Jean-Pierre Bourguignon

Calcul différentiel généralisé

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 2 (1969-1970), exp. nº 11, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
9e année, 1969/70, n° 11, 18 p.

26 février 1970

CALCUL DIFFÉRENTIEL GÉNÉRALISÉ

par Jean-Pierre BOURGUIGNON

Introduction

Dans ce paragraphe, nous rappellerons quelques propriétés du calcul différentiel dans les espaces normés, pour dégager quelles sont celles qu'il est raisonnable de conserver dans une extension à des familles plus générales d'espaces vectoriels.

Soient E_1 , E_2 , deux espaces normés, $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E_1 dans E_2 .

On procède en deux temps en posant les définitions suivantes :

- $f : E_1 \longmapsto E_2$ est <u>plate</u> en 0 , si

$$\begin{cases} f(0) = 0 \ , \\ \lim\limits_{y \mapsto 0} \dfrac{\|f(y)\|}{\|y\|} = 0 \ ; \end{cases}$$

- $f : E_1 \longmapsto E_2$ est <u>différentiable</u> en $a \in E_1$, s'il existe une application linéaire continue $L_a : E_1 \longmapsto E_2$, telle que l'application de E_1 dans E_2 : $h \longmapsto f(a + h) - f(h) - L_a(h)$ soit plate en 0 .

On a, de plus, la notion suivante, si on a choisi une topologie sur $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$:

- $f : E_1 \longmapsto E_2$ est <u>continûment différentiable</u> en $a \in E_1$, si f est différentiable dans un voisinage U de a , et si l'application $b \longmapsto L_b$ de U dans $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$, associée à f , est continue en a .

Dans le cadre des espaces normés, on peut donner une notion supplémentaire, puisque $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$ est un espace normé :

- $f : E_1 \longmapsto E_2$ est <u>deux fois différentiable</u> en $a \in E_1$, si f est différentiable dans un voisinage U de a , et si l'application : $b \longmapsto L_b$ de U dans $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$, associée à f , est différentiable en a .

Dans la catégorie des espaces normés $\mathcal{E}_1$, à tout couple d'espaces vectoriels (E_1 , E_2) , nous associons un sous-espace de l'espace vectoriel des applications continues de E_1 dans E_2 , $\mathcal{C}_0(E_1 , E_2)$, contenant $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$, soit $\mathcal{C}_1(E_1 , E_2)$, espace vectoriel des applications continûment différentiables, et une application D :

$$\mathcal{C}_1(E_1 , E_2) \longmapsto \mathcal{C}_0(E_1 , \mathcal{L}_0(E_1 , E_2)) ,$$

$f \longmapsto (Df : E_1 \longmapsto \mathcal{L}_0(E_1 , E_2))$ telle que, sur $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$, on ait

$$Df(x) : E_1 \longmapsto \mathcal{L}_0(E_1 , E_2) ,$$

$$y \longmapsto f(y - x) .$$

Pour généraliser ces notions, les deux remarques suivantes vont nous guider.

1° Si deux normes sur E sont équivalentes, les notions correspondantes d'application différentiable et de différentielle coïncident : on peut penser déduire la notion de différentielle de la topologie seule (on peut être tenté de définir la théorie dans la catégorie des e. v. t.).

2° Il faut dépasser le stade de la différentielle première pour avoir une théorie intéressante (cas de variétés modelées sur de tels espaces) [6]. Or, si nous avons défini un calcul différentiel sur une catégorie $\mathcal{E}$ d'espaces vectoriels, une chose essentielle, pour pouvoir aller au-delà de la différentielle première, est que, pour $E_1 , E_2 \in \mathcal{E}$, $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2) \in \mathcal{E}$, et même que l'application

$$\mathcal{L}(E_1 , E_2) \times \mathcal{L}(E_2 , E_3) \longmapsto \mathcal{L}(E_1 , E_3) , \qquad \text{pour } E_1 , E_2 , E_3 \in \mathcal{E} ,$$

$$(f , g) \longmapsto g \circ f ,$$

soit différentiable.

Or si E_1 et E_2 sont des e. v. t., $\mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$ n'est pas muni d'une topologie séparée intéressante.

La dernière remarque conduit donc à sortir de la catégorie des e. v. t. pour une catégorie plus grande (que l'on restreindra ensuite) où les difficultés soulevées pourront être résolues.

L'exposé présente une généralisation de la notion de différentielle choisie parmi beaucoup d'autres. Il est en cela particulier, mais j'ai préféré montrer comment on pouvait mettre en oeuvre une technique, plutôt que rendre compte de toutes les pistes que l'on est en train d'explorer [1]. Il suit de près l'exposé de FRÖLICHER-BUCHER [5].

La notion centrale est celle de structure de limites. La définition d'application différentiable coïncide, dans le cas des espaces normés, avec la définition de FRÉCHET, à la différence de ce qui a lieu dans des théories antérieures (Mlle BASTIANI [2], E. BINZ).

Une autre tendance qu'un groupe d'auditeurs m'a indiquée, et qui me paraît intéressante, consiste à donner une place centrale aux structures bornologiques. Elle sera probablement développée dans d'autres exposés : elle a l'avantage de déboucher sur des théorèmes de fonctions implicites qui font défaut à la théorie utilisant uniquement des structures de limites [3].

I. Structure de limites [4].

1. Filtres.

S est un ensemble fixe, dans tout le § 1, $\mathfrak{P}(S)$ désigne l'ensemble des parties de S.

Ce paragraphe est destiné à fixer les notations.

Nous noterons $\mathfrak{F}(S)$ l'ensemble des filtres sur S. Nous considérerons un filtre $\mathfrak{F}$ sur S surtout comme une classe d'équivalence de bases de filtre.

Soit A une partie de S ; $\dot{A}$ désigne le filtre des sur-ensembles de A.

Rappelons que :

- Pour $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}' \in \mathfrak{F}(S)$, $\mathfrak{F} \succcurlyeq \mathfrak{F}'$ signifie $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}'$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S))$;
- Soit $(\mathfrak{F}_i)_{i\in I}$ une famille de filtres ; la réunion de la famille $(\mathfrak{F}_i)_{i\in I}$ (famille de parties formée des intersections finies d'ensembles de $\mathfrak{F}_i$), notée $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, est un filtre si, et seulement si, $\sup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ existe, et alors

$$\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i = \sup_{i\in I} \mathfrak{F}_i \ ;$$

- L'intersection de la famille $(\mathfrak{F}_i)_{i\in I}$ au sens de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S))$, notée $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, est un filtre tel que

$$\inf_{i\in I} \mathfrak{F}_i = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i \ .$$

DÉFINITION 1. - Soit $I \in \mathfrak{P}(\mathfrak{F}(S))$. I est dit un idéal de filtres si :

(IF1) I est stable par intersection finie ;

(IF2) Tout filtre, plus fin qu'un filtre de I, est dans I.

Nous noterons $Sp(S)$ l'ensemble des idéaux de filtres sur S.

Dans toute la suite, un idéal désignera un idéal de filtres.

<u>Exemple</u>. - L'ensemble des filtres plus fins qu'un filtre donné est un idéal. Un tel idéal est dit <u>principal</u>.

PROPOSITION 1. - <u>Pour qu'un idéal soit principal, il faut et il suffit qu'il soit stable par intersection quelconque</u>.

Nous noterons $\operatorname{Spp}(S)$ l'ensemble des idéaux principaux sur S .

L'ensemble des idéaux de filtres est ordonné par l'inclusion de $\mathfrak{P}(\mathfrak{F}(S))$; nous noterons, pour I , $I' \in \operatorname{Sp}(S)$,

$$(I < I') \iff (I \subset I') \ .$$

2. Espaces de limites.

A. Définitions.

DÉFINITION 2. - <u>Soit</u> S <u>un ensemble. Une application</u> $\lambda : S \longmapsto \operatorname{Sp}(S)$, <u>telle que</u>

$$\forall\, x \in X\ , \qquad \dot{x} \in \lambda(x)\ ,$$

<u>est dite une</u> structure de limites <u>sur</u> S . <u>Nous dirons que</u> (S , λ) <u>est un</u> espace de limites.

Les filtres, appartenant à l'idéal $\lambda(x)$, sont dits <u>convergeant vers</u> x .

DÉFINITION 3. - <u>Soient</u> λ <u>et</u> μ <u>deux structures de limites sur</u> S . <u>Nous dirons que</u> λ <u>est</u> plus fine <u>que</u> μ , <u>et nous noterons</u> $\lambda \leqslant \mu$, <u>si</u>

$$\forall\, x \in S\ , \qquad \lambda(x) < \mu(x)\ .$$

B. <u>Lien avec les topologies</u>. - Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur S . Il est canoniquement associé à $\mathcal{T}$ une structure de limites $\Lambda(\mathcal{T})$. Posons en effet, pour $x \in S$,

$$\Lambda(\mathcal{T})(x) = \{\mathfrak{F} \mid \ \mathfrak{F} \geqslant \mathcal{V}(x)\}\ ,$$

où $\mathcal{V}(x)$ désigne le filtre des voisinages de x .

Remarquons que, $\forall\, x \in S$, $\Lambda(\mathcal{T})(x) \in \operatorname{Spp}(S)$.

On voit déjà, par cette remarque, que les topologies sont des cas particuliers des structures de limites.

Nous noterons $\mathfrak{L}(S)$ l'ensemble des structures de limites sur S , $\mathfrak{L}_1(S)$ l'ensemble des structures de limites sur S à valeurs dans $\operatorname{Spp}(S)$, $\mathfrak{L}_0(S)$ l'ensemble des structures de limites provenant d'une topologie (et nécessairement d'une seule). Il est clair que

$$\mathfrak{L}_0(S) \subset \mathfrak{L}_1(S) \subset \mathfrak{L}(S) \quad .$$

Il est clair aussi que l'ordre sur les topologies induit l'ordre sur les structures de limites (avec un symbole opposé de celui utilisé pour les topologies).

Nous identifierons dorénavant $\mathfrak{L}_0(S)$ à l'ensemble des structures topologiques sur S .

Nous allons construire, pour toute structure de limites λ , la topologie la plus fine des topologies moins fines que λ .

Pour cela, posons quelques définitions.

DÉFINITION 4. - Soit (S , λ) un espace de limites. $A \subset S$ est dit ouvert, si

$$\forall x \in A , \quad \forall \mathfrak{F} \in \lambda(x) , \qquad A \in \mathfrak{F} \quad .$$

Remarque. - Si λ est une topologie, la notion d'ouvert coïncide évidemment avec la notion classique.

Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble de tous les ouverts de (S , λ) .

PROPOSITION 2. - $\mathfrak{D}$ satisfait aux axiomes des ouverts d'un espace topologique.

Stabilité par réunion quelconque. - Soient Ω une partie de $\mathfrak{D}$, ω la réunion des A de Ω . Montrons que $\omega \in \mathfrak{D}$.

Soit $x \in \omega$. Il existe $A \in \Omega$ tel que $x \in A$. Comme A est ouvert, pour tout $\mathfrak{F}$ de $\lambda(x)$, $A \in \mathfrak{F}$.

ω étant un sur-ensemble de A , et $\mathfrak{F}$ étant un filtre, $\omega \in \mathfrak{F}$. ω est donc ouvert.

En particulier, $\emptyset \in \mathfrak{F}$.

Stabilité par intersection finie. - Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Nous pouvons supposer que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, sinon nous avons fini.

Soit $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, alors, pour tout i de I , pour tout $\mathfrak{F}$ de $\lambda(x)$, $A_i \in \mathfrak{F}$.

Comme $\mathfrak{F}$ est un filtre,

$$\bigcap_{i\in I} A_i \in \lambda(x) \quad .$$

Par suite, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathfrak{D}$. Notamment, $E \in \mathfrak{D}$.

Nous noterons $\mathrm{Top}(\lambda)$ la topologie définie par la famille d'ouverts $\mathcal{D}$.

Il est clair que, pour toute structure de limites λ , $\mathrm{Top}\ \lambda \geqslant \lambda$, l'égalité signifiant que λ est une topologie.

En effet, pour $x \in S$ et $\mathfrak{F} \in \lambda(x)$, par définition d'un ouvert A contenant x , il appartient à tous les filtres de $\lambda(x)$. Donc $\mathfrak{F} \geqslant \mathcal{V}(x)$, si $\mathcal{V}(x)$ désigne le filtre des voisinages de x dans $\mathrm{Top}(\lambda)$.

PROPOSITION 3. - $\mathrm{Top}(\lambda)$ <u>est la topologie la plus fine des topologies moins fines que</u> λ .

Nous savons déjà que $\mathrm{Top}(\lambda) \geqslant \lambda$. Il suffit de montrer que, si τ est une topologie moins fine que λ , alors $\mathrm{Top}(\lambda) \leqslant \tau$.

Pour cela, soit A un ouvert de $\tau \geqslant \lambda$. Supposons que A n'est pas un ouvert de $\mathrm{Top}(\lambda)$. Donc

$$\exists\, x \in A\ ,\quad \exists\, \mathfrak{F} \in \lambda(x)\ ,\qquad A \notin \mathfrak{F}\ .$$

Comme $\tau \geqslant \lambda$,

$$\forall\, x \in S\ ,\qquad \tau(x) \geqslant \lambda(x)\ .$$

Cela implique

$$\exists\, x \in A\ ,\quad \exists\, \mathfrak{F} \in \tau(x)\ ,\qquad A \notin \mathfrak{F}\ .$$

Il y a contradiction. A n'est pas ouvert dans τ .

Nous avons défini une application Top de $\mathfrak{L}(S)$ dans $\mathfrak{L}_0(S)$, qui respecte les ordres respectifs de $\mathfrak{L}(S)$ et de $\mathfrak{L}_0(S)$.

Remarquons cependant que $\mathfrak{L}_1(S)$ est plus grand que $\mathfrak{L}_0(S)$, car "une structure topologique varie peu au voisinage d'un point".

De façon précise, sur un ensemble fini S , $\mathfrak{L}_1(S) = \mathfrak{L}(S)$ (car l'intersection finie et l'intersection quelconque des familles de parties sont des notions identiques). Si nous mettons, sur un ensemble à trois éléments, $\{a , b , c\}$, la structure de limites suivante :

$$\lambda(a) = I(\{\dot{a}\ ;\ b\})\ ,$$

$$\lambda(b) = I(\{\dot{b}\ ;\ c\})\ ,$$

$$\lambda(c) = I(\{\dot{a}\ ;\ c\})\ ,$$

les seuls ouverts sont $\emptyset$ et $\{a , b , c\}$. Par suite, λ n'est pas une topologie.

C. <u>Applications continues</u>. - Soient S_1 et S_2 deux ensembles, f une application de S_1 dans S_2 . f admet clairement une extension $\tilde{f}$ à $\mathfrak{F}(S_1)$ qui applique $\mathfrak{F}(S_1)$ dans $\mathfrak{F}(S_2)$.

Nous allons établir un lemme technique qui, par un corollaire, <u>servira constamment dans la deuxième partie</u>.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(S)$.

$$d : S \longmapsto S \times S \ ,$$
$$x \longmapsto (x \ , x) \ .$$

<u>Alors</u> $\tilde{d}(\mathfrak{F}) \geqslant \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$.

Soit $A \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$. Donc $\exists X_1 \in \mathfrak{F}$, $\exists X_2 \in \mathfrak{F}$, $X_1 \times X_2 \subset A$.

Posons $X = X_1 \cap X_2$. Alors $X \times X \subset A$. Comme $d(X) \subset X \times X$, $d(X) \subset A$. Par suite,

$$A \in \tilde{d}(\mathfrak{F}) \ .$$

Il s'agit bien d'une inégalité, comme le montre le contre-exemple élémentaire suivant :

Soit $\mathfrak{F}$ le filtre de Fréchet sur $\underset{\sim}{N}$.

$d(\mathfrak{F})$ = {Sur-ensembles des complémentaires des parties finies de la diagonale de $\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$} ,

$\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ = {Sur-ensembles des complémentaires d'une réunion finie de "carrés" de $\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$} .

Il est clair que $d(\mathfrak{F}) > \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$.

COROLLAIRE 1. - <u>Soient</u>

$$h_i : S \longmapsto T_i \qquad (i = 1 \ , 2) \ ,$$
$$g : T_1 \times T_2 \longmapsto R \ .$$

<u>Notons</u> f <u>la composée de</u> S <u>dans</u> R . <u>Alors</u>

$$\forall \ \mathfrak{F} \in \mathcal{F}(M) \ , \qquad f(\mathfrak{F}) \geqslant g(h_1(\mathfrak{F}) \ , h_2(\mathfrak{F})) \ .$$

D'après la propriété universelle du produit,

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, mapsto, "d"] \arrow[dr, mapsto, "h_1 \times h_2"'] & S \times S \arrow[d, mapsto, "(h_1,h_2)"] \\
 & T_1 \times T_2 \arrow[d, mapsto, "g"] \\
 & R
\end{tikzcd}$$

$d(\mathfrak{F}) \geqslant \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$, d'après le lemme ,

$(h_1 \ , h_2) \circ d(\mathfrak{F}) \geqslant h_1(\mathfrak{F}) \times h_2(\mathfrak{F})$,

$f(\mathfrak{F}) \geqslant g(h_1(\mathfrak{F}) \ , h_2(\mathfrak{F}))$.

DÉFINITION 5. - Soient (S_1 , λ_1) et (S_2 , λ_2) deux espaces de limites, f une application de S_1 dans S_2.

f est continue en $x \in S_1$, si l'image d'un filtre convergeant en x, par $\tilde{f}$, est un filtre convergeant en $f(x)$.

f est continue, si elle est continue, pour tout x de S_1.

PROPOSITION 4. - Soient (S , λ), (T , μ), (R , ν) trois espaces de limites, f une application continue de (S , λ) dans (T , μ), g une application continue de (T , μ) dans (R , ν). Alors $g \circ f$ est continue.

La proposition est évidente.

D. Produit de structures de limites. - Soient $(S_i , \lambda_i)_{i\in I}$ des espaces de limites, et $(f_i)_{i\in I}$ des applications d'un ensemble T dans S_i.

Il existe sur T une structure de limites qui est initiale relativement à cette famille d'applications. Soit $x \in T$,

$$(\mathfrak{F} \in \lambda(x)) \iff (\forall\, i \in I , \ f_i(\mathfrak{F}) \in \lambda_i(f_i(x))) \ .$$

DÉFINITION 6. - Soient $(S_i , \lambda_i)_{i\in I}$ des espaces de limites. Il existe sur $\prod_{i\in I} S_i$ une structure de limites, dite structure produit, la moins fine telle que les projections sont continues.

On définit, sur $\prod_{i\in I} S_i$, la structure de limites initiale relativement aux projections.

3. Espaces vectoriels limités.

A. Définition. - $\mathbb{R}$ est toujours muni de sa topologie canonique. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 7. - Nous dirons qu'une structure de limites λ sur E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, est compatible sur E, si les applications :

$$E \times E \longmapsto E \ ,$$

$$(x , y) \longmapsto x + y \ ,$$

$$\mathbb{R} \times E \longmapsto E \ ,$$

$$(a , x) \longmapsto ax \ ,$$

sont continues. (E , λ) est dit un espace vectoriel limité (e. v. l.).

Notation : $\underset{\sim}{V}$ désignera le filtre des voisinages de 0 dans $\underset{\sim}{R}$ muni de sa topologie canonique.

B. Rôle des translations. - Nous nous plaçons dorénavant dans un e. v. l. E.

COROLLAIRE 2. - Les translations sont des homéomorphismes.

Par suite, nous nous ramènerons systématiquement en 0 : nous noterons $\mathfrak{F}{\downarrow}E$, pour indiquer $\mathfrak{F} \in \lambda(0)$; ceci nous permettra de sous-entendre λ dans la suite.

C. Lien avec les espaces vectoriels topologiques.

PROPOSITION 5. - Dans un e. v. l. (E , λ), si $\lambda \in \mathfrak{L}_1(E)$, alors $\mathcal{V} = \bigcap_{\mathfrak{F}\in\lambda(0)} \mathfrak{F}$ est le filtre des voisinages d'une topologie sur E.

Donc, si E est un e. v. l., $\mathfrak{L}_1(E) = \mathfrak{L}_0(E)$.

D'après le corollaire, $\mathcal{V}(x) = \bigcap_{\mathfrak{F}\in\lambda(x)} \mathfrak{F}$ converge vers x. Par suite, pour que $\mathfrak{F}$ converge en x, il faut et il suffit que $\mathfrak{F} \geqslant \mathcal{V}(x)$.

Soit $U \in \mathcal{V}(x)$. Par suite, il existe $V \in \mathcal{V}(0)$, tel que $U = x + V$.

L'addition étant continue, $\mathcal{V}(0) + \mathcal{V}(0) \geqslant \mathcal{V}(0)$. Donc il existe

$$V' \in \mathcal{V}(0) , \qquad \text{avec } V' + V' \subset V .$$

D'où, si nous posons $U' = x + V'$,

$$U' \in \mathcal{V}(x) .$$

Pour tout $y \in U'$,

$$y + V' \subset U' + V' = x + V' + V' \subset x + V = U .$$

Nous avons donc montré que, pour chaque $U \in \mathcal{V}(x)$, il existe $U' \in \mathcal{V}(x)$, tel que

$$(y \in U') \Longrightarrow (U \in \mathcal{V}(y)) .$$

Cela implique que les $\mathcal{V}(x)$ sont les filtres des voisinages de x, pour tout x de E, pour une topologie.

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans la catégorie des e. v. l. Une lettre majuscule E, avec ou sans indice, désignera un e. v. l.

II. Différentielle première.

1. Définition de la différentielle.

A. Restes. - À $f : E_1 \mapsto E_2$, nous associons $\Theta f : \underset{\sim}{R} \times E_1 \mapsto E_2$ par

$$\Theta f(\lambda , x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} r(\lambda x) , & \text{si } \lambda \neq 0 , \\ 0 , & \text{si } \lambda = 0 . \end{cases}$$

DÉFINITION 8. - Soit $r : E_1 \mapsto E_2$. On dit que r est un reste, si :

- $r(0) = 0$;
- Pour tout filtre $\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}(E_1)$, tel que $\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F} \downarrow E_1$, $\Theta r(\underset{\sim}{V} , \mathfrak{F}) \downarrow E_2$.

Nous noterons $\mathcal{R}(E_1 , E_2)$ l'ensemble des restes de E_1 dans E_2.

PROPOSITION 6. - $\mathcal{R}(E_1 , E_2)$ est un espace vectoriel.

La proposition résulte immédiatement des lemmes suivants.

LEMME 2.

$$\left.\begin{array}{r} r \in \mathcal{R}(E_1 , E_2) \\ \ell \in \mathcal{L}_0(E_2 , E_3) \end{array}\right\} \Longrightarrow (\ell \circ r \in \mathcal{R}(E_1 , E_3)) .$$

LEMME 3.

$$\left.\begin{array}{r} r_{12} \in \mathcal{R}(E_1 , E_2) \\ \ell \in \mathcal{L}_0(E_1 , E_2) \\ r_{23} \in \mathcal{R}(E_2 , E_3) \end{array}\right\} \Longrightarrow (r_{23} \circ (\ell + r_{12}) \in \mathcal{R}(E_1 , E_3)) .$$

Ces deux lemmes sont évidents.

B. Différentielle.

DÉFINITION 9. - Soient $f : E_1 \mapsto E_2$, $a \in E_1$. f est différentiable en a, s'il existe $\ell \in \mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$, telle que $h \mapsto f(a + h) - f(a) - \ell(h)$ soit un reste.

ℓ est une différentielle de f en a.

Pour le moment, nous n'avons fait aucune hypothèse sur E_1 , E_2 .

Exemples :

- Une application constante est différentiable en tout point ;
- Une application linéaire continue est différentiable en tout point.

Mais nous n'avons pas, a priori, unicité de la différentielle ; pour cela, il nous faut une notion supplémentaire.

C. Cas de la séparation.

DÉFINITION 10. - Soit (E , λ) un e. v. l. E est séparé si, $\forall x , y \in E$, $\lambda(x) \cap \lambda(y) = \emptyset$.

Remarque. - Si E est topologique, la séparation au sens espace de limites, est clairement équivalente à celle au sens espace topologique.

PROPOSITION 7. - Soient E_1 , E_2 deux e. v. l. Si E_2 est séparé, le seul reste linéaire de E_1 dans E_2 est le reste nul.

Soit $x \in E_1$: $\underset{\sim}{V}.\dot{x}\downarrow E_1$ (continuité de la multiplication scalaire).

Soit $r \in \mathcal{R}(E_1 , E_2) \cap \mathcal{L}_0(E_1 , E_2)$. r étant linéaire,

$$\Theta r(\lambda , x) = r(x) , \qquad \forall \lambda \in \underline{R} , \ \forall x \in E_1 .$$

$$\Theta r(\underset{\sim}{V} , \dot{x}) = r(\dot{x}) = \dot{r(x)} .$$

Par suite, $\dot{r(x)}\downarrow E_2$. Donc, si E_2 est séparé, $r(x) = 0$.

COROLLAIRE 3. - Soient $a \in E_1$, E_2 séparé, $f : E_1 \longmapsto E_2$ différentiable en a . f a une seule différentielle en a , que nous noterons $Df(a)$.

Il y a aussi unicité du reste.

Dans toute la suite, tous les e. v. l. considérés seront séparés.

D. Composition.

PROPOSITION 8. - Soient $f : E_1 \longmapsto E_2$, $g : E_2 \longmapsto E_3$, $a \in E_1$. Si f est différentiable en a , g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a , et

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a) .$$

2. Lien avec les applications continues.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons entre E_1 et E_2 qu'une notion d'application continue : celle déduite de leur structure de limites. Nous allons en introduire d'autres, car cette seule notion ne suffit pas pour établir des propriétés intéressantes.

Pour cela, commençons par de nouvelles notions sur les filtres.

DÉFINITION 11. - Soient E un e. v. l., et $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(E)$. $\mathfrak{F}$ est quasi-borné, si $\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F}\downarrow E$.

Remarque. - Ce sont justement ces filtres qui sont intervenus dans la définition d'un reste.

PROPOSITION 9. - Dans un espace normé, pour qu'un filtre soit quasi-borné, il faut et il suffit qu'il contienne un ensemble borné.

DÉFINITION 12. - Soient E un e. v. l., et $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(E)$. $\mathfrak{F}$ est égalisé, si $\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Nous allons mettre une nouvelle structure de limites λ^* sur E : nous noterons E^* , E muni de cette structure.

Posons

$$\lambda^*(0) = \{\mathfrak{F} \mid \exists\ \mathfrak{G}\downarrow E\ ,\ \mathfrak{G}\ \text{égalisé}\ :\ \mathfrak{F} \geqslant \mathfrak{G}\}\ .$$

On vérifie que E^* est un e. v. l. E^* sera dit l'égalisé de E . Il est clair que $\lambda^* \leqslant \lambda$.

On dira qu'un espace de limites est égalisé, si $E^* = E$.

Remarque. - Si E est un e. v. t., E est égalisé, car le filtre des voisinages de 0 est un filtre égalisé.

PROPOSITION 10. - Soient $f : E_1 \longmapsto E_2$, et $a \in E_1$. Si f est différentiable en a , alors $f : E_1^* \longmapsto E_2^*$ est continue en a .

Par hypothèse, il existe une application linéaire continue $Df(a)$ de E_1 dans E_2 , telle que

$$h \longmapsto r(h) = f(a + h) - f(h) - Df(a)(h)$$

soit un reste.

Si nous prouvons que $r : E_1^* \longmapsto E_2^*$ est continue en 0, la proposition sera démontrée.

LEMME 4. - <u>Soit</u> $r \in \mathcal{R}(E_1, E_2)$. $r : E_1^* \longmapsto E_2^*$ <u>est continue en</u> 0.

Soit $\mathfrak{F} \downarrow E_1^*$. Donc il existe $\mathcal{G}$ égalisé, $\mathcal{G} \downarrow E_1$, tel que $\mathfrak{F} \geqslant \mathcal{G}$. $\forall \lambda \in \underset{\sim}{R}$, $\forall x \in E_1$,

$$r(\lambda, x) = \lambda \circledcirc r(\lambda, x) .$$

Par suite,

$$r(\mathfrak{F}) \geqslant r(\mathcal{G}) = r(\underset{\sim}{V}.\mathcal{G}) \geqslant \underset{\sim}{V}.\circledcirc r(\underset{\sim}{V}, \mathcal{G}) ,$$

par le lemme fondamental.

Le filtre $\mathcal{H} = \underset{\sim}{V}.\circledcirc r(\underset{\sim}{V}, \mathcal{G})$ est égalisé, et converge dans E_2. Par suite, $r(\mathfrak{F}) \downarrow E_2^*$.

<u>Remarque</u>. - Pour des espaces vectoriels égalisés comme les e. v. t., le théorème s'énonce comme suit.

THÉORÈME 1.

$$f : E_1 \longmapsto E_2 \qquad (E_1, E_2 \text{ \underline{égalisés}}) .$$

$$(f \text{ \underline{différentiable en} } a) \Longrightarrow (f \text{ \underline{continue en} } a) .$$

3. Cas classiques.

A. Espaces normés.

PROPOSITION 11. - <u>Si E_1 et E_2 sont normés, la notion de différentiabilité que nous venons de définir, coïncide avec la notion au sens de Fréchet.</u>

Soit $r : E_1 \longmapsto E_2$. Posons, pour $x \in E_1$,

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|} \|r(x)\| , & \text{si } x \neq 0 , \\ 0 , & \text{si } x = 0 . \end{cases}$$

Il suffit de montrer que r est un reste de E_1 dans E_2 si, et seulement si, $q(x)$ est continue en 0.

Supposons que q soit continue en 0. Soit $\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}(E_1)$ tel que $\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F} \downarrow E_1$. $q(\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F}) \downarrow \underset{\sim}{R}$. Donc $q(\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F}) \geqslant \underset{\sim}{V}$.

Comme, $\forall\ \lambda \in \underset{\sim}{R}$, $\forall\ x \in E_1$,

$$\|\Theta r(\lambda\ ,\ x)\| = \|x\|\ q(\lambda x)\quad ,$$

par le lemme fondamental,

$$\|\Theta r(\underset{\sim}{V}\ ,\ \mathfrak{F})\| \geqslant \|\mathfrak{F}\|\ q(\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F}) = \|q(\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F})\mathfrak{F}\| \geqslant \|\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F}\|\quad .$$

Comme $\underset{\sim}{V}\mathfrak{F}\downarrow E_1$, et que $x \longmapsto \|x\|$ est continue, $\|\underset{\sim}{V}\mathfrak{F}\|\downarrow\underset{\sim}{R}$, et, par suite, $\|\Theta r(\underset{\sim}{V}\ ,\ \mathfrak{F})\|\downarrow\underset{\sim}{R}$, ce qui est suffisant pour que $\Theta r(\underset{\sim}{V}\ ,\ \mathfrak{F})\downarrow E_2$. Donc $r \in \mathcal{R}(E_1\ ,\ E_2)$.

Supposons maintenant que $r \in \mathcal{R}(E_1\ ,\ E_2)$. Soit $\mathfrak{F}\downarrow E_1$. Montrons que $q(\mathfrak{F})\downarrow\underset{\sim}{R}$.

Posons, pour $x \in E_1$,

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|}\ , & \text{si}\quad x \neq 0\quad , \\ 0\ , & \text{si}\quad x = 0\quad . \end{cases}$$

Comme $\forall\ x \in E_1$, $\|s(x)\| \leqslant 1$, $s(\mathfrak{F})$ contient un ensemble borné, donc est un filtre quasi-borné, d'après la proposition 2.

Comme $\|\mathfrak{F}\| \geqslant \underset{\sim}{V}$ et que, $\forall\ x \in E_1$, $q(x) = \|\Theta r(\|x\|\ ,\ s(x))\|$,

$$q(\mathfrak{F}) \geqslant \|\Theta r(\|\mathfrak{F}\|\ ,\ s(\mathfrak{F}))\| \geqslant \|\Theta r(\underset{\sim}{V}\ ,\ s(\mathfrak{F}))\|\downarrow\underset{\sim}{R}\quad .$$

PROPOSITION 12.

(a) <u>Si</u> $f\ :\ \underset{\sim}{R} \longmapsto E$ <u>est différentiable au point</u> $\alpha \in \underset{\sim}{R}$, <u>alors le quotient</u> $\underline{\dfrac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}}$ <u>a une limite, notée</u> $f'(\alpha)$, <u>lorsque</u> h <u>tend vers</u> 0 . <u>De plus</u>, $f'(\alpha) = Df(\alpha)(1)$.

(b) <u>Si</u> E <u>est égalisé, la réciproque est vraie.</u>

(a) Si f est différentiable en $\alpha \in \underset{\sim}{R}$,

$$h \longmapsto r(h) = f(\alpha + h) - f(\alpha) - Df(\alpha)(h)$$

est un reste de $\underset{\sim}{R}$ dans E .

Notons $a = Df(\alpha)(1)$. Posons, pour $h \in \underset{\sim}{R}$,

$$q(h) = \begin{cases} \dfrac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}\ , & \text{si}\quad h \neq 0\quad , \\ a\ , & \text{si}\quad h = 0\quad . \end{cases}$$

Par suite,

$$\Theta r(\lambda\ ,\ x) = \frac{f(\alpha + \lambda h) - f(\alpha)}{\lambda} - h.a\quad ,$$

$$\Theta r(\lambda\ ,\ 1) = q(\lambda) - a\quad .$$

Comme $\underset{\sim}{V}.\dot{1}\downarrow\underset{\sim}{R}$, $\Theta r(\underset{\sim}{V}\ ,\ \dot{1})\downarrow E$. Par suite, $q(\underset{\sim}{V}) - a\downarrow E$, c'est-à-dire

$$\lim_{h\mapsto 0} q(h) = a \quad .$$

(b) Supposons que $q(\underset{\sim}{V}) - a\downarrow E$. Posons $\ell(h) = h.a$, pour $h \in \underset{\sim}{R}$, $\ell \in \mathcal{L}_0(\underset{\sim}{R}\ ,\ E)$.

$$r(h) = f(\alpha + h) - f(\alpha) - \ell(h) \quad .$$

Il suffit de prouver que $r \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{R}\ ,\ E)$.

$$\Theta r(\lambda\ ,\ h) = h(q(\lambda h) - a) \quad .$$

Soit $\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}(\underset{\sim}{R})$. Si $\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F}\downarrow\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F} \geqslant \underset{\sim}{V}$. D'après le lemme fondamental,

$$\Theta r(\underset{\sim}{V}\ ,\ \mathfrak{F}) \geqslant \mathfrak{F}(q(\underset{\sim}{V}\mathfrak{F} - a)) \geqslant \mathfrak{F}(q(\underset{\sim}{V}) - a) \quad .$$

Si E est égalisé, il existe $\mathfrak{S}\downarrow E$ égalisé, tel que

$$q(\underset{\sim}{V}) - a \geqslant \underset{\sim}{V}.\mathfrak{S} = \mathfrak{S} \quad .$$

Par suite, $\Theta r(\underset{\sim}{V}\ ,\ \mathfrak{F}) \geqslant \underset{\sim}{V}.\mathfrak{F}.\mathfrak{S} \geqslant \underset{\sim}{V}\mathfrak{S}\downarrow E$.

4. Le théorème fondamental.

Avant d'énoncer le théorème fondamental, il nous faut associer à tout e. v. l. E un e. v. t. l. c. E^0 de la façon suivante : nous savons associer à tout e. v. l. $(E\ ,\ \lambda)$ un espace topologique $(E\ ,\ \mathrm{Top}\ \lambda)$. Parmi les topologies compatibles moins fines que λ , il y en a qui sont localement convexes. E^0 sera la plus fine des topologies localement convexes compatibles moins fines que $\mathrm{Top}\ \lambda$.

Nous allons construire E^0 explicitement.

Soit $\mathcal{V}_\lambda$ le filtre des voisinages de 0 de $\mathrm{Top}(\lambda)$.

Nous noterons $\mathcal{V}^0$ le filtre engendré par les ensembles convexes de $\mathcal{V}_\lambda$, et λ^0 la structure de limites qui s'en déduit.

Soient τ une topologie compatible localement convexe, telle que $\tau \geqslant \lambda$, et $\mathcal{T}$ le filtre des voisinages de 0 de τ .

Soit $A \in \mathcal{T}$: il existe un ouvert convexe de τ , soit C tel que $C \subset A$. Comme $\lambda \leqslant \tau$, C est un ouvert convexe de $\mathrm{Top}(\lambda)$. Donc $A \in \mathcal{V}^0$, $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{V}^0$ et, par suite, λ^0 est plus fine que τ .

Il suffit de vérifier que λ^0 est compatible.

Nous noterons E^0 , E muni de la structure de limites λ^0 .

Nous admettrons le théorème fondamental suivant, qui se démontre de façon analogue au théorème des accroissements finis.

THÉORÈME 2. - Soient $[\alpha , \beta] \subset \underset{\sim}{R}$, et E un e. v. l. Soient

$$f : [\alpha , \beta] \longmapsto E ,$$

$$\varphi : [\alpha , \beta] \longmapsto \underset{\sim}{R} ,$$

B convexe fermé de E^0 .

Supposons que :

1° f et φ sont différentiables ;

2° E^0 est séparé ;

3° $\forall\, t \in [\alpha , \beta]$, $f'(t) \in \varphi'(t).B$;

4° φ est croissante.

Alors $f(\beta) - f(\alpha) \in (\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))B$.

Il est clair que, si E est normé, et si nous prenons pour B la boule unité de E , nous retrouvons le théorème des accroissements finis. En fait, il prouve plus : "si la dérivée de f est grande, la distance parcourue l'est aussi", en prenant B ne contenant pas 0 .

5. Structures de limites sur certains espaces fonctionnels.

A. Applications quasi-bornées. - Soit $\mathcal{B}(E_1 , E_2)$ les applications de E_1 dans E_2 , qui envoient les filtres quasi-bornés dans les filtres quasi-bornés : elles seront dites quasi-bornées. $\mathcal{B}(E_1 , E_2)$ est un espace vectoriel.

Nous allons mettre, sur $\mathcal{B}(E_1 , E_2)$, une structure de limites. Soient $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{B}(E_1 , E_2))$, et $\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}(E_1)$.

$$(F \downarrow \mathcal{B}(E_1 , E_2)) \iff ((\underset{\sim}{V}.\mathfrak{F} \downarrow E_1) \implies (F(\mathfrak{F}) \downarrow E_2)) .$$

Autrement dit, un filtre F converge dans $\mathcal{B}(E_1 , E_2)$ si, et seulement si, l'image d'un filtre quasi-borné par F est un filtre convergent.

Il faut vérifier que la structure de limites est compatible.

PROPOSITION 13. - Si E_1 est un espace normé, et E_2 est un espace topologique, la structure de limites de $\mathcal{B}(E_1 , E_2)$ est la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés.

Notons $\mathcal{B}^*(E_1, E_2)$ l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés.

$$(F\downarrow\mathcal{B}^*(E_1, E_2)) \iff (\forall\ B \text{ borné de } E_1,\ F(B)\downarrow E_2)\ .$$

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre quasi-borné de E_1. Comme E_1 est normé, il existe B borné, $B \in \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F} \geqslant \dot{B}$.

$$F(\mathfrak{F}) \geqslant F(\dot{B}) \geqslant F(B)\downarrow E_2\ .$$

Donc $F(\mathfrak{F})\downarrow E_2$.

Réciproquement, soit B une partie bornée de E_1.

$$(F\downarrow\mathcal{B}(E_1, E_2)) \iff (\forall\ \mathfrak{F} \in \mathfrak{F}(E_1) \text{ quasi-borné},\ F(\mathfrak{F})\downarrow E_2)\ .$$

Par exemple, $F(\dot{B})\downarrow E_2$. Comme E_2 est topologique, $F(\dot{B}) \geqslant \mathcal{V}$. Par suite, soit $U \in \mathcal{V}$, $U \in F(B)$.

$\exists\ f \in F$, $c \in \dot{B}$ tels que $f(c) = U$. Par suite,

$$f(B) \subset U \qquad \text{et} \qquad U \in F(B)\ .$$

PROPOSITION 14. - <u>Si</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>sont des espaces normés, alors la structure de limites induite par</u> $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ <u>sur</u> $\mathcal{L}_0(E_1, E_2)$ <u>est la topologie de la norme.</u>

On utilise la proposition précédente, en remarquant que la norme sur $\mathcal{L}_0(E_1, E_2)$ induit la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés.

B. <u>Continuité de la composition.</u>

PROPOSITION 15. - <u>L'application</u> c <u>de</u> $\mathcal{B}(E_1, E_2) \times \mathcal{L}_0(E_2, E_3)$ <u>dans</u> $\mathcal{B}(E_1, E_3)$, <u>qui à</u> (f, ℓ) <u>associe</u> $\ell \circ f$, <u>est continue.</u>

Soient $F\underset{g}{\downarrow}\mathcal{B}(E_1, E_2)$ et $L\underset{k}{\downarrow}\mathcal{L}_0(E_2, E_3)$. c est bilinéaire. Pour $f, g \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ et $\ell, k \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$,

$$\ell \circ f - k \circ g = (\ell - k) \circ (f - g) + k \circ (f - g) + (\ell - k) \circ g\ ,$$

$$c(F, L) - c(g, k) \geqslant (L - k) \circ (F - g) + k \circ (F - g) + (L - k) \circ g\ .$$

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre quasi-borné dans E_1. D'après le lemme fondamental,

$$(c(F, L) - c(g, k))(\mathfrak{F}) \geqslant (L - k) \circ (F - g)(\mathfrak{F}) + k \circ (F - g)(\mathfrak{F}) + (L - k) \circ g(\mathfrak{F})\ .$$

Les trois termes du second membre convergent dans E_3. Par suite,

$$c(F, L) \underset{c(g,k)}{\downarrow} \mathcal{B}(E_1, E_3)\ .$$

<u>Remarque finale</u>. - Pour FRÖHLICHER-BUCHER, la bonne classe d'espaces vectoriels est celle des espaces admissibles pour lesquels :

- E^0 est séparé ;
- Si $\mathfrak{F}\downarrow E$, alors $\overline{\mathfrak{F}} = \{M \mid M = \overline{A}$ avec $A \in \mathfrak{F}\}$, $\overline{\mathfrak{F}}\downarrow E$;
- Si $\mathfrak{F}\downarrow E$, alors $\mathfrak{F}^0\downarrow E$.

Ces espaces contiennent les e. v. t. l. c. s.

Leur intérêt est d'être stables par les constructions du calcul différentiel :

$$(E_1 , E_2 \text{ admissibles}) \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} \mathcal{B}(E_1 , E_2) \\ \\ \mathcal{L}_0(E_1 , E_2) \end{matrix} \quad \text{admissibles}\right\} .$$

C'est dans le cadre des espaces admissibles que la dérivation d'ordre supérieur peut se définir avec toutes les propriétés voulues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AVERBUKH (V. I.) and SMOLYANOV (O. G.). - The various definitions of the derivative in linear topological spaces, Russian math. Surveys, t. 23, 1968, p. 67-113.

[2] BASTIANI (Andrée). - Applications différentiables et variétés de dimension infinie, J. Anal. math., Jérusalem, t. 13, 1964, p. 1-114.

[3] COLOMBEAU (J. F.). - Calcul différentiel dans les espaces bornologiques, Publ. n° 2 (1969-70), Séminaire d'Analyse fonctionnelle, Université de Bordeaux, 1969/70 (Publication multigraphiée n° 2).

[4] FISCHER (H. R.). - Limesräume, Math. Annalen, t. 137, 1959, p. 269-303.

[5] FRÖLICHER (A.) and BUCHER (W.). - Calculus in vector spaces without norm. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 30).

[6] LESLIE (J. A.). - On a differential structure for the group of diffeomorphisms, Topology, t. 6, 1967, p. 263-271.

(Texte reçu le 23 avril 1970)

Jean-Pierre BOURGUIGNON
La Méprise, Escalier C
Les BUISSONS
91 - BOUSSY-SAINT-ANTOINE