Jean Saint-Raymond

Topologie sur l'ensemble des compacts non vides d'un espace topologique séparé. Exemple de complémentaire analytique non analytique dans un espace polonais

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 2 (1969-1970), exp. nº 21, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A11_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 21, 6 p.

4 juin 1970

TOPOLOGIE SUR L'ENSEMBLE DES COMPACTS NON VIDES D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE SÉPARÉ.

EXEMPLE DE COMPLÉMENTAIRE ANALYTIQUE NON ANALYTIQUE DANS UN ESPACE POLONAIS

par Jean SAINT-RAYMOND

Soit X un espace topologique séparé. Soit KX l'ensemble des compacts non vides de X, que l'on munit de la topologie (séparée) engendrée par les

$$W(\omega_1 , \dots , \omega_n) = \{H \mid H \in KX ; H \subset \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i ; (\forall i) (H \cap \omega_i \neq \emptyset)\} ,$$

où les ω_i sont ouverts. On montre aisément (cf. [1], chap. I, § 9, ex. 14) que :

(i) $x \longmapsto \{x\}$ est un homéomorphisme de X sur son image, fermée dans KX ;

(ii) Si Y est un sous-espace de X, KY est un sous-espace de KX ;

(iii) $(H_1 , H_2) \longmapsto H_1 \cup H_2$ est continue de $(KX) \times (KX)$ dans KX ;

(iv) KX est séparable si, et seulement si, X l'est ;

(v) Si (H_n) est une suite croissante de compacts, et si $H = \overline{\bigcup_n H_n}$ est compact, H est limite de la suite (H_n).

Si la topologie de X est définie par une structure uniforme $\mathcal{U}$, la topologie de KX est définie par la structure uniforme engendrée par les $(W(V))_{V\in\mathcal{U}}$, où $W(V)$ est l'entourage,

$$W(V) = \{(H_1 , H_2) \mid H_1 \subset V(H_2) \text{ et } H_2 \subset V(H_1)\}$$

(cf. [1], chap. II, § 2, ex. 6).

Si la structure uniforme de X est définie par une distance, la distance de Hausdorff sur KX définit la structure uniforme correspondante (cf. [2], § 2, ex. 6). On montre aisément que, si X est un espace métrique complet, KX est un espace métrique complet pour la distance de Hausdorff.

Si X est un espace topologique polonais, il découle de ce qui précède que KX est un espace topologique polonais.

1. THÉORÈME. - <u>Si</u> X <u>est un espace uniforme complet, l'espace uniforme</u> KX <u>est complet</u>.

On peut remarquer que X est isomorphe (cf. [1], chap. 2, § 2, ex. 6) à un sous-espace fermé de KX, donc complet, si KX est complet. Le théorème donne donc, en fait, une condition nécessaire et suffisante pour que KX soit complet.

Démonstration. - Si X est complet, et si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur K, nous poserons

$$\Phi(S) = \overline{\bigcup_{H \in S} H} , \qquad \text{où } S \in \mathfrak{F} ,$$

$$C = \bigcap_{S \in \mathfrak{F}} \Phi(S) .$$

C est fermé dans X, donc complet. Pour montrer que C est compact, il suffit de montrer qu'il est précompact. Soit V un entourage de la structure uniforme $\mathcal{U}$ de X. Il existe un entourage symétrique V_1 de $\mathcal{U}$ tel que $V_1^6 \subset V$, et un ensemble S dans $\mathfrak{F}$ petit, d'ordre $W(V_1)$. Soit H un compact appartenant à S ; pour tout compact H' dans S, on a

$$H' \subset V_1(H) , \qquad \text{donc } \bigcup_{H' \in S} H' \subset V_1(H) .$$

On a donc

$$\Phi(S) \subset \overline{V_1(H)} \subset V_1^2(H) .$$

Comme H est précompact, il existe un ensemble fini $\{x_1 , \dots , x_n\}$ dans H, tel que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_1(x_i) .$$

Alors

$$C \subset \Phi(S) \subset V_1^2(H) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_1^3(x_i) .$$

Les ensembles $V_1^3(x_i)$ sont petits, d'ordre V_1^6, puisque V_1 est symétrique, donc petits, d'ordre V. C est donc recouvert par un nombre fini d'ensembles petits, d'ordre V, ce qui montre qu'il est précompact, donc compact.

Montrons maintenant que C est non vide, et que $\mathfrak{F}$ converge vers C. Soit V_0 un entourage de $\mathcal{U}$. Nous avons déjà vu que, si $S_0 \in \mathfrak{F}$ est petit, d'ordre $W(V_0)$, et si H appartient à S_0,

$$C \subset \Phi(S_0) \subset V_0^2(H) .$$

Pour démontrer que S_0 est inclus dans $W(V_0^2).(C)$, ce qui assurera la convergence de $\mathfrak{F}$ vers C, il reste à démontrer que tout compact H_0 appartenant à S_0 est inclus dans $V_0^2(C)$, ce qui démontrera aussi que C n'est pas vide. Il suffit donc de montrer, si V_0 est symétrique, que, pour tout point x_0 de H_0, C rencontre $V_0^2(x_0)$.

Soit S appartenant à $\mathfrak{F}$, et soit H un compact appartenant à $S \cap S_0$. Comme $(H, H_0) \in W(V_0)$, on a $x_0 \in V_0(H) \subset V_0(\Phi(S))$. Donc $V_0(x_0) \cap \Phi(S)$ n'est pas vide. Comme $\Phi(S \cap S')$ est inclus dans $\Phi(S) \cap \Phi(S')$, la famille des

$$(V_0(x_0) \cap \Phi(S))_{S \in \mathfrak{F}}$$

forme une base de filtre sur X. Soit $\mathfrak{G}$ un ultrafiltre plus fin que cette base de filtre.

On va démontrer que $\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy ; puisque X est complet, $\mathfrak{G}$ possèdera une limite x_1, qui appartiendra à

$$[\bigcap_{S \in \mathfrak{F}} \overline{(V_0(x_0) \cap \Phi(S))}] \subset [\overline{V_0(x_0)} \cap \Big(\bigcap_{S \in \mathfrak{F}} \Phi(S)\Big)] \subset [V_0^2(x_0) \cap C] .$$

Ceci montrera que $V_0^2(x_0)$ rencontre C, et achèvera la démonstration.

Il suffit pour cela de démontrer que, pour tout entourage symétrique V de $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{G}$ contient une partie de X petite, d'ordre V^6. Soient alors S_1 une partie appartenant à $\mathfrak{F}$ petite, d'ordre V, et H_1 un compact appartenant à S_1. Comme H_1 est précompact, il existe un ensemble fini $\{y_1, \dots, y_n\}$ dans H_1, tel que

$$H_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i) .$$

On a alors

$$V_0(x_0) \cap \Phi(S_1) \subset \Phi(S_1) \subset V^2(H_1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V^3(y_i) .$$

Comme $\mathfrak{G}$ est un ultrafiltre plus fin que $(V_0(x_0) \cap \Phi(S))_{S \in \mathfrak{F}}$, $\mathfrak{G}$ contient l'un des $V^3(y_i)$, qui est petit d'ordre V^6. Ceci montre que $\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy, et achève la démonstration.

2. - X <u>peut être paracompact, sans que</u> KX <u>soit paracompact, ni même normal</u>.

Soit Y l'espace topologique obtenu en munissant la droite réelle $\underline{R}$ de la topologie engendrée par les intervalles $]a, b]$. On démontre (cf. [2], § 5, ex. 16) que Y est paracompact, et que $Y \times Y$ n'est, ni paracompact, ni même normal.

Soit alors X l'espace produit de Y par l'espace discret $\{0, 1\}$ qui est compact. X est donc paracompact. Posons

$$f(y, y') = \{(y, 0) ; (y', 1)\} .$$

On vérifie immédiatement que f est un homéomorphisme de $Y \times Y$ sur un sous-espace fermé de KX . Si ce dernier était normal, il en serait de même de $Y \times Y$, d'où la contradiction.

3. - X peut être lusinien sans que KX soit lusinien, ni même souslinien. Plus précisément, le sous-espace $K\underset{\sim}{Q}$ de l'espace polonais $K\underset{\sim}{R}$ est le complémentaire d'une partie souslinienne, et n'est pas souslinien.

(a) $K\underset{\sim}{Q}$ est le complémentaire d'une partie souslinienne. - Soit G le sous-espace de $\underset{\sim}{R}$ formé des nombres irrationnels ; G est polonais. Soit F le sous-espace de $G \times (K\underset{\sim}{R})$ formé des couples (λ , H) tels que $\lambda \in H$. Comme $\underset{\sim}{R}$ est polonais, il en est de même de $K\underset{\sim}{R}$, donc aussi de $G \times (K\underset{\sim}{R})$. L'application $g : (\lambda , H) \longmapsto \{\lambda\} \cup H$ est continue de $G \times (K\underset{\sim}{R})$ dans $K\underset{\sim}{R}$, et F , ensemble des couples (λ , H) tels que $g(\lambda , H) = H$, est fermé dans $G \times K\underset{\sim}{R}$, donc polonais. Sa projection sur $K\underset{\sim}{R}$ est l'ensemble des compacts de $\underset{\sim}{R}$ qui rencontrent G , donc le complémentaire dans $K\underset{\sim}{R}$ de $K\underset{\sim}{Q}$, et c'est une partie souslinienne.

(b) $K\underset{\sim}{Q}$ n'est pas souslinien. - En vertu du théorème de séparation des ensembles sousliniens, et de ce qui précède, si $K\underset{\sim}{Q}$ était souslinien, il serait borélien dans $K\underset{\sim}{R}$. Or on sait qu'il existe dans $\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$ une partie Z souslinienne et non borélienne (par exemple, la trace sur la diagonale de $\underset{\sim}{J} \times \underset{\sim}{J}$ d'un ensemble analytique universel dans $\underset{\sim}{J} \times \underset{\sim}{J}$). On va construire une application borélienne f de $\underset{\sim}{J}$ dans $K\underset{\sim}{R}$, telle que $f^{-1}(K\underset{\sim}{Q}) = \underset{\sim}{J} \setminus Z$. Si $K\underset{\sim}{Q}$ était borélien dans $K\underset{\sim}{R}$, il en serait de même de $f^{-1}(K\underset{\sim}{Q})$, ainsi que de son complémentaire Z , ce qui établirait une contradiction.

Soit $\mathbb{S}$ l'ensemble des suites finies d'entiers $\geqslant 1$. Si s et s' appartiennent à $\mathbb{S}$, nous poserons $s < s'$ si s est une section commençante de s' . Nous poserons de même $s < \sigma$, si la suite finie s est une section commençante de la suite infinie σ . Nous considérerons dans toute la suite l'ensemble $\underset{\sim}{N}$ comme privé de 0 .

Soit j l'application de $\underset{\sim}{J} \cup \mathbb{S}$ dans $\underset{\sim}{R}$ qui, à une suite finie ou infinie d'entiers $\geqslant 1$, associe le nombre réel compris entre 0 et 1 qui admet cette suite comme suite des quotients incomplets de son développement en fraction continue. On a

$$j(\mathbb{S}) = \underset{\sim}{Q} \cap \,]0 , 1] \;,$$

$$j(\underset{\sim}{J}) = G \cap \,]0 , 1[\;.$$

La topologie de $\underset{\sim}{J}$ admet une base formée d'ouverts fermés. Z est donc le noyau d'un système déterminant régulier d'ouverts fermés $(F_s)_{s\in\mathbb{S}}$,

$$Z = \bigcup_{\sigma\in\underset{\sim}{J}} \Big(\bigcap_{s<\sigma} F_s \Big) \ .$$

Nous désignerons par $f_s(x)$ la fonction de $\underset{\sim}{J}$ dans $K\underset{\sim}{R}$, qui vaut $\{0\}$ si $x \notin F_s$, et $\{0 , j(s)\}$ si $x \in F_s$. Comme F_s est ouvert et fermé, f_s est continue. Posons

$$f(x) = \overline{\bigcup_{s\in\mathbb{S}} f_s(x)} \subset [0 , 1] \ .$$

Donc $f(x)$ appartient à $K\underset{\sim}{R}$. En vertu des propriétés (iii) et (iv) rappelées plus haut, et du fait que $\mathbb{S}$ est dénombrable, la fonction f est de première classe de Baire, donc borélienne. Il reste à montrer que $f^{-1}(K\underset{\sim}{Q}) = \underset{\sim}{J} \setminus Z$.

Soit z dans Z ; il existe donc σ dans $\underset{\sim}{J}$, tel que $z \in \bigcap_{s<\sigma} F_s$. Alors, pour tout $s < \sigma$, $f_s(z) = \{0 , j(s)\}$. La convergence des réduites $j(s)$ vers $j(\sigma)$, et la définition de f , entraînent que $j(\sigma) \in f(z)$, et donc que $f(z) \notin K\underset{\sim}{Q}$.

Inversement, si $f(z) \notin K\underset{\sim}{Q}$, il existe un nombre irrationnel λ dans $f(z)$, λ appartient à $]0 , 1[$, et il existe une suite infinie $\sigma \in J$ telle que $\lambda = j(\sigma)$. Soit s_0 une suite finie, section commençante de σ . L'ensemble V des nombres réels x tels que $j^{-1}(x) \succ s_0$ est un voisinage de $j(\sigma) = \lambda$, donc rencontre $\bigcup_{s\in\mathbb{S}} f_s(z)$. Il existe donc $s \succ s_0$ tel que $j(s) \in f_s(z)$; alors $z \in F_s \subset F_{s_0}$, puisque le système déterminant est régulier.

On a donc

$$z \in \bigcap_{s_0<\sigma} F_{s_0} \subset Z \ .$$

Ceci achève la démonstration.

La méthode de (b) est inspirée de [3], où S. MAZURKIEWICZ démontre, également à l'aide d'une partie analytique non borélienne auxiliaire, que, dans l'espace des fonctions numériques continues sur $[0 , 1]$ muni de la norme uniforme, l'ensemble des fonctions différentiables est une partie non souslinienne, dont le complémentaire est souslinien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chap. 1-2. 3e édition. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1142 ; Bourbaki, 11).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chap. 9. 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[3] MAZURKIEWICZ (Stefan). - Über die Menge der differenzierbaren Funktionen, Fund. math., Warszawa, t. 27, 1936, p. 244-249.

(Texte reçu le 18 juin 1970)

Jean SAINT-RAYMOND
Ass. Fac. Sc. Paris
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08