SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

MICHÈLE DEHEN
YVES DERMENJIAN
JEAN SAINT-RAYMOND

Rabotages sur un treillis

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 2 (1969-1970), exp. nº 22, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A12_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 22, 24 p.
28 mai 1970

RABOTAGES SUR UN TREILLIS

par Michèle DEHEN, Yves DERMENJIAN, et Jean SAINT-RAYMOND

Les notions de capacités et de capacitabilité sur un espace topologique furent définies et étudiées, en 1959, par G. CHOQUET. Il effectua une étude des ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et des $\mathcal{K}$-sousliniens, obtenus par l'opération $\mathfrak{A}$ de Souslin, et démontra le théorème de capacitabilité abstraite pour ces ensembles $\mathcal{K}$-sousliniens.

Ensuite, Maurice SION définit les capacitances, en 1963, et obtint un théorème analogue pour les noyaux de systèmes déterminants construits sur une classe de parties d'un ensemble.

Dans son étude des probabilités, P.-A. MEYER a énuméré les conjectures suivantes sur les processus de Markov :

1° Un ensemble presque-borélien, rencontré presque sûrement (p. s.) par les trajectoires suivant un ensemble dénombrable, est semi-polaire.

2° Un ensemble presque-borélien, tel que tout compact inclus soit semi-polaire, est semi-polaire.

Pour les démontrer, C. DELLACHERIE, en 1967, utilisa des outils précédemment employés par W. SIERPINSKI pour le théorème de Hausdorf-Alexandrov ; et il les étudia sous le nom de rabotages.

Les trois auteurs du présent travail placent cette étude dans le cadre d'un treillis ordonné, plus général que le treillis des parties d'un ensemble, et étudient systématiquement les opérations de rabotage. Ils généralisent ainsi les théorèmes déjà connus, et en obtiennent de nouveaux (théorème 24). Cette étude les conduit à définir une classe d'ensembles en apparence plus générale que la classe des $\mathcal{K}$-analytiques, et à en étudier quelques propriétés.

Résumons ici quelques applications de cette théorie :

1° Tout $\mathcal{K}$-analytique d'un compact est capacitable.

2° Le théorème de Hausdorf-Alexandrov, à savoir que tout borélien non dénombrable d'un compact métrisable contient un compact non dénombrable.

3° Soient $(L , \mathfrak{L})$ un espace souslinien, muni de sa tribu borélienne, et $(X , \mathfrak{F} , \mu)$ un espace probabilisé complet. Si A est mesurable dans $(L \times X , \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{F})$, la projection $\pi(A)$ sur X appartient à $\mathfrak{F}$.

4° Définition de classes de sous-ensembles d'un ensemble X ayant des propriétés analogues à celles des $\mathcal{K}$-analytiques ; on les étudie au chapitre IV, et on y pose aussi des problèmes.

5° Extension de certaines propriétés de la classe des $\mathcal{K}$-analytiques à des surclasses de celle-ci.

6° En utilisant une généralisation des axiomes de N. PINTACUDA, les auteurs étudient des prolongements de certaines fonctions numériques définies en théorie de l'information.

I. Théorèmes de Sierpinski

Les définitions et les résultats des chapitres I, II, III et V, ont été exposés par W. SIERPINSKI et C. DELLACHERIE, dans le cas où $T = \mathbb{N}$ et où Ω constitue le treillis des parties d'un ensemble.

La démonstration du théorème 24, sur l'opération de Souslin, constitue un apport personnel des rédacteurs.

Soient Ω un treillis, T un ensemble filtrant croissant, et E une partie de Ω, appelée pavage, vérifiant le système de conditions $[(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta_1)]$ ou le système $[(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta_2)]$:

(α) Il existe une bijection de $T \times T$ sur T, notée $\star$, croissante par rapport à la deuxième variable (la première étant fixe) ;

(β) T a un premier élément, noté 1 ;

(γ) Toute famille d'éléments de Ω, indexée par T, admet une borne inférieure, notée $\wedge$.

(δ_1) Toute application $g : [1, t] \to T$, où $t \in T$, est telle que $g([1, t])$ est majorée dans T, et la borne inférieure de toute famille d'éléments de E, indexée par un intervalle $[1, t]$, où $t \in T$, appartient au pavage E ;

(δ_2) Le pavage E est cofinal à Ω dans Ω pour $\leq$, et la borne inférieure de toute famille d'éléments de E, indexée par T, appartient au pavage E.

Le triplet (Ω, E, T) est appelé treillis pavé.

Exemple 1. - On pose $T = \mathbb{N}$, où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. La bijection $\star$ peut être, par exemple, la suivante :
$(p, q) \to p \star q = (2p - 1)2^{q-1}$.

Les conditions (α) et (β) sont vérifiées. La condition (δ_1) signifie que le pavage est stable par borne inférieure d'une famille finie. On prendra souvent, pour Ω, l'ensemble des parties d'un ensemble X, l'ordre étant défini par l'inclusion.

Exemple 2. – Pour T, on prend l'ensemble bien ordonné $\underset{\sim}{N} + \underset{\sim}{N}$, mais où $\underset{\sim}{N}$ commence par 0 (il suffira d'une translation pour commencer par 1) :

$$0 , 1 , 2 , \ldots , n , \ldots , \omega , \omega + 1 , \omega + 2 , \ldots .$$

Les conditions (α) et (β) sont réalisées, en effet, si $\perp$ désigne la bijection définie dans l'exemple 1 avec $\underset{\sim}{N} = \{0 , 1 , \ldots , n , \ldots\}$; on pose

$$p \star q = 2(p \perp q) \qquad (\omega + p) \star q = 2(p \perp q) + 1$$

$$p \star (\omega + q) = \omega + 2(p \perp q) \qquad (\omega + p) \star (\omega + q) = \omega + 2(p \perp q) + 1 .$$

Exemple 3. – Soient X un ensemble infini, et h une bijection de $X \times \{0 , 1\}$ sur X. On prend pour T, l'ensemble des parties finies de X ordonné par l'inclusion. T est un treillis, et vérifie (β) $(1 = \emptyset)$. D'autre part, si $t \in T$, toute application $g : [1 , t] \to T$ est telle que $g([1 , t])$ est majorée dans T. Soient F_0 et F_1 deux parties finies de X, on pose

$$F_0 \star F_1 = h(F_0 \times \{0\} \cup F_1 \times \{1\}) ,$$

et on vérifie facilement la condition (α).

La condition (δ_1) signifie alors que le pavage E est stable par borne inférieure d'une famille finie.

Exemple 4. – Soient :

K un convexe compact dans un espace localement convexe séparé ;

$\Omega = \{\text{convexes de } K\}$ ordonné par l'inclusion ;

$T = \underset{\sim}{N}$;

$E = \{\text{convexes compacts de } K\}$.

Alors sup des $a_n = \bigvee_n a_n =$ enveloppe convexe des a_n, et inf des $a_n = \bigwedge_n a_n = \bigcap_n a_n$.
On remarquera que, si la suite (a_n) est croissante, $\bigvee_n a_n = \bigcup_n a_n$, et

$$b \wedge \left(\bigvee_n a_n\right) = b \cap \left(\bigcup_n a_n\right) = \bigcup_n (b \cap a_n) = \bigvee_n (b \wedge a_n) .$$

D'autre part, si la suite (a_n) est décroissante, et si b et a_n sont des éléments du pavage E, alors

$$b \vee \left(\bigwedge_n a_n\right) = \bigwedge_n (b \vee a_n) .$$

Considérons, en effet, l'application continue

$\rho : K \times K \times [0 , 1] \to K$, définie par $\rho(\alpha , \beta , \theta) = \theta\alpha + (1 - \theta)\beta$.

On obtient $\rho(b \vee a_n) = \rho(b \times a_n \times [0 , 1])$, donc

$$\bigwedge_n (b \vee a_n) = \bigcap_n \rho(b \times a_n \times [0\ ,\ 1)) = \rho(b \times (\bigcap a_n) \times [0\ ,\ 1)) = b \vee (\bigcap a_n)\ ,$$

et

$$\bigwedge_n (b \vee a_n) = b \vee (\bigwedge_n a_n)\ .$$

Définition 5. - (a_t) est une T-suite d'un ensemble X , si c'est une application de T dans X .

Définition 6. - La T-suite (a_t) est plus fine que la T-suite (b_t) (où a_t et b_t sont des éléments de Ω), si, pour tout r de T , il existe s de T tel que $a_s \leqslant b_r$. On peut dire aussi que $\{a_t\}_{t\in T}$ est une partie cofinale de $\{a_t\ ,\ b_s\}_{s\in T, t\in T}$ pour $\geqslant$.

Définition 7 : Enveloppes. - Soit (a_t) une T-suite décroissante de Ω . On dira que l'élément a de Ω est une enveloppe de (a_t) , ou que $a \in H[(a_t)]$, si, et seulement si, il existe une T-suite décroissante (b_t) moins fine que (a_t) , telle que :

1° Pour chaque t , b_t appartient au pavage E ;
2° $a \geqslant \bigwedge_t b_t$ (le inf existe, d'après (γ)).

Exemple 8. - Soit X un espace topologique. On pose :

$\Omega = \mathcal{P}(X)$,
$T = \underline{N}$,
$E = \{$fermés de $X\}$.

Alors a sera une enveloppe de la suite décroissante (a_n) , si, et seulement si, $a \supset \bigcap_n \overline{a}_n$.

PROPOSITION 9. - Soit $(\Omega\ ,\ E\ ,\ T)$ un treillis pavé.

1° Si a est une enveloppe de (a_t) , et si $b \geqslant a$, alors b est une enveloppe de (a_t) .
2° Si (a_t) est plus fine que (b_t) , alors $H[(a_t)] \supset H[(b_t)]$.
3° Si b_s est une enveloppe de (a_t) , pour chaque $s \in T$, alors $\bigwedge_s b_s$ est une enveloppe de (a_t) .

Démonstration.

Le 1° est évident.

Pour le 2°, soit $c \in H[(b_t)]$, par conséquent il existe une T-suite (c_t)

moins fine que (b_t) , telle que $(c_t) \subset E$ et $c \geq \bigwedge_t c_t$, or (c_t) est moins fine que (a_t) , donc $c \in H[(a_t)]$.

Enfin 3°, comme b_s est une enveloppe de (a_t) , il existe une T-suite (b_t^s) extraite du pavage E , vérifiant les conditions 1° et 2° de la définition 7, et de plus (b_t^s) est moins fine que (a_t) :

- Si (δ_1) est vérifiée, on pose

$$c_t = \bigwedge_{s \leq t} b_t^s \ .$$

Alors $c_t \in E$, et $\bigwedge_t c_t \leq b_s$ pour tout $s \in T$, car $\bigwedge_t c_t \leq \bigwedge_t b_t^s \leq b_s$. De plus, la T-suite (c_t) est décroissante. Montrons que la T-suite (c_t) est moins fine que (a_t) . Soit $t \in T$, il existe r_s tel que $a_{r_s} \leq b_t^s$, donc, d'après (δ_1), il existe $t_0 \in T$ tel que l'ensemble $\{r_s \mid s \leq t\}$ soit majoré par t_0 , donc $a_{t_0} \leq b_t^s$ pour $s \leq t$, et $a_{t_0} \leq c_t$.

- Si (δ_2) est vérifiée, on pose, pour s fixé,

$$c_t^s = \begin{cases} b_t^s \ , & \text{si } b_t^s \geq a_t \ , \\ (\text{un élément de } E \text{ qui est supérieur à } a_t) \wedge \{b_r^s \mid b_r^s \geq a_t\} \ , & \end{cases}$$

sinon, si $\{b_r^s \mid b_r^s \geq a_t\} = \emptyset$, et si b_t^s n'est pas supérieur à a_t , on posera c_t^s égal à un élément de E qui est supérieur à a_t . On vérifie immédiatement que $c_t^s \in E$ et que $c_t^s \geq a_t$.

On pose maintenant $d_t^s = \bigwedge_{r \leq t} c_r^s$, et de nouveau $d_t^s \in E$ et $d_t^s \geq a_t$. Il est clair que la T-suite (d_t^s) est décroissante. On pose alors $e_t = \bigwedge_{s \leq t} d_t^s$. La T-suite (e_t) est décroissante et, pour tout $t \in T$, $e_t \in E$. D'autre part, $\bigwedge_t e_t \leq \bigwedge_t d_t^s \leq \bigwedge_t b_t^s \leq b_s$ pour tout $s \in T$, donc $\bigwedge_t e_t \leq \bigwedge_s b_s$, et la T-suite (e_t) est moins fine que (a_t) , puisque, pour tout $t \in T$, $e_t \geq a_t$.

<u>Définition</u> 10 : <u>Famille semi-extérieure</u>. - Une partie C de Ω est une famille <u>semi-extérieure</u>, si la condition suivante (S) est vérifiée :

(S) Soit (b_t) une T-suite croissante de Ω admettant une borne supérieure $\bigvee_t b_t$, et soit a un élément de Ω . Si $a \wedge (\bigvee_t b_t) \in C$, il existe un élément $t_0 \in T$ tel que $a \wedge b_{t_0} \in C$.

Exemple 11. - Dans l'exemple 8, C peut être l'ensemble des parties non dénombrables de X .

Définition 12 : Rabotage global. - On appelle rabotage global, une application F de $\sum_{t\in T} \Omega^{[1,t]} \times \mathcal{C}^{[1,t]}$ dans Ω , où $\mathcal{C}$ désigne la classe des familles semi-extérieures de Ω , et vérifiant les conditions suivantes :

1° $F[(a_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}] \leq a_t$, pour tout $t \in T$;
2° $F[(a_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}] \in C_t$, si $a_t \in C_t$.

Exemple 13 (important). - Le rabotage global identique : $F[(a_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}] = a_t$.

Définition 14 : T-suite F-rabotée. - Il s'agit d'une T-suite $((a_t , C_t))$, où a_t est un élément de Ω , et C_t une famille semi-extérieure de Ω , et d'un rabotage global F , vérifiant :

1° $a_r \leq F[(a_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}]$, lorsque $r > t$;
2° $a_t \in C_t$, pour chaque $t \in T$.

Définition 15. - Soit F un rabotage global. On dit que F est compatible avec l'élément a de Ω , si, pour toute T-suite F-rabotée $((a_t , C_t))$, telle que $a_1 \leq a$, a est une enveloppe de la T-suite (a_t) .

On dit que l'élément a de Ω est poli, s'il existe un rabotage global compatible avec lui.

On remarque que tout élément du pavage E est poli.

THÉORÈME 16. - *Soit (a_t) une T-suite croissante d'éléments polis. Si $a = \bigvee_t a_t$ existe, alors a est poli.*

Démonstration. - Pour chaque $t \in T$, soit F_t un rabotage global compatible avec a_t . Le problème est de définir un rabotage global F . On pose

$$F[(b_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}] = \begin{cases} b_t , & \text{si } b_1 \wedge a \notin C_1 , \\ F_{t_0}[(c_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}] , & \text{si } b_1 \wedge a \in C_1 , \end{cases}$$

avec $c_s = b_s$ si $s > 1$, et $c_1 = b_1 \wedge a_{t_0}$, t_0 étant choisi pour que $b_1 \wedge a_{t_0} \in C_1$ (on utilise l'axiome du choix).

F est bien un rabotage global. Montrons que F est compatible avec a . Soit $((b_t , C_t))$ une T-suite F-rabotée, telle que $b_1 \leq a$, alors

$$F[(b_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}] = F_{t_0}[(c_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}] .$$

On voit que la T-suite $((c_s , C_s))$ est F_{t_0}-rabotée, et que c_1 est inclus dans a_{t_0} , donc a_{t_0} est une enveloppe de (c_s) , et par suite a est une enveloppe de la T-suite (c_s) , donc de la T-suite (b_s) , puisque cette dernière est plus fine que (c_s) . L'élément a est donc poli.

THÉORÈME 17. - Soit (a_t) une T-suite d'éléments polis. Alors $a = \bigwedge_t a_t$ est poli.

Démonstration. - Pour chaque $t \in T$, soit F_t un rabotage global compatible avec a_t . Nous allons définir un rabotage global F . Nous posons, si $t = p \star q$,

$$F[(b_s)_{s\leq t} ; (C_s)_{s\leq t}] = F_p[(b_{p\star k})_{k\leq q} ; (C_{p\star k})_{k\leq q}] .$$

On vérifie immédiatement que F est un rabotage global. Soit $((b_t , C_t))$ une T-suite F-rabotée, telle que $b_1 \leq a$. On a $b_1 \leq a_t$ pour tout $t \in T$. Pour montrer que a est une enveloppe de (b_t) , il suffit de montrer que a_p est une enveloppe de (b_t) pour tout $p \in T$. L'indice p étant choisi, posons $c_r = b_{p\star r}$ et $C^p_r = C_{p\star r}$. Comme $p \star 1 \geq 1$, on a

$$c_1 = b_{p\star 1} \leq b_1 \leq a \qquad \text{et} \qquad c_r = b_{p\star r} \in C_{p\star r} = C^p_r .$$

D'autre part, si $\ell > r$,

$$c_\ell = b_{p\star \ell} \leq F[(b_s)_{s\leq p\star r} ; (C_s)_{s\leq p\star r}] = F_p[(b_{p\star k})_{k\leq r} ; (C_{p\star k})_{k\leq r}] ,$$

ce qui s'écrit aussi

$$c_\ell \leq F_p[(c_k)_{k\leq r} ; (C^p_k)_{k\leq r}] .$$

Ainsi la T-suite $((c_t , C^p_t))$ est F_p-rabotée, et comme a_p est poli, a_p est une enveloppe de la T-suite (c_t) , donc de (b_t) . Il en résulte que l'élément a est poli.

Notations 18.

1° Nous dirons que l'hypothèse (A) est vérifiée, si

$$a \wedge (\bigvee_t b_t) = \bigvee_t (a \wedge b_t) ,$$

pour toute T-suite croissante de Ω admettant une borne supérieure, et tout a de Ω .

2° Nous dirons que l'<u>hypothèse</u> (B) est vérifiée, si

$$a \vee (\bigwedge_t b_t) = \bigwedge_t (a \vee b_t) \quad ,$$

pour toute T-suite décroissante (b_t) de E , et tout a du stabilisé de E , pour les inf de T-suites décroissantes.

3° Nous dirons que l'<u>hypothèse</u> (C) est vérifiée, ou que Ω est T-complet, si toute T-suite de Ω admet une borne supérieure.

Si $T = \underset{\sim}{N}$, on dira que Ω est semi-complet, et l'on remplacera, dans la suite, la notation $(\Omega , E , \underset{\sim}{N})$ par (Ω , E) .

<u>Remarques</u> 19.

1° Si l'on suppose que Ω vérifie (A), la notion de famille semi-extérieure se transforme en celle de famille extérieure :

Soient Ω un treillis vérifiant (A), et (a_t) une T-suite croissante d'éléments de Ω admettant une borne supérieure. Une partie C d'éléments de Ω est une <u>famille extérieure</u>, lorsque $\bigvee_t a_t \in C$ entraîne qu'il existe $t_0 \in T$ tel que $a_{t_0} \in C$.

2° On peut remplacer la notion de famille semi-extérieure par celle de capacitance :

Soient Ω un treillis vérifiant (A), et (a_t) une T-suite croissante d'éléments de Ω admettant une borne supérieure. Une partie C de Ω est une <u>capacitance</u>, lorsque :

(i) $\bigvee_t a_t \in C$ entraîne qu'il existe $t_0 \in T$ tel que $a_{t_0} \in C$;

(ii) $(b \geqslant a$ et $a \in C)$ entraîne $(b \in C)$.

3° Si, dans les définitions, on remplace la classe $\mathcal{C}$ des familles semi-extérieures par la classe des capacitances, les démonstrations des théorèmes 16 et 17 peuvent être conservées, et on obtient des théorèmes analogues avec cette nouvelle notion de rabotages :

On appelle C-<u>rabotage</u> (où C est une famille semi-extérieure de Ω), une application f de $\sum_{t \in T} \Omega^{(1,t)}$ dans Ω , vérifiant :

(i) $f[(a_s)_{s<t}] \leqslant a_t$;

(ii) $f[(a_s)_{s<t}] \in C$, si $a_t \in C$.

Une T-suite (a_t) est dite f-rabotée, si :

(α) $a_r \lesssim f[(a_s)_{s \lesssim t}]$, lorsque $r > t$;
(β) $a_t \in C$, pour tout $t \in T$.

On dira que f est compatible avec a , élément de Ω , si toute T-suite (a_t) f-rabotée, dont le premier terme a_1 soit inférieur à a , admet a pour enveloppe.

a sera dit C-<u>lisse</u>, s'il existe un C-rabotage f compatible avec lui.

THÉORÈME 16'. - <u>Soit</u> (a_t) <u>une</u> T-<u>suite croissante d'éléments</u> C-<u>lisses. Si</u> $a = \bigvee_t a_t$ <u>existe, alors</u> a <u>est</u> C-<u>lisse</u>.

THÉORÈME 17'. - <u>Soit</u> (a_t) <u>une</u> T-<u>suite d'éléments</u> C-<u>lisses. Alors</u> $a = \bigwedge_t a_t$ <u>est</u> C-<u>lisse</u>.

Les remarques 19, 1° et 2°, restent encore valables pour les éléments C-lisses, si C est une famille extérieure ou une capacitance.

Attention : Le sup de deux éléments C-lisses n'est pas forcément C-lisse.

COROLLAIRE 20. - <u>Le stabilisé de</u> E , <u>par</u> sup <u>croissant et</u> inf <u>de</u> T-<u>suites du pavage</u> E , <u>est constitué d'éléments polis</u>.

COROLLAIRE 21. - <u>Si</u> Ω <u>vérifie</u> (A), (B), (C), <u>si</u> E <u>est stable par</u> sup <u>fini</u>, <u>et si</u> $T = \underset{\sim}{N}$, <u>le stabilisé du pavage</u> E , <u>par bornes supérieure et inférieure dénombrables de suites de</u> E , <u>est constitué d'éléments polis</u>.

Pour la démonstration, il faut utiliser le théorème 31 et le 1er exemple 30.

COROLLAIRE 22. - <u>Tout</u> K-<u>analytique relativement compact est capacitable</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit A un K-analytique d'un espace B compact. On a $A = g(H)$, où H est un $K_{\sigma\delta}$ de $\bar{\underset{\sim}{N}}^{N} \times B$ ($\bar{\underset{\sim}{N}} = \underset{\sim}{N} \cup \{\infty\}$) , et g l'application projection du produit sur B . On pose

$$\Omega = \mathcal{P}(\bar{\underset{\sim}{N}}^{N} \times B) , \qquad T = \underset{\sim}{N} , \qquad E = \{\text{compacts de } \bar{\underset{\sim}{N}}^{N} \times B\} ,$$

et on construit la capacité suivante Γ sur $\bar{\underset{\sim}{N}}^{N} \times B$ à partir de la capacité γ sur B : $\Gamma(x) = \gamma[g(x)]$. Alors on se donne un nombre $\varepsilon > 0$, et on pose

$$C_\varepsilon = \{x \in \bar{\underset{\sim}{N}}^{N} \times B \mid \Gamma(x) > \gamma(A) - \varepsilon\} .$$

On vérifie que C_ε est une capacitance, et que $H \in C_\varepsilon$. Comme h est poli (voir corollaire 21), il est C_ε-lisse, et il existe un rabotage f compatible avec h . On pose

$$x_1 = h \ , \quad x_2 = f(x_1) \ , \quad \ldots \ , \quad x_{n+1} = f(x_1 \ , \ldots \ , x_n) \ , \quad \ldots \ .$$

La suite obtenue est f-rabotée, et H est une enveloppe de (x_n) , donc $H \supset \cap \bar{x}_n$ et

$$\Gamma(H) \geqslant \Gamma(\cap \bar{x}_n) = \inf \Gamma(\bar{x}_n) \geqslant \gamma(A) - \varepsilon \ .$$

Si on pose $K = p(\cap \bar{x}_n)$, on a $\gamma(A) \geqslant \gamma(K) \geqslant \gamma(A) - \varepsilon$, or K est compact, et $K \subset A$, donc A est capacitable pour γ .

COROLLAIRE 23. - Soient $(L , \mathcal{L})$ un espace souslinien muni de sa tribu borélienne, et $(X , \mathfrak{F} , \mu)$ un espace probabilisé complet. Si a est mesurable dans $(L \times X , \mathcal{L} \otimes \mathfrak{F})$, la projection $\pi(a)$ de a sur X appartient à $\mathfrak{F}$ ($\mathcal{L} \otimes \mathfrak{F}$ désigne la tribu produit de $\mathcal{L}$ et de $\mathfrak{F}$).

Démonstration. - Nous allons nous ramener au cas où L est compact. Il existe un compact métrisable K , un G_δ , P de K , et une surjection continue f de P sur L . Soit $\mathcal{K}$ la tribu de Borel de K . On a

$$a_1 = (f \times \mathrm{id})^{-1} (a) \subset P \times X \subset K \times X \qquad \text{et} \qquad \pi \times (a_1) = \pi \times (a) \ .$$

Posons $\mathcal{S} = \{x \subset L \times X \mid (f \times \mathrm{id})^{-1} (x) \in \mathcal{K} \otimes \mathfrak{F}\}$. $\mathcal{S}$ est une tribu qui contient les éléments $s \times t$ où $s \in \mathcal{L}$ et $t \in \mathfrak{F}$, donc $\mathcal{L} \otimes \mathfrak{F} \subset \mathcal{S}$, et $a_1 \in \mathcal{K} \otimes \mathfrak{F}$.

On pose maintenant $\Omega = \mathcal{P}(K \times X)$, l'ordre étant défini par l'inclusion, $T = \underset{\sim}{N}$, et on prend pour pavage E , l'ensemble des réunions finies d'éléments de Ω de la forme $h \times t$, avec h compact et $t \in \mathfrak{F}$. On a immédiatement que $\mathcal{K} \otimes \mathfrak{F}$ est le $\sigma\delta$-stabilisé de E . On se donne la capacitance suivante :

$$C = \{y \in \Omega \mid \mu^*[\pi \times (y)] > \mu^*[\pi \times (a_1)] - \varepsilon\} \ ,$$

où ε est un nombre fixe strictement positif. On voit que a_1 est poli, d'après le corollaire 21, donc il est C-lisse, et est une enveloppe de la suite

$$x_1 = a_1 \ , \quad \ldots \ , \quad x_{n+1} = f(x_1 \ , \ldots \ , x_n) \ , \quad \ldots \ ,$$

où f est un rabotage compatible avec a_1 . Ainsi, il existe une suite décroissante (e_n) , avec $e_n \in C \cap E$, et $a_1 \supset \cap e_n$. Comme $\pi \times (\cap e_n) = \cap \pi \times (e_n)$, on obtient que

$$\mu_*[\pi \times (a_1)] \geqslant \mu[\pi \times (\cap e_n)] = \inf \mu[\pi \times (e_n)] \geqslant \mu^*[\pi \times (a_1)] - \varepsilon \ .$$

Comme $\mathfrak{F}$ est une tribu complète, $\pi \times (a_1) = \pi \times (a)$ appartient à $\mathfrak{F}$.

Dans la fin de ce paragraphe, on notera :

$\Sigma = \{\sigma\} = \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$, où $\underset{\sim}{N} = \{1 , 2 , \ldots , n , \ldots\}$;

$S = \{s\}$ = l'ensemble des suites finies d'entiers ;

$s' \leqslant s$ (resp. $s' < \sigma$) signifie que s' est une section commençante de s (resp. de σ), et $r \trianglelefteq s$ que r et s ont même longueur $(\ell(r) = \ell(s))$ et que chaque terme de r est inférieur ou égal au terme de même rang de s .

THÉORÈME 24. - <u>Soit</u> (Ω , E) <u>un treillis pavé stable par borne supérieure, de puissance</u> $\aleph_1$. <u>Si</u> a <u>est le noyau d'un système déterminant,</u>

$$a = \bigvee_{\sigma\in\Sigma} \left(\bigwedge_{s\leqslant\sigma} a_s\right) ,$$

<u>où les</u> a_s <u>sont polis, et vérifient</u> : $r \trianglelefteq s \implies a_r \leqslant a_s$, <u>alors</u> a <u>est un élément poli</u>.

<u>Démonstration</u>. - On note

$$a_\sigma = \bigwedge_{s\leqslant\sigma} a_s , \qquad d_s = \bigvee_{s\leqslant\sigma} a_\sigma , \qquad d_{n_1,n_2,\dots,n_p} = \bigvee_{\sigma\trianglerighteq n_1,n_2,\dots,n_p} a_\sigma .$$

Pour tout s , on désigne par F_s un rabotage global compatible avec a_s . On considère une bijection $\star$ de $\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}$, croissante par rapport à chaque variable. On voit que $a = \bigvee_{n\in\underset{\sim}{N}} d_n$, et que cette suite est croissante. Il faut définir un rabotage global F , donc

$$F[x_1 , \dots , x_n ; C_1 , \dots , C_n] , \qquad \text{avec } n = p' \star q' .$$

- Si $x_1 \wedge a \in C_1$, il existe un entier n_1 , et on choisit le plus petit tel que $x_1 \wedge d_{n_1} \in C_1$. On pose alors, si $n = 1$,

$$F[x_1 ; C_1] = F_{n_1}[x_1 \wedge d_{n_1} ; C_1] .$$

- Si $x_1 \wedge a \notin C_1$, on pose $n_1 = 1$, et si $n = 1$,

$$F[x_1 ; C_1] = x_1 .$$

Supposons que n_{p-1} ait été défini là où $p \leqslant p'$:

- Si $x_{p\star1} \wedge d_{n_1,n_2,\dots,n_{p-1}} \in C_{p\star1}$, comme $d_{n_1,\dots,n_{p-1}} = \bigvee_{n\in\underset{\sim}{N}} d_{n_1,\dots,n_{p-1},n}$, et que cette suite est croissante, il existe un entier n_p , et on choisit le plus petit, tel que $x_{p\star1} \wedge d_{n_1,n_2,\dots,n_{p-1},n_p} \in C_{p\star1}$. On pose alors, si $n = p \star q$,

$$F[x_1 , x_2 , \dots , x_n ; C_1 , \dots , C_n]$$

$$= F_{n_1,\dots,n_p}[x_{p\star1} \wedge d_{n_1,\dots,n_p} , x_{p\star2} , \dots , x_{p\star q} ; C_{p\star1} , \dots , C_{p\star q}] .$$

- Si $x_{p\star 1} \wedge d_{n_1,n_2,\dots,n_{p-1}} \notin C_{p\star 1}$, on pose $n_p = 1$, et si $n = p \star q$,

$$F[x_1 , x_2 , \dots , x_n ; C_1 , \dots , C_n] = x_n \quad .$$

Il est immédiat que F est un rabotage global, il faut démontrer qu'il est compatible avec a .

Soit $((x_n , C_n))$ une suite F-rabotée telle que $x_1 \leqslant a$. On peut définir, comme il vient d'être indiqué, la suite $n_1 , n_2 , \dots , n_p , \dots$, mais on remarque que $x_1 \wedge a = x_{1\star 1} \wedge a = x_1 \in C_1$. Si

$$x_{(p-1)\star 1} \wedge d_{n_1,\dots,n_{p-2}} \in C_{(p-1)\star 1} \quad ,$$

on a

$$x_{(p-1)\star 1} \wedge d_{n_1,\dots,n_{p-1}} \in C_{(p-1)\star 1} \quad ,$$

et comme

$$x_{p\star 1} \leqslant x_{(p-1)\star 1+1} \leqslant F[x_{(p-1)\star 1} \wedge d_{n_1,\dots,n_{p-1}} ; C_{(p-1)\star 1}] \leqslant d_{n_1,\dots,n_{p-1}} \quad ,$$

on a

$$x_{p\star 1} \wedge d_{n_1,\dots,n_{p-1}} \in C_{p\star 1} \quad .$$

Le raisonnement par récurrence montre que ceci est vrai pour tout entier p .

On pose maintenant $y_1 = x_{p\star 1} \wedge d_{n_1,\dots,n_p}$, où p est un entier fixé, et $y_q = x_{p\star q}$, si $q \geqslant 2$. On vérifie que $y_q \in C_{p\star q}$ pour tout q , et comme $y_1 \leqslant d_{n_1,\dots,n_p}$, on voit facilement que $y_1 \leqslant a_{n_1,\dots,n_p}$. Montrons que la suite $((y_q , C_{p\star q}))$ est $(F_{n_1,\dots,n_p})$-rabotée :

$$y_{q+1} = x_{p\star(q+1)} \leqslant x_{p\star q+1} \leqslant F[x_1 , \dots , x_{p\star q} ; C_1 , \dots , C_{p\star q}] \quad ;$$

or

$$F[x_1 , \dots , x_{p\star q} ; C_1 , \dots , C_{p\star q}]$$
$$= F_{n_1,\dots,n_p}[x_{p\star 1} \wedge d_{n_1,\dots,n_p} , x_{p\star 2} , \dots , x_{p\star q} ; C_{p\star 1} , \dots , C_{p\star q}] \quad ,$$

donc

$$y_{q+1} \leqslant F_{n_1,\dots,n_p}[y_1 , \dots , y_q ; C_{p\star 1} , \dots , C_{p\star q}] \quad ,$$

et la suite $((y_q , C_{p\star q}))$ est $(F_{n_1,\dots,n_p})$-rabotée. On en déduit donc que $a_{n_1,\dots,n_p}$ est une enveloppe de (y_q) , donc de (x_n) .

Si μ désigne la suite $n_1 , n_2 , \dots , n_p , \dots$ de Σ , on voit alors que a_μ est une enveloppe de (x_n) , et comme $a_\mu \leq a$, cela entraîne que a est aussi une enveloppe de (x_n) .

COROLLAIRE 25.

1° La borne supérieure d'une suite croissante d'éléments polis est polie.

2° La borne inférieure d'une suite d'éléments polis est polie.

Démonstration.

1° On ne fait dépendre a_s que du premier terme de s .

2° On ne fait dépendre a_s que de la longueur de s .

Remarque 26. - Soient X un ensemble, Ω un sous-treillis de $\mathcal{P}(X)$ ordonné par l'inclusion, et E un pavage de Ω stable par borne supérieure finie. La condition $r \trianglelefteq s \implies a_r \leq a_s$ est alors inutile si le système déterminant est régulier (on peut s'y ramener avec le théorème 17). En effet,

$$a = \bigvee_{\sigma\in\Sigma} \left(\bigwedge_{s\leq\sigma} a_s\right) = \bigvee_{\sigma\in\Sigma} \left(\bigwedge_{s\leq\sigma} \left(\bigvee_{r\trianglelefteq s} a_r\right)\right) .$$

On pose $b_s = \bigvee_{r\trianglelefteq s} a_r$ qui est alors poli (voir le théorème 31 et le 1er exemple 30), on note F_s un rabotage global compatible avec b_s , et on peut appliquer la démonstration du théorème. Bien entendu, on suppose que Ω est stable par borne inférieure dénombrable et par borne supérieure de puissance $\aleph_1$.

II. Produit de treillis pavés

On se donne deux treillis pavés, munis du même ensemble filtrant croissant T : (Ω_1 , E_1 , T) et (Ω_2 , E_2 , T) . Désignons par Ω le produit $\Omega_1 \times \Omega_2$ muni de l'ordre produit, et par E le sous-ensemble de Ω formé par les couples (a_1 , a_2), où a_i appartient à E_i $(i = 1 , 2)$. Il est clair que (Ω , E , T) est un treillis pavé. On notera $(\Omega , E , T) = (\Omega_1 , E_1 , T) \times (\Omega_2 , E_2 , T)$.

THÉORÈME 27. - Si a_i $(i = 1 , 2)$ est un élément poli de Ω_i , $a = (a_1 , a_2)$ est un élément poli de Ω .

Démonstration. - Soient F_i $(i = 1 , 2)$ un rabotage global compatible avec a_i , $(C_s)_{s\leq t}$ une classe de familles semi-extérieures de Ω , et $(b_s)_{s\leq t}$ une classe d'éléments de Ω . On a $b_s = (b_s^1 , b_s^2)$. Alors on pose

$$C_s^2 = \{x^2 \in \Omega_2 \mid (b_s^1 , x^2) \in C_s\} , \qquad \text{si } s \lesssim t ;$$

C_s^2 est une famille semi-extérieure de Ω_2 . De même,

$$C_s^1 = \{x^1 \in \Omega_1 \mid (x^1 , F_2[(b_r^2)_{r \lesssim s} ; (C_r^2)_{r \lesssim s}]) \in C_s\}$$

est une famille semi-extérieure de Ω_1 . Remarquons que, si $b_s = (b_s^1 , b_s^2)$ appartient à C_s , alors b_s^2 et $F_2[(b_r^2)_{r \lesssim s} ; (C_r^2)_{r \lesssim s}]$ appartiennent à C_s^2 , donc b_s^1 et $F_1[(b_r^1)_{r \lesssim s} ; (C_r^1)_{r \lesssim s}]$ appartiennent à C_s^1 . Nous poserons alors

$$F[(b_s)_{s \lesssim t} ; (C_s)_{s \lesssim t}] = (F_1[(b_s^1)_{s \lesssim t} ; (C_s^1)_{s \lesssim t}] , F_2[(b_s^2)_{s \lesssim t} ; (C_s^2)_{s \lesssim t}]) .$$

Il est clair que l'on a ainsi défini un rabotage global F . Soit $((b_t , C_t))$ une T-suite F-rabotée, telle que $b_1 \lesssim a$. On vérifie immédiatement que $((b_t^i , C_t^i))$ $(i = 1 , 2)$ est F_i-rabotée, et que $b_1^i \lesssim a_i$. Il en résulte que a_i est une enveloppe de la T-suite (b_t^i) , donc que a est une enveloppe de b_t . Ainsi le rabotage F est compatible avec a , qui est donc poli.

<u>Remarque</u> 28. - Soient deux treillis pavés (Ω_i , E_i , T) $(i = 1 , 2)$, chacun étant muni d'une capacitance C_i . Alors $C = \{(a_1 , a_2) \mid a_i \in C_i\}$ est une capacitance de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, et on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 29. - <u>Si</u> a_i $(i = 1 , 2)$ <u>est un élément</u> C_i<u>-lisse de</u> Ω_i , $a = (a_1 , a_2)$ <u>est un élément</u> C-<u>lisse de</u> Ω .

<u>Démonstration</u>. - On restreint le rabotage global défini dans le théorème 27 à $\sum_{t \in T} \Omega^{(1,t)} \times \mathcal{C}^{(1,t)}$ où $\mathcal{C} = \{C\}$.

On remarquera que le théorème 27 reste encore vrai si on utilise des capacitances au lieu de familles semi-extérieures.

III. <u>Stabilité par image</u>

On se donne deux treillis pavés (Ω , E) et (Ω' , E') (nous écrivons (Ω , E) à la place de $(\Omega , E , \underset{\sim}{N})$), vérifiant les hypothèses (A), (B) et (C), définies dans les notations 18. Nous dirons qu'une application $g : \Omega' \to \Omega$ est un morphisme, si elle vérifie les conditions suivantes :

1° g est une application monotone croissante ;

2° Si (a'_n) est une suite croissante de Ω' , $g(\bigvee_n a'_n) = \bigvee_n g(a'_n)$;

3° $g(E') \subset E$, et si (a'_n) est une suite décroissante de E , alors $g(\bigwedge_n a'_n) = \bigwedge_n g(a'_n)$.

Dans ce paragraphe, nous supposerons que les pavages sont stables par sup et inf finis.

Exemples de morphismes 30.

1° Soient (Ω , E) un treillis pavé, et $(\Omega' , E') = (\Omega , E) \times (\Omega , E)$. L'application g de Ω' dans Ω , qui à (a_1 , a_2) associe $a_1 \vee a_2$, est un morphisme.

2° Soient (Ω , E) et (Ω' , E) deux treillis pavés, tels que $\Omega = \mathcal{P}(X)$ et $\Omega' = \mathcal{P}(X')$, où X et X' sont deux ensembles, et h une application de X dans X' , telle que $h^{-1}(E') \subset E$. Alors $g = h^{-1} : \Omega' \to \Omega$ est un morphisme.

3° Soient (Ω_i , E_i) deux treillis pavés, tels que $\Omega_i = \mathcal{P}(X_i)$, où X_i est un ensemble $(i = 1 , 2)$. On suppose, de plus, que le pavage E_2 est semi-compact, c'est-à-dire que Ω_2 a un plus petit élément, $\emptyset$, qui appartient au pavage E_2 , et si (a_n) est une suite décroissante d'éléments, différents de $\emptyset$, du pavage E_2 , alors $\bigwedge_n a_n \neq \emptyset$. Posons $\Omega' = \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$, et E' le pavage de Ω' engendré par les ensembles de la forme $a_1 \times a_2$, où $a_i \in E_i$. L'application g de Ω' dans Ω_1 , qui à une partie de $X_1 \times X_2$ associe sa projection sur X_1 , est un morphisme.

THÉORÈME 31. - Soient (Ω' , E') et (Ω , E) deux treillis pavés, et g un morphisme de Ω' dans Ω . Si h' est poli dans Ω' , $h = g(h')$ est poli dans Ω .

Démonstration. - Soient F' un rabotage global de h' , $C_1 , \ldots , C_n$ des familles extérieures de Ω , et $b_1 , \ldots , b_n$ des éléments de Ω .

1° Si $b_1 \wedge h \notin C_1$, nous poserons

$$F[b_1 , \ldots , b_n ; C_1 , \ldots , C_n] = b_n .$$

2° Si $b_1 \wedge h \in C_1$, on considère $C'_p = \{a' \in \Omega' \mid b_p \wedge g(a') \in C_p\}$ $(p \leq n)$. C'_p est bien une famille extérieure de Ω' . On pose

$b'_1 = h'$, $b'_2 = F'[b'_1 ; C'_1]$, ... , $b'_{n+1} = F'[b'_1 , \ldots , b'_n ; C'_1 , \ldots , C'_n]$,

puis

$$F[b_1 , \ldots , b_n ; C_1 , \ldots , C_n] = \begin{cases} b_n \wedge g(b'_{n+1}) , & \text{si } b'_n \in C'_n , \\ b_n , & \text{si } b'_n \notin C'_n . \end{cases}$$

On définit ainsi un rabotage global. Soit maintenant $((b_n , C_n))$ une suite F-rabotée, telle que $b_1 \leq h$. Nous allons montrer que $((b'_n , C'_n))$ est une suite F'-rabotée.

Comme $b_1 \leq h$ et $b_1 \in C_1$, cela entraîne que $b'_1 = h' \in C'_1$, donc

$$F[b_1 ; C_1] = b_1 \wedge g(b'_2) \quad .$$

Puisque $b_2 \leq F[b_1 , C_1]$, on a $b_2 \leq g(b'_2)$, ce qui montre que $b'_2 \in C'_2$, puisque $b_2 \in C_2$. Supposons démontré que, pour l'entier $n \geq 2$, $b'_n \in C'_n$, et que $b_n \leq g(b'_n)$. Alors

$$F[b_1 , \ldots , b_n ; C_1 , \ldots , C_n] = b_n \wedge g(b'_{n+1}) , \qquad \text{donc } b_{n+1} \leq g(b'_{n+1}) \quad ,$$

ce qui entraîne que $b'_{n+1} \in C'_{n+1}$. Vérifions enfin que h est une enveloppe de la suite (b_n). Comme $((b'_n , C'_n))$ est F'-rabotée, h' est une enveloppe de la suite (b'_n), donc $g(h')$ est une enveloppe de la suite $g(b'_n)$. Or $g(b'_n) \geq b_n$, et par conséquent h est une enveloppe de (b_n). Ainsi, h est poli.

On dira qu'une partie A de Ω sépare les éléments d'une partie B de Ω, si Ω possède un plus petit élément, $\emptyset$, et si, lorsque b_1 et b_2 appartiennent à B et $b_1 \wedge b_2 = \emptyset$, on peut trouver a_1 et a_2 dans A, tels que $a_1 \wedge a_2 = \emptyset$ et $a_i \geq b_i$ $(i = 1 , 2)$.

THÉORÈME 32. - Soient (Ω , E) un treillis pavé, où E est un pavage semi-compact, et A une partie de Ω, $\sigma\delta$-stable, séparant les éléments du pavage E. Si b_1 et b_2 sont deux éléments polis disjoints (c'est-à-dire : $b_1 \wedge b_2 = \emptyset$), il existe deux éléments disjoints a_1 et a_2 de A séparant b_1 et b_2.

Démonstration. - Posons

$$(\Omega' , E') = (\Omega , E) \times (\Omega , E) \quad ,$$

et

$$C = \{(C_1 , C_2) \in \Omega' \mid C_1 \text{ et } C_2 \text{ ne sont pas séparables par } A\} \quad .$$

C est une famille extérieure de Ω', et comme $b = (b_1 , b_2)$ est poli, il existe un rabotage global F compatible avec b, et même un rabotage f compatible avec b relativement à C. Posons

$$d_1 = b \ , \quad d_2 = f(d_1) \ , \quad \ldots \ , \quad d_{n+1} = f(d_1 , \ldots , d_n) \ , \quad \ldots \quad .$$

Cette suite est f-rabotée, si $b \in C$. Supposons que $b \in C$. Alors il existe une suite décroissante (q_n) d'éléments de $C \cap E'$ (car C est en fait une capacitance), tels que $\bigwedge_n q_n \leq b$. Comme $b_1 \wedge b_2 = \emptyset$, on a $(\bigwedge_n q^1_n) \wedge (\bigwedge_n q^2_n) = \emptyset$, et puisque le pavage est semi-compact, cela entraîne l'existence d'un entier n tel que $q_n^1 \wedge q_n^2 = \emptyset$, mais alors $q = (q_n^1 , q_n^2)$ n'appartient pas à C . Ainsi $b \notin C$, et b_1 et b_2 sont séparables par A .

Remarque 33. - On peut prendre $A = \hat{E}$, où $\hat{E}$ désigne le stabilisé de E pour les sup et inf dénombrables.

IV. Espaces topologiques hyposousliniens

Les définitions et démonstrations de ce paragraphe constituent un apport personnel des rédacteurs.

Définition 34. - Soit K un espace topologique compact. On appellera treillis pavé associé à K , et on notera (K) , l'ensemble des parties de K , ordonné par l'inclusion, muni du pavage des parties compactes de K , et où $T = \underset{\sim}{N}$.

Définition 35. - Un espace topologique X est dit hyposouslinien, s'il existe un compact K contenant X , tel que X soit un élément poli de (K) .

Un tel espace est nécessairement complètement régulier.

THÉORÈME 36. - Si X est hyposouslinien, et si F est fermé dans X , F est lui-même hyposouslinien.

Démonstration. - Il existe, en effet, un compact K tel que X soit poli dans (K) . L'adhérence $\overline{F}$ de F dans K est compacte. Puisque tout élément du pavage est poli, $\overline{F}$ est poli dans (K) . Par suite, $F = X \cap \overline{F}$ est poli dans (K) comme intersection de deux éléments polis.

THÉORÈME 37. - Si X est hyposouslinien, si Y est complètement régulier, si f est une application continue surjective de X sur Y , Y est hyposouslinien. Plus précisément, pour tout compact H contenant Y , Y est poli dans (H) .

Démonstration. - Soient K un compact contenant X , tel que X soit poli dans (K) , et H un compact contenant Y . Désignons par Γ le graphe de f dans $X \times H$, c'est-à-dire $\{(x , y) \mid y = f(x)\}$, par $\overline{\Gamma}$ l'adhérence de Γ dans $K \times H$, par π_K et π_H les projections de $K \times H$ sur K et H .

Soit φ l'application de (K) dans $(K \times H)$, définie par $\varphi(A) = \overline{\Gamma} \cap \pi_K^{-1}(A)$.

Comme $\overline{\Gamma}$ est compact, et que π_K est continue, $\varphi(A)$ est compact chaque fois que A est compact. Il est immédiat que φ est un morphisme de (K) dans $(K \times H)$. Comme X est poli dans (K) , $\varphi(X)$ est poli dans $(K \times H)$. Comme f est continue, Γ est fermé dans $X \times H$; $\varphi(X)$ est donc égal à Γ .

Soit ψ l'application de $(K \times H)$ dans (H), définie par $\psi(A) = \pi_H(A)$. Il est immédiat que ψ est un morphisme. Comme Γ est poli dans $(K \times H)$, $Y = \psi(\Gamma)$ est poli dans (H), ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE 38.

1° Si X est hyposouslinien, pour tout compact K contenant X, X est poli dans (K).

2° Si X est homéomorphe à un espace hyposouslinien, X est hyposouslinien.

THÉORÈME 39. - Si X est hyposouslinien, Y complètement régulier, et f une application continue de X dans Y, pour toute partie hyposouslinienne Z de Y, $f^{-1}(Z)$ est une partie hyposouslinienne de X.

Démonstration. - Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ les compactifiés de Stone-Čech de X et Y. Il existe un prolongement $\tilde{f}$ continu de f, de $\tilde{X}$ dans $\tilde{Y}$. En vertu du théorème précédent, X et Z sont polis respectivement dans $(\tilde{X})$ et $(\tilde{Y})$. L'application φ de $(\tilde{Y})$ dans $(\tilde{X})$, définie par $\varphi(A) = \tilde{f}^{-1}(A)$, est clairement un morphisme. Par conséquent, $\varphi(Z)$ est poli dans $(\tilde{X})$; puisque $\tilde{f}$ prolonge f, $f^{-1}(Z)$ est l'intersection de X avec $\varphi(Z)$, ce qui montre que $f^{-1}(Z)$ est poli dans $(\tilde{X})$, donc hyposouslinien.

PROPOSITION 40. - L'ensemble des parties hyposousliniennes d'un espace complètement régulier X est stable par réunion et intersection dénombrables, et, plus généralement, par l'opération $(\mathfrak{A})$ de Souslin.

Démonstration. - Ceci résulte immédiatement des théorèmes généraux sur les éléments polis d'un treillis pavé vérifiant (A), (B) et (C), en les appliquant au treillis pavé associé à une compactification de X.

COROLLAIRE 41. - Tout espace K-analytique complètement régulier est hyposouslinien.

PROPOSITION 42. - La somme et le produit d'une famille dénombrable d'espaces hyposousliniens sont hyposousliniens.

Démonstration. - Si les X_n sont hyposousliniens, leur somme est un espace complètement régulier. Si j_n est l'injection canonique de X_n dans la somme des X_n, il résulte du théorème 37 et de la proposition 40 que la réunion des $j_n(X_n)$ est hyposouslinienne, et ce dernier espace n'est autre que la somme des X_n.

Soient K_n un compact qui contient X_n, et π_n la projection de $K = \prod_p K_p$ sur

K_n . K est compact, et, dans K , $\prod_p X_p$ est l'intersection des $\pi_p^{-1}(X_p)$. Il résulte alors du théorème 39 et de la proposition 40, que $\prod_p X_p$ est hyposouslinien.

PROPOSITION 43. - Soient K un compact, et X une partie hyposouslinienne de K . Pour toute capacité sur K , X est capacitable.

Démonstration. - X est poli dans (K) . Soit donc F un rabotage global sur (K) , compatible avec X . Si I est une capacité sur K ,

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \{A \subset K \mid I(A) > I(X) - \varepsilon\}$$

est une capacitance sur (K) qui contient X , si $\varepsilon > 0$. Par conséquent, si l'on définit la suite (A_n) par

$$\begin{cases} A_1 = X \quad , \\ A_{n+1} = F(A_1 , \dots , A_n ; \mathcal{C}_\varepsilon , \dots , \mathcal{C}_\varepsilon) \quad , \end{cases}$$

la suite $((A_n , \mathcal{C}_\varepsilon))_{n\in \mathbb{N}}$ est F-rabotée. Puisque F est compatible avec X , $\bigcap_n \overline{A_n} \subset X$, et comme $\tilde{I}(\overline{A_n}) \geqslant I(A_n)$, on a

$$I(\bigcap_n \overline{A_n}) = \inf I(\overline{A_n}) \geqslant I(X) - \varepsilon \quad .$$

$\bigcap \overline{A_n}$ est donc un compact contenu dans X , de capacité supérieure à $I(X) - \varepsilon$, ce qui montre que X est capacitable.

THÉORÈME 44. - Soient H un compact, et X et Y deux parties hyposousliniennes disjointes de H . Il existe alors une partie A de H appartenant à la tribu engendrée par les compacts G_δ de H , telle que

$$X \subset A \quad \text{et} \quad A \cap Y = \emptyset \quad .$$

Démonstration. - Si X et Y sont compacts, il existe, puisque H est normal, une fonction numérique continue f sur H , valant 1 sur X , et 0 sur Y . Alors $f^{-1}(]-\infty , \frac{1}{3}[)$ et $f^{-1}(]\frac{2}{3} , +\infty[)$ sont des G_δ compacts dans H disjoints, contenant respectivement Y et X . La tribu $\mathcal{T}$, engendrée par les G_δ compacts de H , satisfait donc aux hypothèses du théorème 32. Par conséquent, si X et Y sont disjoints et polis dans (H) , il existe deux éléments A et B , disjoints, de $\mathcal{T}$, contenant respectivement X et Y . On a alors $A \cap Y = \emptyset$, ce qui établit le théorème.

THÉORÈME 45. - Soient H un compact, et A une partie de H . Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A et $H \setminus A$ sont K-boréliens ;

(ii) A appartient à la tribu engendrée par les G_δ compacts ;

(iii) Il existe un compact métrisable L, un borélien B de L, et une application continue f de H dans L, tels que $A = f^{-1}(B)$.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si A et $H \setminus A$ sont K-boréliens, ils sont hyposousliniens, d'après la proposition 40. Le théorème 44 donne alors le résultat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties A de H vérifiant la proposition (iii). On va montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu, et contient les G_δ compacts, ce qui établira le résultat.

En effet, si A appartient à $\mathcal{T}$, il existe un compact métrisable L, un borélien B de L, et f continue de H dans L avec $A = f^{-1}(B)$. Comme $\complement A = f^{-1}(\complement B)$, $\complement A$ appartient à $\mathcal{T}$.

Si A_n appartient à $\mathcal{T}$, avec $A_n = f_n^{-1}(B_n)$, où B_n est borélien dans le compact métrisable L_n, on peut poser $L = \prod_n L_n$. Si f est alors l'application de H dans L, dont les coordonnées sont les f_n, on a $\bigcap_n A_n = f^{-1}(\prod B_n)$. Comme f est continue, et que $\prod B_n$ est borélien dans le compact métrisable L, $\bigcap_n A_n$ appartient à $\mathcal{T}$.

Si A est un G_δ compact, il existe une suite d'ouverts U_n de H, dont A est l'intersection. Comme H est normal, il existe, pour tout n, une fonction numérique continue sur H, à valeurs dans $[0, 1]$, et valant 0 sur A, et 1 sur $H \setminus U_n$. La fonction $f = \sum_n 2^{-n} f_n$ est continue, à valeurs dans $[0, 2]$, et on a $A = f^{-1}(0)$, ce qui montre que A appartient à $\mathcal{T}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Si B est borélien dans le compact métrisable L, B et $\complement B$ appartiennent au $\sigma\delta$-stabilisé de l'ensemble des fermés. Il en est donc de même de $f^{-1}(B)$ et de $\complement f^{-1}(B)$, et, puisque tout fermé dans H est compact, $f^{-1}(B)$ et $H \setminus f^{-1}(B)$ sont K-boréliens.

COROLLAIRE 46. - Si X et Y sont deux parties hyposousliniennes disjointes d'un espace complètement régulier Z, il existe une fonction continue de Z dans un compact métrisable, telle que $f(X) \cap f(Y) = \emptyset$.

Démonstration. - Soit H un compact contenant Z. Il existe, d'après le théorème 44, une partie A de H contenant X, disjointe de Y, et appartenant à la tribu engendrée par les G_δ compacts. D'après le théorème précédent, A est image réciproque par une application continue f_1 d'un borélien B d'un compact métrisable L . Si f est la restriction à Z de f_1 , il est clair que $f(X)$ et $f(Y)$ sont disjoints.

THÉORÈME 47. - Tout espace hyposouslinien est un espace de Lindelöf.

Démonstration. - Soient X un espace hyposouslinien, et K un compact contenant X . Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X . Chacun des ω_i est la trace sur X d'un ouvert Ω_i de K . Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties A de K qui ne sont recouvertes par aucune sous-famille dénombrable des Ω_i . Il est clair que $\mathcal{C}$ est une capacitance.

Si X n'est recouvert par aucune sous-famille dénombrable des $(\omega_i)_{i\in I}$, il appartient à $\mathcal{C}$. Mais comme il est poli dans (K) , il existe un rabotage global F sur (K) , compatible avec X . On pose alors

$$A_1 = X \ , \quad \dots \ , \quad A_{n+1} = F(A_1 \ , \dots , A_n \ ; \mathcal{C} \ , \dots , \mathcal{C}) \ , \quad \dots \ .$$

Si X appartient à $\mathcal{C}$, il en est de même de tous les A_n , donc de tous les $\overline{A_n}$. Comme F est compatible avec X , et que la suite $((A_n , \mathcal{C}))$ est F-rabotée, on a

$$\bigcap_n \overline{A_n} \subset X \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i \ .$$

Comme la suite $(\overline{A_n})$ est décroissante, la suite $\overline{A_n} \setminus \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ est une suite décroissante de compacts d'intersection vide. Il existe donc un entier m tel que $\overline{A_m} \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Le compact $\overline{A_m}$ est alors recouvert par les Ω_i , donc par un nombre fini d'entre eux, ce qui est incompatible avec le fait que $\overline{A_m}$ appartient à $\mathcal{C}$.

X n'appartient donc pas à $\mathcal{C}$, ce qui montre qu'il est recouvert par une sous-famille dénombrable des ω_i .

COROLLAIRE 48. - Tout espace hyposouslinien est paracompact et replet.

Démonstration. - En effet, tout espace de Lindelöf régulier est paracompact et replet.

COROLLAIRE 49. - Tout espace hyposouslinien métrisable se plonge dans un compact métrisable.

Démonstration. - En effet, tout espace de Lindelöf métrisable est à base dénombrable, donc sous-espace d'un compact métrisable.

COROLLAIRE 50. - Si A est une partie ouverte et hyposouslinienne d'un espace régulier X , A est un F_σ dans X .

Démonstration. - Pour tout x dans A, il existe un voisinage ouvert U_x de x, dont l'adhérence est contenue dans A. Les U_x forment un recouvrement de l'espace de Lindelöf A, il existe donc une suite (x_n) telle que les U_{x_n} recouvrent A. A est donc réunion de la suite des fermés $\overline{U_{x_n}}$.

Le problème qui se pose alors naturellement est celui de savoir si la classe des espaces hyposousliniens est, ou non, strictement plus grande que celle des espaces $\mathcal{K}$-analytiques complètement réguliers.

V. Capacitances scissipares

On se place maintenant dans le cas suivant : X est un sous-treillis semi-complet (voir notations 18) du treillis des parties d'un ensemble, et E est un pavage semi-compact, c'est-à-dire que l'intersection de toute suite décroissante d'éléments non vides de E est non vide ; de plus, pour tout x de X, il existe un plus petit élément de E contenant x, noté $\overline{x}$, et $T = \underset{\sim}{N}$.

Définition 51. - La capacitance C sur le treillis X est dite scissipare, si, pour tout élément x de C, il existe deux éléments disjoints de E, a_0 et a_1, tels que $a_0 \cap x$ et $a_1 \cap x$ appartiennent à C.

Exemple de capacitance scissipare 52. - Soient K un compact métrisable, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties non dénombrables de K. Il est clair que $\mathcal{C}$ est une capacitance sur le treillis (K) associé à K. Si A est une partie non dénombrable de K, A possède au moins deux points de condensation x_0 et x_1 ; si V_0 et V_1 sont deux voisinages compacts disjoints de x_0 et x_1 respectivement, $V_0 \cap A$ et $V_1 \cap A$ appartiennent à $\mathcal{C}$, ce qui montre que $\mathcal{C}$ est scissipare.

THÉORÈME 53. - Soient C une capacitance scissipare sur un treillis pavé (X, E), et x un élément poli de (X, E) appartenant à C. Il existe une famille non dénombrable d'éléments de X, contenus dans x, chacun intersection d'une suite décroissante d'éléments de $E \cap C$, et dont la réunion est l'intersection d'une suite décroissante d'éléments du pavage E.

Démonstration. - Puisque C est une capacitance scissipare, il existe deux applications φ_0 et φ_1 de C dans E, telles que

$$\forall\, y \in C, \qquad \psi_i(y) = \varphi_i(y) \cap y \in C ,$$
$$\forall\, y \in C, \qquad \varphi_0(y) \cap \varphi_1(y) = \emptyset .$$

Soit F un rabotage global compatible avec x . Désignons par D (resp. Δ) l'ensemble des suites finies (resp. infinies) d'éléments de $\{0 , 1\}$. On notera $m < m'$ (resp. $m < \mu$), si m est une section commençante de la suite finie m' (resp. de la suite infinie μ). On notera aussi m_k la section commençante de longueur k de la suite m , si celle-ci est de longueur supérieure à k . On définit, par récurrence, sur la longueur de la suite m , une application ρ de D dans X , par :

(a) $\rho(0) = \psi_0(x)$; $\rho(1) = \psi_1(x)$;

(b) Si m est de longueur $k + 1$,

$$\rho(m) = \psi_i \circ F[\rho(m_1) , \rho(m_2) , \dots , \rho(m_k) ; C , \dots , C] ,$$

où i est égal au terme de rang $k + 1$ de m .

Quelle que soit la suite μ dans Δ , la suite $(\rho(m) , C)_{m<\mu}$ est F-rabotée, puisque $\psi_i(y) = \varphi_i(y) \cap y$ est inclus dans y et appartient à C , quel que soit l'élément y de C . Comme F est compatible avec x , et que $\rho(m_1)$ est inclus dans x , $a_\mu = \bigcap_{m<\mu} \overline{\rho(m)}$ est inclus dans x .

Comme, de plus, pour tout y de C , $\overline{\psi_0(y)} \cap \overline{\psi_1(y)}$, inclus dans $\varphi_0(y) \cap \varphi_1(y)$, est vide, les a_μ sont deux à deux disjoints. Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que, si l'on note $|m|$ la longueur de m , on a

$$\bigcup_{\mu\in\Delta} a_\mu = \bigcap_{k\in\underset{\sim}{N}} \Big(\bigcup_{|m|=k} \overline{\rho(m)}\Big) ,$$

et que $\bigcup_{|m|=k} \overline{\rho(m)}$ appartient au pavage, puisqu'il n'existe que 2^k suites de longueur k .

<u>Application</u> 54. - Si X est un espace hyposouslinien métrisable, il contient un compact non dénombrable, s'il est lui-même non dénombrable.

<u>Démonstration</u>. - En effet, d'après le corollaire 49, X se plonge dans un compact métrisable K . L'ensemble C des parties non dénombrables de K est une capacitance scissipare (cf. l'exemple 52) sur (K) . Le théorème 53 donne donc le résultat, puisque l'intersection d'une suite de compacts est compacte, et que l'intersection d'une suite décroissante de compacts non dénombrables, donc non vides, est non vide.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELLACHERIE (C.). - Ensembles aléatoires, II, Séminaire de Probabilités III, Strasbourg 1967/68, p. 115-126. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 88).

[2] DELLACHERIE (C.). - Capacitances et rabotages, Séminaire de Probabilités III, Strasbourg 1967/68 (Exposé non publié).

[3] DELLACHERIE (C.). - Ensembles minces associés à une capacité, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 13e année, 1969/70, n° 2, 19 p.

[4] DELLACHERIE (C.). - Rabotages sur un ensemble ordonné. Etude des éléments polis (non publié).

[5] SIERPINSKI (W.). - Sur la puissance des ensembles mesurables (B), Fund. Math., Warszawa, t. 5, 1924, p. 166-171.

(Texte reçu le 15 octobre 1970)

Michèle DEHEN
11 bis rue du Lion
93 - BONDY

Yves DERMENJIAN
4 rue Coysevox
75 - PARIS 18

Jean SAINT-RAYMOND
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08