SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

NESSIM SIBONY

Problème de Bernstein pour les fonctions différentiables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 12, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
9e année, 1969/70, n° 12, 9 p.

5 mars 1970

PROBLÈME DE BERNSTEIN POUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Nessim SIBONY

On étudie le problème de Bernstein pour des fonctions de classe C^n sur $\underset{\sim}{R}$, et pour des espaces de distributions sur $\underset{\sim}{R}$.

1. Position du problème et notations.

On dit qu'une fonction h, s. c. s. positive sur $\underset{\sim}{R}$, est un poids, si

$$\sup_{x\in\underset{\sim}{R}} |x|^p\, h(x) < \infty , \qquad \text{pour tout entier } p .$$

Soit $\mathcal{H} = (h_0 , \ldots , h_n)$ un système de $(n + 1)$ poids sur $\underset{\sim}{R}$ vérifiant la condition $h_0 \geqslant h_1 \geqslant \ldots \geqslant h_n$; $C^n_{\mathcal{H}}(\underset{\sim}{R})$ désignera l'espace vectoriel des fonctions de classe C^n sur $\underset{\sim}{R}$ telles que $h_i(x)|f^{(i)}(x)|$ tende vers zéro à l'infini, pour tout entier $i \leqslant n$.

On pose

$$N(f) = \sup_{i\leqslant n} \sup_x h_i(x)|f^{(i)}(x)| \quad ;$$

N est une semi-norme, mais on se placera dans le cas où c'est une norme sur $C^n_{\mathcal{H}}(\underset{\sim}{R})$.

De même, $\mathcal{K} = (k_0 , \ldots , k_n)$ étant un système de $(n + 1)$ fonctions mesurables sur $\underset{\sim}{R}$ et localement bornées telles que $\int |x|^r\, k_i(x)\, dx < \infty$, pour tout entier r et pour tout $i \leqslant n$, $W^{n,p}_{\mathcal{K}}$ désignera l'espace des distributions sur $\underset{\sim}{R}$ dont la dérivée d'ordre i, $i \leqslant n$, est dans $L^p(k_i\, dx)$; on suppose, de plus, que $k_0 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_n$.

Pour f appartenant à $W^{n,p}_{\mathcal{K}}$, on note

$$\|f\| = \sup_{i\leqslant n} \left(\int |f^{(i)}(x)|\; k_i(x)\; dx\right)^{1/p} .$$

Le problème est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur le système $\mathcal{H}$ (resp. le système $\mathcal{K}$) pour que l'espace vectoriel des polynômes soit dense dans $C^n_{\mathcal{H}}(\underset{\sim}{R})$ (resp. $W^{n,p}_{\mathcal{K}}$). On dira alors que le système $\mathcal{H}$ (resp. le système $\mathcal{K}$) est <u>fondamental</u>.

On notera $\mathcal{H}_1$ le système $((1 + |x|)h_i)_{i\leqslant n}$, et $\mathcal{K}_1$ le système $((1 + |x|)^p\, k_i)_{i\leqslant n}$;

N_1 (resp. $\|\cdot\|_1$) désignera la norme associée.

$C_c^n(\underset{\sim}{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe C^n à support compact, et $C_0^n(\underset{\sim}{R})$ celui des fonctions de classe C^n tendant vers zéro à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre inférieur à n.

On notera $\underset{\sim}{C}[x]$ l'espace des polynômes à une variable à coefficients dans $\underset{\sim}{C}$.

2. PROPOSITION 1. - $C_c^n(\underset{\sim}{R})$ <u>est partout dense dans</u> $C_{\mathcal{K}}^n(\underset{\sim}{R})$ <u>et dans</u> $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$.

<u>Démonstration.</u>

(a) <u>Densité dans</u> $C_{\mathcal{K}}^n(\underset{\sim}{R})$. K étant un compact de $\underset{\sim}{R}$, et $\delta > 0$, il existe une fonction C^∞, $\alpha \geqslant 0$ sur $\underset{\sim}{R}$, telle que $\alpha = 1$ dans un voisinage de K, et $\alpha(x) = 0$ si $d(x, K) \geqslant \delta$, et de plus $|\alpha^{(i)}(x)| \leqslant \frac{M}{\delta^i}$ pour $i \leqslant n$, où M est une constante ne dépendant que de n.

Soient $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, et $f \in C_{\mathcal{K}}^n(\underset{\sim}{R})$; posons

$$K_i = \{x \mid h_i(x)|f^i(x)| \geqslant \varepsilon \frac{\delta^{2n}}{M}\} \qquad \text{et} \qquad K = \bigcup_{i=0}^{n} K_i \quad ,$$

K est compact, $\alpha f \in C_c^n(\underset{\sim}{R})$, de plus

$$h_i(x)|f^{(i)}(x) - (\alpha f)^{(i)}(x)| \leqslant h_i(x)|f^i(x) - \alpha f^i(x)| + Ch_i(x) \sum_{j=1}^{i} |\alpha^j f^{(i-j)}(x)|$$

$$\leqslant h_i(x)|f^i(x) - \alpha f^i(x)| + C \sum_{j=1}^{i} h_{i-j}|\alpha^j f^{i-j}(x)| \quad .$$

On a utilisé l'hypothèse $h_i \leqslant h_{i-j}$. Sur K, $h_i|f^i - \alpha f^i|$ est nul, et à l'extérieur de K, il est inférieur à ε/M ; de même, $h_{i-j}|\alpha^j f^{(i-j)}|$ est nul dans un voisinage de K, et à l'extérieur de K, il est inférieur à $\frac{M}{\delta^j} \varepsilon \frac{\delta^{2n}}{M} \leqslant \varepsilon$.

D'où il résulte que

$$h_i(x)|f^i(x) - (\alpha f)^i(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} + Cn\varepsilon \quad ,$$

ε étant arbitraire, ceci achève la démonstration.

(b) <u>Densité dans</u> $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$. Les distributions à support compact telles que $f^{(i)} \in L^p(k_i)$ sont denses dans $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$; en effet, soit Φ appartenant à $C_c^\infty(\underset{\sim}{R})$, Φ nulle hors de $(-2, +2)$, et valant 1 sur $(-1, +1)$, et soit Φ_r telle que $\Phi_r(x) = \Phi\left(\frac{x}{r}\right)$. On a

$$(\int |(\Phi_r\ f)^i - f^i|^p\ k_i\ dx)^{1/p}$$

$$\leq (\int |\Phi_r\ f^i - f^i|^p\ k_i\ dx)^{1/p} + C \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{r^j} (\int |\Phi^j(\frac{x}{r})\ f^{(i-j)}(x)|^p\ k_{i-j}(x)\ dx)^{1/p} ,$$

car $k_{i-j} \geq k_i$; il suffit de faire tendre r vers l'infini dans l'inégalité précédente. Il reste à approcher f à support compact K avec f dans $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$ par des fonctions de $C_c^n(\underset{\sim}{R})$.

Posons

$$(J_\varepsilon\ f)(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int \Phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\ dy \quad ,$$

$J_\varepsilon\ f \in C_c^\infty(\underset{\sim}{R})$, $J_\varepsilon\ f$ est à support dans $H = \{x \mid d(x , K) \leq \varepsilon\}$; de plus,

$$(J_\varepsilon\ f)^{(i)}(x) = J_\varepsilon[f^{(i)}(x)] \quad ,$$

ceci pour $i \leq n$, donc

$$\int |(J_\varepsilon\ f)^i - f^i|^p\ k_i(x)\ dx = \int_H |J_\varepsilon\ f^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)|\ k_i(x)\ dx$$

$$\leq C \int_H |J_\varepsilon\ f^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)|^p\ dx$$

qui tend vers zéro avec ε .

On a utilisé le fait que k_i est bornée sur tout compact.

PROPOSITION 2. - <u>L'espace vectoriel</u> V <u>engendré par les</u> $(x - z)^{-1}$, $z \in \underset{\sim}{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, <u>est partout dense dans</u> $C_0^n(\underset{\sim}{R})$ <u>muni de la norme</u> $|||f||| = \sup_{i\leq n} \sup_x |f^{(i)}(x)|$.

<u>Démonstration</u>. - L'adhérence de V contient l'algèbre engendrée par V ; en effet, les éléments de la forme $(x - z_1)^{-1} \ldots (x - z_n)^{-1}$, où les z_i sont tous différents, sont dans V ; il suffit, en effet, de décomposer la fraction en éléments simples ; quant aux éléments de la forme $(x - z)^{-2}$, par exemple, on peut les approcher par $(x - z_1)^{-1} (x - z_2)^{-1}$, où $z_1 \neq z_2$, et z_1 et z_2 assez voisins de z .

Or l'algèbre A engendrée par V est auto-adjointe, sépare les points, et, pour tout $x \in \underset{\sim}{R}$, il existe $f \in A$ avec $f'(x) \neq 0$, d'où la densité dans $C_0^n(\underset{\sim}{R})$, ceci d'après un théorème de Reid (voir [6]).

COROLLAIRE 3. - <u>L'espace vectoriel</u> V , <u>engendré par</u> $(x - z)^{-1}$ <u>avec</u> $\operatorname{Im} z \neq 0$, <u>est partout dense dans</u> $C_{\mathcal{K}}^n(\underset{\sim}{R})$ (<u>resp. dans</u> $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$).

Démonstration. - Cela résulte des propositions 1 et 2, et du fait que les h_i sont bornés et les k_i intégrables.

THÉORÈME 4. - Le système $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{K}_1$) est fondamental, si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} z \neq 0$, on a

$$\sup_{\substack{N(p)\leqslant 1\\ p\in\mathbb{C}[x]}} |p(z)| = +\infty \qquad \left(\text{resp. } \sup_{\substack{\|p\|\leqslant 1\\ p\in\mathbb{C}[x]}} |p(z)| = +\infty\right) .$$

Démonstration. - Supposons que $(x - z_0)^{-1}$ appartienne à l'adhérence de $\mathbb{C}[x]$ dans $\mathcal{C}^n_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit P un polynôme tel que

$$(1) \qquad (1 + |x|)\, h_i(x)\,|(x - z_0)^{-(i+1)}(-1)^i\, i! - P^{(i)}(x)| \leqslant \varepsilon .$$

Posons

$$K = \sup_{0\leqslant i\leqslant n} \sup_x \frac{|x - z_0|^{i+1}}{(1 + |x|)^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad Q(x) = (x - z_0)\, P(x) - 1 .$$

On a $|\frac{Q}{\varepsilon K}(z_0)| = \frac{1}{\varepsilon K}$; or, d'après (1), $h_0(x)|Q(x)| \leqslant \varepsilon K$. On va montrer que $N(Q/\varepsilon K) \leqslant M$. Pour $i \leqslant n$, soit

$$Q_i(x) = P^{(i)}(x)\,(x - z_0)^{i+1} + (-1)^{i+1}\, i! .$$

On a

$$(x - z_0)^i\, Q^{(i)}(x) = Q_i(x) + iQ_{i-1}(x) ,$$

donc

$$h_i(x)|Q^{(i)}(x)| \leqslant \frac{h_i(x)}{|x - z_0|^i}\,|Q_i(x)| + i\,\frac{h_{i-1}(x)}{|x - z_0|^i}\,|Q_{i-1}(x)| .$$

Or, d'après (1),

$$\frac{h_i(x)}{|x - z_0|^i}\,|Q_i(x)| \leqslant \varepsilon K \qquad \text{et} \qquad \frac{h_{i-1}(x)}{|x - z_0|^i}\,|Q_{i-1}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon K}{\beta} ,$$

où $\beta = \operatorname{Im} z_0 > 0$, donc

$$h_i\left|\frac{Q_i(x)}{\varepsilon K}\right| \leqslant \left(1 + \frac{i}{\beta}\right) .$$

Comme ε est arbitraire, l'assertion est vérifiée.

Montrons que la condition est suffisante. Soit P un polynôme tel que

$$h_i(x)|P^i(x)| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |P(z_0)| \geqslant N .$$

Posons

$$Q(x) = \frac{P(x) - P(z_0)}{(z_0 - x)\, P(z_0)} \quad .$$

Notons $C(z_0) = \sup\limits_{x} \dfrac{1 + |x|}{|x - z_0|}$; on a

$$(1 + |x|)\, h_0(x) |- Q(x) + (x - z_0)^{-1}| = \frac{(1 + |x|)}{|x - z_0|}\, h_0(x)\, \left|\frac{P(x)}{P(z_0)}\right| \leqslant \frac{1}{N}\, C(z_0) \quad .$$

On a

$$P^i(x) = - P(z_0)[Q^i(x)(x - z_0) + iQ^{i-1}(x)] \quad ,$$

et, par hypothèse, $h_i(x)|P^i(x)| \leqslant 1$, d'où

(2) $$(1 + |x|)\, h_i(x) |Q^i(x) + \frac{iQ^{(i-1)}(x)}{(x - z_0)}| \leqslant \frac{C(z_0)}{N} \quad .$$

Raisonnons par récurrence, et supposons que

$$(1 + |x|)\, h_{i-1}(x) |Q^{(i-1)}(x) + (-1)^i\, (i - 1)!\, (x - z_0)^{-i}| \leqslant \frac{K_{i-1}}{N} \quad ,$$

où K_{i-1} est une constante ne dépendant que de z_0 ; on a alors

$$\begin{aligned}
&(1 + |x|)\, h_i(x) |Q^i(x) + (-1)^{i+1}\, i!\, (x - z_0)^{-(i+1)}| \\
&\qquad \leqslant (1 + |x|)\, h_i(x) |Q^i(x) + \frac{iQ^{(i-1)}(x)}{(x - z_0)}| \\
&\qquad\qquad + (1 + |x|)\, h_i(x) | - \frac{iQ^{i-1}(x)}{(x - z_0)} + (-1)^{i+1}\, i!\, (x - z_0)^{-(i+1)}| \\
&\qquad \leqslant \frac{C(z_0)}{N} + \frac{(1 + |x|)}{|x - z_0|}\, h_{i-1}(x)\, i |Q^{(i-1)}(x) + (-1)^i\, (i - 1)!\, (x - z_0)^i| \\
&\qquad \leqslant \frac{C(z_0)}{N} + \frac{i}{\beta}\, \frac{K_{i-1}}{N} \quad .
\end{aligned}$$

La majoration du premier terme résulte de (2) ; celle du second résulte de l'hypothèse de récurrence ; $\beta = \operatorname{Im} z_0$; or N est arbitrairement grand, donc $(x - z_0)^{-1}$ est dans l'adhérence de $\underline{C}[x]$ dans $C^n_{\mathcal{H}_1}(\underline{R})$.

Nous n'écrirons pas la démonstration pour $W^{n,p}_{\mathcal{K}}$, car elle résulte d'approximations du même type.

THÉORÈME 5. - <u>Le système</u> $\mathcal{H}_1$ (<u>resp.</u> $\mathcal{K}_1$) <u>est fondamental, si, et seulement si,</u>

(3) $$\int_{\mathbb{R}} \sup_{\substack{N(p)\leq 1\\ p\in \mathbb{C}[x]}} \frac{\log|p(x)|}{1+x^2}\, dx = +\infty$$ (<u>resp. même condition avec</u> $\|p\| \leq 1$) .

Pour la démonstration, nous utilisons les lemmes suivants.

LEMME 6. - <u>Soit</u> B <u>la boule unité de</u> $C^n_{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$ (<u>resp.</u> $W^{n,p}_{\mathcal{K}}$) ; <u>soit</u> $\mathcal{B}_s$ <u>l'ensemble des fonctions</u> g <u>telles que</u> $g = (x-z)^{-1} f$ <u>avec</u> $f \in B$ <u>et</u> $\operatorname{Im} z > s > 0$. <u>Alors</u> $\mathcal{B}_s$ <u>est borné dans</u> $C^n_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})$ (<u>resp.</u> $W^{n,p}_{\mathcal{K}_1}$).

<u>Démonstration</u>.

(a) Dans $C^n_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})$,

$$(1+|x|)\, h_i(x)\,|((x-z)^{-1} f(x))^i| \leq C \sum_{p=0}^{i} \frac{(1+|x|)}{|x-z|}\, h_{i-p}(x)\,|f^{(i-p)}(x)\ (x-z)^{-p}| \leq M(s) .$$

(b) Dans $W^{n,p}_{\mathcal{K}_1}$,

$$(1+|x|)\, k_i^{1/p}(x)\,|((x-z)^{-1} f(x))^{(i)}| \leq C' \sum_{q=0}^{i} k_{i-q}^{1/p}(x)\,|f^{(i-q)}(x)| .$$

Puis on regarde les normes L^p de chaque membre de l'inégalité précédente.

Dans la suite, π désigne, soit la norme de $C^n_{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$, soit celle de $W^{n,p}_{\mathcal{K}}$.

LEMME 7. - <u>Soit</u>

$$\delta(z) = \inf_{p\in\mathbb{C}[x]} \pi[(x-z)\,p(x) - 1] , \qquad \operatorname{Im} z \neq 0 .$$

<u>Alors</u> $|p(z)|\ \delta(z) \leq 1$, <u>pour tout polynôme</u> p <u>tel que</u> $\pi(p) \leq 1$.

<u>Démonstration</u>. - Soit I l'idéal de $\mathbb{C}[x]$ engendré par $(x-z)$, et soit φ_z une forme linéaire continue sur $\mathbb{C}[x]$ muni de la norme π , nulle sur I , et telle que $|\varphi_z(1)| = \delta(z)$ et $\|\varphi_z\| = 1$.

L'existence d'une telle forme linéaire résulte du théorème de Hahn-Banach. Soit $p \in \mathbb{C}[x]$ avec $\pi(p) \leq 1$, $p(x) = p(z) + (x-z)\, q(x)$, donc $\varphi_z(p) = p(z)\, \varphi_z(1)$, et par suite

$$|p(z)|\ \delta(z) = |\varphi_z(p)| \leq 1 .$$

Soient B_s l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{B}_s$, π_s la jauge de B_s , et $\rho_s(z)$ la distance pour π_s de $(x-z)^{-1}$ à $\mathbb{C}[x]$ lorsque $\operatorname{Im} z > s > 0$. Il est clair que B_s absorbe les polynômes, et qu'on peut supposer $\rho_s(z) \leq 1$.

LEMME 8. - <u>Avec les notations précédentes,</u> $\rho_s(z) \leq \delta(z)$ <u>si</u> $\operatorname{Im} z > s$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\varepsilon > 0$; il existe $f \in B$ et un polynôme p tel que $(x - z)\, p(x) - 1 = [\delta(z) + \varepsilon]\, f(x)$, d'où

$$p(x) - (x - z)^{-1} = [\delta(z) + \varepsilon]\, f(x)\ (x - z)^{-1} \quad .$$

Par suite, $\rho_s(z) \leq \delta(z) + \varepsilon$; ε étant arbitraire, on a

$$\rho_s(z) \leq \delta(z) \quad .$$

LEMME 9. - <u>Soit</u> $(p_i)_{i\in I}$ <u>une famille de polynômes sur</u> $\mathbb{C}$ <u>majorés en valeur absolue sur un demi-plan</u> P <u>par une fonction</u> e^f , <u>où</u> f <u>est surharmonique positive dans</u> P ; <u>alors la famille</u> $(p_i)_{i\in I}$ <u>admet une majoration du même type sur tout demi-plan translaté de</u> P .

Pour la démonstration, voir [3] et [5].

<u>Démonstration du théorème</u> 5. - La condition (3) est <u>suffisante</u>. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} z_0 > s$, tel que $\rho_s(z_0) \neq 0$. D'après le théorème de Hahn-Banach,

$$\log \rho_s(z) = \sup_{\varphi} \log|\varphi[(x - z)^{-1}]| \quad ,$$

le sup étant pris sur les formes linéaires φ continues pour π_s telles que $\|\varphi\| \leq 1$. Or l'application $z \to \log|\varphi[(x - z)^{-1}]|$ est sousharmonique, car l'application $z \to (x \to (x - z)^{-1})$ est analytique de $\operatorname{Im} z > 0$ dans $C_0^n(\mathbb{R})$, et par suite dans $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$ ou $C_{\mathcal{K}}^n(\mathbb{R})$. Par suite, $\log \rho_s(z)$ est une fonction surharmonique positive dans $\operatorname{Im} z > s$.

D'après les lemmes 7 et 8, on a $\rho_s(z)\,|p(z)| \leq 1$ dès que $\pi(p) \leq 1$. Par suite, $|p(z)| \leq e^{-\log \rho_s(z)}$ dès que $\pi(p) \leq 1$, et ceci dans $\operatorname{Im} z > s$. D'après le lemme 9, il existe une fonction harmonique ψ positive, telle que $|p(z)| \leq e^{\psi(z)}$ dans $\operatorname{Im} z > -s$, pour tout p vérifiant $\pi(p) \leq 1$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{\pi(p)\leq 1} \frac{\log|p(x)|}{1 + x^2}\, dx \leq \int \frac{\psi(x)}{1 + x^2}\, dx \leq \pi\psi(i) < \infty \quad .$$

Donc, si $\int_{\mathbb{R}} \sup_{\pi(p)\leq 1} \frac{\log|p(x)|}{1 + x^2}\, dx = \infty$, alors $\rho_s(z) = 0$ dans $\operatorname{Im} z > s$, i. e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{C}[x]$ et $f_i \in B$ avec

$$(x - z)^{-1} - p(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f_i(x - z_i)^{-1}, \qquad \operatorname{Im} z_i > s, \quad \sum |\lambda_i| \leq 1 .$$

Donc $\pi_1[(x - z)^{-1} - p(x)] \leq \varepsilon$, d'après le lemme 6.

La condition (3) est <u>nécessaire</u>, car sinon on aurait

$$\log|p(i)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|p(x)|}{1 + x^2} dx \leq M < \infty \quad \text{dès que} \quad \pi(p) \leq 1 ,$$

ce qui contredit le théorème 4.

PROPOSITION 10. - <u>Supposons que la topologie définie par</u> π <u>soit plus fine que la topologie de la convergence compacte ; alors</u>

$$\sup_{\substack{\pi(p) \leq 1 \\ p \in \mathbb{C}[x]}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log|p(x)|}{1 + x^2} dx = + \infty$$

<u>est nécessaire pour que</u> π <u>soit fondamentale</u>.

La démonstration est la même que dans [1].

COROLLAIRE 11. - <u>Si la topologie définie par</u> π <u>est plus fine que celle de la convergence compacte, et si le système</u> $\mathcal{H}$ (<u>resp.</u> $\mathcal{K}$) <u>est fondamental, il en est de même du système</u> $((1 + |x|)^r h_i)_{i \leq n}$ (<u>resp.</u> $((1 + |x|)^r k_i)_{i \leq n}$), <u>où</u> r <u>est un entier quelconque</u>.

<u>Démonstration</u>. - $\mathcal{H}$ étant fondamental, d'après la proposition 10,

$$\sup_{\pi(p) \leq 1} \int \frac{\log|p(x)|}{1 + x^2} dx = + \infty , \qquad \text{donc} \qquad \int \sup_{\pi(p) \leq 1} \frac{\log|p(x)|}{1 + x^2} dx = + \infty .$$

Le théorème 5 permet d'en déduire que $\mathcal{H}_1$ est fondamental, etc.

<u>Remarque</u>. - Considérons l'espace $C_p^n(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^n sur $\mathbb{R}$ à croissance polynomiale, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre n. On se donne $(n + 1)$ poids $(h_0, \ldots, h_n) = \mathcal{H}$, mais on ne suppose plus $h_0 \geq h_1 \geq \ldots \geq h_n$, et on se pose le problème de la densité, dans cet espace, de $\mathbb{C}[x]$ pour la norme $\|f\| = \sup_{i \leq n} \sup_x h_i(x) |f^{(i)}(x)|$. On va supposer que les fonctions (h_i) ne s'annulent pas, et que, pour $1 \leq i \leq n$, h_i est une fonction paire décroissante dans $\mathbb{R}^+$. Sous ces hypothèses, on peut montrer que le système $\mathcal{H}$ est fondamental, si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(\alpha) \quad \sup_{\substack{\|p\|\leq 1 \\ p\in\mathbb{C}[x]}} |p(z)| = +\infty \; ;$$

$$(\beta) \quad \int \sup_{\|p\|\leq 1} \frac{\log|p(x)|}{1+x^2}\, dx = +\infty \; .$$

La démonstration consiste à montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que " $\mathcal{H}$ fondamental" équivaut à dire que le système

$$\left(\sup_{0\leq i\leq n} \frac{h_i(x)}{(1+|x|)^i}\, ,\ \sup_{1\leq i\leq n} \frac{h_i(x)}{(1+|x|)^i}\, ,\ \ldots\, ,\ h_n(x)\right)$$

est fondamental. Puis à utiliser les théorèmes 4 et 5, et le corollaire 11.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FERRIER (J.-P.). - Ensembles spectraux et approximation polynomiale pondérée, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 6e année, 1966/67, n° 14, 36 p.

[2] FERRIER (J.-P.). - Approximation de fonctions analytiques avec croissance, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/70, n° 1, 7 p.

[3] FERRIER (J.-P.). - Approximation polynomiale dans une bande ou dans un angle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 183-184.

[4] MERGELJAN (S. N.). - Weighted approximation by polynomials, Amer. math. Soc., Translations, Series 2, t. 10, 1958, p. 59-106 ; [en Russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 11, 1956, p. 107-152.

[5] MERGELJAN (S. N.). - Uniform approximations to functions of a complex variable, Series and approximation, p. 294-391. - Providence, American mathematical Society, 1962 (Amer. math. Soc., Translations, Series 1, Vol. 3).

[6] NACHBIN (L.). - Résultats récents et problèmes de nature algébrique en théorie de l'approximation, Proceedings of the international congress of mathematicians [1962. Stockholm], p. 379-384. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[7] REID (G. A.). - A theorem of Stone-Weierstrass type, Camb. phil. Soc., t. 62, 1966, p. 649-666.

[8] SIBONY (N.). - Problème de Bernstein pour les fonctions continument différentiables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 1683-1685.

(Texte reçu le 23 septembre 1970)

Nessim SIBONY
20 rue de la Glacière
75 - PARIS 13