{diam} \complement_K L_r \leqslant 2r \operatorname{diam} K + \operatorname{diam} K_2 \quad .$$

On a vu plus haut que $\operatorname{diam} K_2 \leqslant \varepsilon/2$. Si l'on prend r tel que $r < \varepsilon/4 \operatorname{diam} K$, on a $\operatorname{diam} K \cap \complement L_r < \varepsilon$. L'ensemble $K_\varepsilon = L_r$ répond alors aux conditions du lemme.

Q. E. D.

On peut alors établir le théorème de Ryll-Nardzewski en utilisant les remarques qui suivent l'énoncé de ce théorème.

Soit K un ensemble convexe faiblement compact stable par G et minimal pour ces propriétés de l'espace de Banach séparable E . Supposons que K ne soit pas réduit à un point, et soient k et k' deux points distincts de K ; on posera $d = \|k - k'\|$. Comme K n'est pas réduit à un point, on peut trouver, d'après le lemme précédent, un sous-ensemble convexe faiblement compact L de K , distinct de K , et tel que le complémentaire de $\complement_K L$ soit de diamètre $< d/2$. Soit $g \in G$; on ne peut avoir $g((k + k')/2) \in \complement_K L$: s'il en était ainsi, on aurait, puisque $\|g(k) - g((k + k')/2)\| = \frac{1}{2} d$, G étant unitaire, $g(k) \in L$; on aurait de même $g(k') \in L$, et, comme L est convexe, $g((k + k')/2)$, ce qui serait contradictoire. L'enveloppe convexe fermée de l'orbite de $(k + k')/2$ serait alors un ensemble convexe faiblement compact stable par G et contenu dans L , donc distinct de K . Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que K est minimal.

Q. E. D.

Le théorème précédent montre alors que la condition 3° du lemme 3 est satisfaite pour tout groupe topologique G par l'espace compact wG et les représentations γ et δ : en effet, G étant un groupe, les translations à droite et à gauche sont des opérateurs unitaires dans $CB(G)$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - Soit G un groupe topologique. Il existe sur wG une mesure positive m , de masse totale 1 , invariante à gauche et à droite par G . Cette mesure est unique.

Remarque. - L'application de $G \times G$ dans G , définie par le produit dans G , se "prolonge" en une multiplication séparément continue sur wG . Soit S le support de m dans wG . On peut montrer que S est un groupe compact pour la multiplication induite, groupe qui s'identifie au groupe compact presque-périodique associé à G (cf. [3]).

6. Démonstration des théorèmes A et B de l'introduction.

Démontrons d'abord le théorème A. Soient E un e. v. t. l. c., G un groupe équicontinu d'automorphismes de E , K un sous-ensemble convexe faiblement compact de E stable par G . Choisissons un $k \in K$. D'après la proposition 2 du paragraphe 4, l'application $g \longmapsto gk$ de G_d (i. e. de G muni de la topologie discrète) dans K , se prolonge en une application continue r_k de wG_d dans K muni de la topologie induite par la topologie affaiblie. Comme $r_k(wG_d) \subset K$, qui est un ensemble convexe compact pour la topologie affaiblie $\sigma(E , E')$, et comme r_k est continue, l'intégrale faible de r_k par rapport à l'unique mesure positive m de masse totale 1 , invariante par G sur wG_d (cf. § 5, proposition 3), appartient encore à K : $\int_{wG} r_k(w)\, dm(w) \in K$. Pour tout $z \in E'$ et tout $g \in G$, on a

$$\langle g(\int_{wG} r_k(w)\, dm(w)) , z\rangle = \langle \int_{wG} r_k(w)\, dm(w) , {}^t g(z)\rangle$$

$$= \int_{wG} \langle r_k(w) , {}^t g(z)\rangle\, dm(w) = \int_{wG} \langle g r_k(w) , z\rangle\, dm(w) .$$

Or r_k est l'application de wG_d dans K , déduite de l'application $h \longmapsto h(k)$

de G_d dans K . Par suite, $w \longmapsto g(r_k(w))$ est déduite de l'application $h \longmapsto gh(k)$. On a donc $gr_k(w) = r_k(gw)$, et, comme m est invariante,

$$\int_{wG} \langle gr_k(w) , z \rangle \, dm(w) = \int_{wG} \langle r_k(w) , z \rangle \, dm(w) \quad .$$

On a donc

$$g\left(\int_{wG} r_k(w) \, dm(w)\right) = \int_{wG} r_k(w) \, dm(w) \quad ,$$

et $\int_{wG} r_k(w) \, dm(w)$ est un des éléments invariants cherchés.

Passons maintenant à la démonstration du théorème B. Pour tout $x \in E$, il résulte des hypothèses du théorème B et du théorème de Krejn que l'enveloppe convexe fermée $C(x)$ de l'orbite Gx de x est compacte pour $\sigma(E , E')$. On peut donc définir, d'après ce qui précède, l'élément invariant

$$Px = \int_{wG} r_x(w) \, dm(w) \quad ,$$

où $r_x(w)$ est l'application de wG_d dans $C(x)$, déduite de $g \longmapsto gx$. L'élément Px appartient à $C(x)$.

L'application $x \longmapsto Px$ est linéaire : si x et x' sont deux éléments de E , $r_{x+x'}(w)$, application déduite de $g \longmapsto g(x + x') = gx + gx'$, est égale à $r_x(w) + r_{x'}(w)$. On a ainsi $P(x + x') = Px + Px'$. D'autre part, il est immédiat que $P(cx) = cP(x)$ pour toute constante c .

L'application P est continue : comme le groupe G est équicontinu, pour tout voisinage V de 0 dans E , on peut trouver un voisinage W de 0 dans E tel que $gx \in V$ pour tout $x \in W$, et on peut supposer que V et W sont des ensembles convexes fermés. Pour tout $x \in W$, l'enveloppe convexe fermée $C(x)$ de l'orbite Gx de x est contenue dans V ; comme Px appartient à cette enveloppe, on a $Px \in V$. Autrement dit, $P(W) \subset V$, et P est continue.

Soit $x \in E$, et soit u un élément de $C(x)$ qui soit invariant. Soit V un voisinage convexe fermé de 0 ; comme G est équicontinu, $\bigcap_{g \in G} g^{-1}(V) = W$ est un voisinage de 0 . On peut donc trouver des nombres réels $c_1 , \ldots , c_n > 0$, de somme 1 , et des $g_1 , \ldots , g_n \in G$, tels que $u - \sum c_i \, g_i \, x \in W$. On a alors, u étant invariant,

$$u - \sum c_i \, gg_i \, x \in K = C(u - \sum c_i \, g_i \, x) \subset V \quad .$$

Comme G est faiblement presque-périodique, l'ensemble K est faiblement compact. Soit $s(w)$ l'application de wG dans K , déduite de l'application $g \longmapsto s(g) = u - \sum c_i \, gg_i \, x$. On a

$$\int_{wG} s(w)\, dm(w) \in K \qquad \text{et} \qquad \int_{wG} s(w)\, dm(w) = u - \sum c_i \int_{wG} wg_i\, x\, dm(w) \quad .$$

Comme m est invariante à droite, on a $\int wg_i\, x\, dm(w) = \int wx\, dm(w) = Px$. Autrement dit, $u - Px \in K \subset V$, et, comme V est arbitraire, $u = Px$. Il en résulte que Px est l'unique élément invariant par G de $C(x)$.

Soient toujours $x \in E$ et $g \in G$. Comme G est un groupe, $Gx = Ggx$, $C(x) = C(gx)$, et $P(gx)$, élément invariant par G de $C(gx) = C(x)$, est égal à Px , puisque Px est l'unique élément invariant par G appartenant à $C(x)$.

Pour tout $x \in E$, on a $x = Px + (I - P)x$. Il est immédiat de vérifier que $(I - P)x$ est adhérent à l'enveloppe convexe de l'ensemble des différences $x - gx$, $g \in G$. On a donc $(I - P)x \in E_G$, et $E = E^G + E_G$. Un élément x de E^G est tel que $x = Px$; pour tout élément de la forme $y - gy$, on a $P(y - gy) = Py - P(gy) = 0$; par suite, P s'annule sur le sous-espace vectoriel de E engendré par les différences $y - gy$, et, comme P est continu, il s'annule sur l'adhérence E_G de ce sous-espace. Si $x \in E^G \cap E_G$, on a ainsi $x = Px = 0$, et E est somme directe de E^G et de E_G . Mais le projecteur P de E sur E^G est continu, et $(I - P)$ projette sur E_G . La décomposition considérée est donc également topologique. La démonstration du théorème B est ainsi achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALAOGLU (L.) and BIRKHOFF (G.). - General ergodic theorems, Annals of Math., Series 2, t. 41, 1940, p. 293-309.

[2] EBERLEIN (W. F.). - Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 67, 1949, p. 217-240.

[3] GLICKSBERG (I.) and de LEEUW (K.). - Applications of almost periodic compactifications, Acta Math., Uppsala, t. 105, 1961, p. 63-97.

[4] GREENLEAF (Frederick P.). - Invariant means on topological groups and their applications. - New York, Van Nostrand - Reinhold Company, 1969 (Van Nostrand Mathematical Studies, 16).

[5] GROTHENDIECK (A.). - Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, Amer. J. of Math., t. 74, 1952, p. 168-186.

(Texte reçu le 23 mars 1971)

François ARIBAUD
M. Conf. Univ. Paris-VI
Institut de Mathématiques pures
11 quai Saint-Bernard, Tour 46
75 - PARIS 05