Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Hicham Fakhoury

Espaces fortement réticulés de fonctions affines

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 1 (1969-1970), exp. n° 7, p. 1-40
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_1_A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 7, 40 p.
18 décembre 1969

ESPACES FORTEMENT RÉTICULÉS DE FONCTIONS AFFINES

par Hicham FAKHOURY

Notations. - Si E est un espace topologique, $C(E)$ désigne l'espace des fonctions numériques continues sur E .

Si K est un convexe compact inclus dans un e. l. c. séparé, on note :

- $E(K)$ l'ensemble (non vide) des points extrémaux de K ;
- $S(K)$ le cône des fonctions convexes continues sur K ;
- $A(K)$ l'espace des fonctions affines continues sur K ;
- $M_+^1(K)$ le convexe vaguement compact des mesures positives de masse 1 sur K .

Sauf mention du contraire (§ 5 et § 6), K désigne un convexe compact inclus dans un e. l. c. séparé, et X un simplexe compact.

Si H est un sous-espace d'un espace vectoriel ordonné E , on munit H de l'ordre induit par celui de E . On note $\sup_H$ (resp. $\inf_H$) l'opération "borne supérieure" (resp. inférieure) quand elle est définie dans H . Si f et g sont deux fonctions numériques définies sur un ensemble E , on note $f \vee g$ (resp. $f \wedge g$) la fonction enveloppe supérieure (resp. inférieure).

Introduction. - Un sous-convexe F d'un convexe compact K est une face, s'il satisfait la condition suivante :

Pour tout couple x et y de K , et tout λ réel de $]0 , 1[$, si le point $x + (1 - \lambda)y$ est dans F , alors x et y sont dans F .

Une fonction f définie sur K , à valeurs réelles, est convexe, si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + (1 - \lambda)\ f(y) \quad ,$$

pour tout couple x et y de K , et tout λ dans $[0 , 1]$. La fonction f est affine, si f et $-f$ sont convexes. On munit $M_+^1(K)$ de l'ordre de Choquet ([4]) défini par

$$\mu \prec \nu \quad \text{si, et seulement si,} \quad \mu(f) \leq \nu(f) \ , \quad \forall\ f \in S(K) \quad .$$

Soit μ une mesure de $M_+^1(K)$; un point k de K est dit barycentre de μ (et on le note $b(\mu)$), si pour toute fonction de $A(K)$, on a

$$\mu(f) = f(b(\mu)) \quad .$$

Si μ et ν sont deux mesures comparables (au sens de $\prec$), elles ont un même barycentre ; par suite, si ε_k est la mesure de Dirac au point k , l'inégalité $\varepsilon_k \prec \nu$ est équivalente à $k = b(\nu)$.

Une mesure est dite maximale, quand elle est maximale pour l'ordre $\prec$; il est démontré dans [4] que toute mesure de $M_+^1(K)$ est majorée par une mesure maximale, et que tout point de K est barycentre d'une mesure maximale.

Pour toute fonction numérique bornée f définie sur K , on introduit les deux fonctions :

$$\hat{f}(k) = \inf\{g(k) \; ; \; g \in A(K) \; , \; g > f\} \; ,$$

et

$$\check{f} = - \widehat{(- f)} \; .$$

Pour les propriétés de ces fonctions, on peut se reporter à [4] et [19].

Un simplexe est un convexe d'e. l. c. qui est affinement homéomorphe à une base d'un cône réticulé ; il est démontré dans [4] qu'un convexe compact X est un simplexe, si tout point x de X est barycentre d'une mesure maximale unique (notée μ_x).

Il existe plusieurs caractérisations des simplexes ; on pourra consulter [4], [10], [13], [16], et [20].

Dans la suite, nous aurons surtout besoin de la caractérisation due à EDWARDS [6] ; nous l'utiliserons sous le nom "théorème d'Edwards".

Dans le paragraphe 1, nous rappelons certaines propriétés des espaces de Banach ordonnés, ainsi que les résultats de [5], [7], [8], et [9].

Dans le paragraphe 2, nous donnons une caractérisation des faces d'un simplexe, que nous utilisons pour étudier les rapports entre la topologie faciale d'un simplexe et celle de son quotient par une relation d'équivalence simpliciale.

Le paragraphe 3 est consacré à l'étude des sous-espaces fortement réticulés. Nous montrons en particulier que, si un tel sous-espace est fermé, c'est un M-espace. En utilisant les résultats du paragraphe 2, on montre que le "centre" de $A(X)$ (où X est un simplexe) est le plus grand sous-espace fortement réticulé et contenant les constantes, ce qui permet de caractériser les fonctions affines facialement continues. Ensuite, nous étudions le centre d'un M-espace, et nous montrons que c'est le plus grand idéal d'ordre qui soit isomorphe pour l'ordre et pour la norme induits à l'espace des fonctions continues, nulles à l'infini, sur un espace localement compact.

Le paragraphe 4 traite de la tribu de Baire de $\max(X)$ et de l'étude du stabilisé du centre par limites simples de suites.

Dans le paragraphe 5, on étudie la pseudo-frontière de Choquet d'un M-espace, et grâce aux théorèmes du paragraphe 3, on retrouve certains résultats connus.

Dans le paragraphe 6, on construit des exemples pour montrer les limites de validité des théorèmes des parties précédentes, en particulier on caractérise la topologie faciale pour une famille particulière de simplexes.

Le théorème 3.17 a été indépendemment obtenu par R. NAGEL dans sa thèse ([17]) ; il y arrive grâce à une étude systématique des idéaux d'ordre.

Le présent travail est une partie de la thèse de 3e cycle de l'auteur ; il reprend et développe la note [11] où le théorème 3.17 est déjà énoncé, ainsi que l'exemple 6.5.3.

1. Préliminaires sur les espaces de Banach ordonnés.

Dans cette partie, nous rappelons certaines propriétés des espaces de Banach ordonnés. La plupart des résultats déjà connus seront donnés sans démonstration, mais avec simplement une référence bibliographique.

Un espace vectoriel E (sur $\underset{\sim}{R}$) est ordonné, s'il existe une relation d'ordre partiel $\leqslant$ sur E, telle que :

(a) Si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$, pour tout z de E ;
(b) Si $0 \leqslant x$, alors $0 \leqslant \lambda x$, pour tout λ réel $\geqslant 0$.

Soit $E_+ = \{x \in E \ ; \ 0 \leqslant x\}$; les propriétés (a) et (b) entraînent :

(a') E_+ est convexe ;
(b') $\lambda E_+ \subset E_+$, pour tout $\lambda \geqslant 0$.

Un ensemble vérifiant les propriétés (a') et (b') est un cône convexe.

Inversement, si P est un cône de E , la relation définie par

$$(x \leqslant y) \iff y - x \in P$$

vérifie (a) et (b). Ainsi tout espace vectoriel ordonné est associé canoniquement au cône des éléments positifs.

DÉFINITION 1.1. - Un espace vectoriel E vérifie le lemme de décomposition de Riesz, si pour tous x , y , z positifs, tels que $z \leqslant x + y$, il existe u et v positifs vérifiant $z = u + v$, $u \leqslant x$ et $v \leqslant y$.

PROPOSITION 1.2. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) E vérifie le lemme de décomposition de Riesz ;
(b) Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont deux suites finies d'éléments positifs de E ,

<u>telles que</u> $\sum_i x_i = \sum_j y_j$, <u>il existe une suite finie d'éléments positifs de</u> E , <u>telle que</u>

$$(z_{ij})_{ij\in I\times J} , \qquad x_i = \sum_j z_{ij} , \qquad y_j = \sum_i z_{ij} \quad ;$$

(c) <u>Si</u> $(u , v) \leqslant (x , y)$, <u>il existe</u> z <u>dans</u> E , <u>tel que</u>

$$(u , v) \leqslant z \leqslant (x , y) \quad .$$

Un espace vectoriel ordonné E est réticulé, si tout couple (x , y) admet une borne supérieure $x \sup_E y$ et une borne inférieure $x \inf_E y$.

PROPOSITION 1.3. - <u>Pour un espace vectoriel</u> E , <u>il est équivalent de dire que</u> :

(a) E <u>est réticulé</u> ;

(b) <u>Tout couple</u> (x , y) <u>dans</u> E <u>admet une borne supérieure</u> ;

(c) <u>Tout couple</u> (x , y) <u>dans</u> E_+ <u>admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans</u> E_+ , <u>et</u> $E = E_+ - E_+$.

Une démonstration de cette assertion se trouve dans [2].

Un espace de Banach E est un <u>Banach-réticulé</u>, s'il est réticulé, et si l'application $(x , y) \to x \sup_E y$ est continue de $E \times E$ dans E .

Un <u>M-espace</u> est un Banach-réticulé qui vérifie :

(a) $\|x\| = \||x|\|$;

(b) Tout couple (x , y) d'éléments positifs de E vérifie :

$$\|x \sup_E y\| = \max(\|x\| , \|y\|) \quad .$$

Un <u>L-espace</u> est un Banach-réticulé qui vérifie :

(a) $\|x\| = \||x|\|$;

(b) Tout couple (x , y) d'éléments positifs de E vérifie :

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad .$$

Soit E un espace vectoriel ordonné ; E^* désigne l'espace dual (algébrique) de E , et E_+^* le cône dual de E_+ , c'est-à-dire :

$$E_+^* = \{f \in E^* ; \ f(x) \geqslant 0 \ \text{pour tout} \ x \in E_+\} \quad .$$

Si E est un e. l. c., son dual topologique E' sera toujours muni de l'ordre défini par $E_+ = E' \cap E_+^*$.

DÉFINITION 1.4. - Un espace simplicial est un espace de Banach ordonné E, tel que :

(a) E_+ est fermé ;
(b) E' est un L-espace pour l'ordre et la norme duals.

Soit $P(E)$ la partie positive de la boule unité de E' définie par

$$P(E) = \{f \in E' \ ; \ \|f\| \leqslant 1\} \cap E'_+ \ .$$

On munit $P(E)$ de la trace de la topologie $\sigma(E', E)$; alors $P(E)$ est compacte.

Sauf mention du contraire, E' sera toujours muni de la topologie $\sigma(E', E)$.

Dans [8], EFFROS démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5. - $P(E)$ est un simplexe compact, et l'espace E s'identifie pour l'ordre et pour la norme à l'espace des fonctions affines continues sur $P(E)$, nulles en zéro.

Soit X un simplexe compact ; il est clair que $A(X)$ est un espace simplicial, de plus X est affinement homéomorphe à l'ensemble

$$\{\ell \in (A(X))' \ ; \ \ell \geqslant 0 \ , \ \|\ell\| = 1\}$$

muni de la trace de la topologie $\sigma((A(X))', A(X))$.

Inversement, si E est un espace simplicial, et si l'ensemble

$$X = \{\ell \in E' \ ; \ \ell \geqslant 0 \ , \ \|\ell\| = 1\}$$

est fermé dans $P(E)$, alors X est un simplexe compact, et E s'identifie pour l'ordre et pour la norme à $A(X)$.

Il existe d'autres caractérisations intrinsèques des espaces simpliciaux. Rappelons celle-ci :

THÉORÈME 1.6 (DAVIES [5]). - Un espace de Banach ordonné E est un espace simplicial, si E_+ est fermé, et si de plus :

(a) E vérifie le lemme de décomposition de Riesz ;
(b) Si $x, y \in E$ avec $-x \leqslant y \leqslant x$, on a $\|y\| \leqslant \|x\|$;
(c) Pour $x, y \in E$, il existe $z \in E$ tel que $z \geqslant (x, y)$ et $\|z\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$

DÉFINITION 1.7. - On note $\max(E)$, l'espace $\mathcal{E}(P(E)) \setminus \{0\}$ muni de la topologie des faces définie par :

$A \subset \mathcal{E}(P(E)) \setminus \{0\}$ est fermé si, et seulement s'il existe une face fermée F de $P(E)$ contenant 0, telle que

$$E(F) = A \cup \{0\} \ .$$

Si l'espace E est de la forme $A(X)$ pour un simplexe compact X, l'espace $\max(E)$ s'identifie à $E(X)$ muni de la topologie suivante :

$A \subset E(X)$ est fermé si, et seulement s'il existe une face fermée F de X, telle que $E(F) = A$.

L'espace $E(X)$, muni de cette topologie, sera noté $\max(X)$, au lieu de $\max(A(X))$.

Dans la suite, on aura souvent besoin des résultats suivants dus à EFFROS [8] et [9].

THÉORÈME 1.8.

(a) Soit E un espace simplicial ; pour que $\max(E)$ soit séparé, il faut et il suffit que E soit un M-espace.

(b) Pour qu'un simplexe X soit un simplexe de Bauer, il faut et il suffit que $\max(X)$ soit séparé ; dans ce cas, la topologie faible et la topologie des faces coïncident sur $E(X)$.

Dans [9], EFFROS présente une forme abstraite du problème de Dirichlet.

THÉORÈME 1.9. - Soient f une fonction de $C^b(\max(E))$, et u une fonction de E ; il existe une unique fonction de E qui coïncide sur $E(P(E))$ avec le produit $u.f$.

COROLLAIRE 1.10. - Soient X un simplexe, et f une fonction de $C(\max(X))$; il existe un unique prolongement de f en une fonction $\tilde{f}$ affine continue sur X.

Soit C le sous-espace de $A(X)$ formé de ces prolongements ; C est appelé le centre de $A(X)$.

Nous allons maintenant donner un théorème du type "Weierstrass-Stone" pour des simplexes. Ce résultat est dû à EDWARDS et VINCENT-SMITH [7].

Soient X un simplexe, et L un sous-espace de $A(X)$; on note

$$L_+ = \{f \in L \ ; \ f \geqslant 0\} \ ,$$

et pour tout point x de $E(X)$, on pose

$$L(x) = \{y \in X \ ; \ f(y) = f(x) \ , \ \text{pour tout } f \text{ de } L\} \ .$$

THÉORÈME 1.11. - Soient X un simplexe, et L un sous-espace de $A(X)$ tel que :

(a) L contient les constantes ;

(b) L vérifie le lemme de décomposition de Riesz ;

(c) Pour tout x dans $E(X)$, et f dans L, avec $f(x) = 0$, on peut trouver g dans L_+, $g \geqslant f$ et $g(x) = 0$.

Alors, pour tout x dans $E(X)$, l'ensemble $L(x)$ est une face fermée, et $\bar{L}$ est identique à l'espace des fonctions de $A(X)$ constantes sur les faces $L(x)$.

Dans [15], JELLETT a donné plusieurs conditions équivalentes à la proposition (c) ci-dessus. Dans la suite, on aura l'occasion de poser une condition équivalente, dans le cas où L est réticulé.

2. Relation d'équivalence simpliciale, simplexe quotient.

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques caractérisations des faces fermées d'un simplexe compact, et nous étudions les simplexes quotients.

La proposition suivante est due à ROGALSKI, mais la démonstration qui suit est différente de la sienne.

PROPOSITION 2.1. - Soient X un simplexe, et B un sous-convexe compact de X, tel que $E(B) \subset E(X)$. Alors B est une face de X.

Démonstration. - Soit 1_B la fonction caractéristique de B ; on montrera que $\hat{1}_B$ est affine, pour cela il suffit de montrer que

$$\mathfrak{F} = \{f \in A(X) \; ; \; f > 1_B\}$$

est filtrant décroissant.

Soient f_1 et f_2 dans $\mathfrak{F}$, et $u = f_1 \wedge f_2$; la fonction $\check{u}$ est affine s. c. i., strictement positive sur $E(X)$, et $\check{u} > 1$ sur $E(B)$. Le principe du maximum de Bauer entraîne $\check{u} > 1_B$ sur X. Soit

$$\mathcal{H} = \{h \in A(X) \; ; \; h < \check{u}\} \; ;$$

cette famille est filtrante croissante, son enveloppe supérieure est $\check{u}$; par suite, la famille

$$K_h = \{x \in X \; ; \; h(x) \leqslant 1_B(x) \quad \text{et} \quad h \in \mathcal{H}\}$$

de compacts d'intersection vide est filtrante décroissante. Il existe un élément $h \in \mathcal{H}$ avec $K_h = \emptyset$, ce qui veut dire $1_B < h < \check{u}$. L'ensemble $\mathfrak{F}$ est donc filtrant décroissant. Soit $F = \hat{1}_B^{-1}(1)$; il est clair que F est une face fermée qui contient B. Soit $x \in E(F) \setminus E(B)$; comme F est une face fermée, x est dans $E(X)$. Mais alors $\hat{1}_B(x) = 1_B(x) = 0$; d'où la contradiction, et $B = F$ est une face.

COROLLAIRE 2.2. - Soient K un convexe compact, X un simplexe, et φ une application affine continue de K dans X, vérifiant $\varphi(E(K)) \subset E(X)$; alors $\varphi(K)$ est une face fermée de X.

Démonstration. - $\varphi(K)$ est un sous-convexe compact de X ; d'après l'hypothèse sur φ, on a $E(\varphi(K)) \subset E(X)$. On conclut par ce qui précède.

DÉFINITION 2.3. - Soit K un convexe compact ; un sous-compact D est stable, si pour tout x dans D, et pour toute mesure maximale μ de barycentre x, on a $\text{support}(\mu) \subset \overline{c(D)}$.

PROPOSITION 2.4. - Soient X un simplexe, et D un sous-compact stable ; alors $\overline{c(D)}$ est une face fermée de X.

Démonstration. - Soit $K = \overline{c(D)}$; montrons que $E(K) \subset E(X)$. D'après le théorème de Krein-Milman, $E(K) \subset D$, puisque D est compact. Soit $x \in E(K) \setminus E(X)$; la mesure maximale de barycentre x (notée μ_x) est différente de ε_x ; par hypothèse, elle est portée par K. Elle peut être identifiée à une mesure de $M_+^1(K)$. L'espace des restrictions à K des fonctions de $A(X)$ est dense dans $A(K)$ (HAHN-BANACH) ; par suite, le barycentre de μ_x (en tant que mesure de $M_+^1(K)$) est x. Mais alors le point x n'est pas extrémal dans K, d'où la contradiction. La proposition 2.1 permet de conclure que K est une face.

La proposition 2.4 est une généralisation d'un résultat d'EFFROS [9].

COROLLAIRE 2.5. - Soient X un simplexe, et $D \subset E(X)$ un sous-compact de X ; alors $\overline{c(D)}$ est une face de X.

On verra dans 6.1 que l'hypothèse " X est un simplexe" est nécessaire dans les propositions 2.1 et 2.4.

Nous allons maintenant nous occuper du problème inverse de celui étudié par EDWARDS et VINCENT-SMITH [7] dans le théorème 1.11 ; à savoir, trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille $(F_i)_{i\in I}$ de faces fermées deux à deux disjointes, et telles que $E(X) = \bigcup_i E(F_i)$, joue le rôle de la famille $(L(x))_{x\in E(X)}$ introduite dans le théorème 1.11.

La définition 2.6 et le théorème 2.7 sont dus à ROGALSKI [19].

DÉFINITION 2.6. - Une famille $R = (F_i)_{i\in I}$ de faces fermées deux à deux disjointes, et telles que $E(X) = \bigcup_i E(F_i)$, est une relation d'équivalence simpliciale, si l'espace H^R des fonctions de $A(X)$ constantes sur chacune des faces F_i vérifie :

(a) H^R <u>sépare les faces</u> $(F_i)_{i\in I}$;

(b) H^R <u>vérifie le lemme de décomposition de Riesz</u> ;

(c) <u>Pour tout</u> $i \in I$, <u>l'espace des fonctions de</u> H^R <u>nulles sur</u> F_i <u>est positivement engendré</u>.

THÉORÈME 2.7. - <u>Soient</u> X <u>un simplexe, et</u> $R = (F_i)_{i\in I}$ <u>une relation d'équivalence simpliciale sur</u> X . <u>Il existe un simplexe quotient de</u> X <u>par</u> R <u>(noté</u> $(X|R)$), <u>et une application affine continue surjective</u> ψ_R <u>de</u> X <u>sur</u> $(X|R)$, <u>tels que</u> :

(a) $\psi_R(E(X)) = E((X|R))$ <u>et</u> $H^R = \{h \circ \psi_R \; ; \; h \in A((X|R))\}$;

(b) <u>Il existe une bijection</u> $i \to y_i$ <u>de</u> I <u>sur</u> $E((X|R))$, <u>telle que</u>

$$F_i = \psi_R^{-1}(y_i) \quad ;$$

(c) <u>Le couple</u> $((X|R) , \psi_R)$ <u>est solution d'un problème universel dans le sens suivant</u> :

<u>Pour tout simplexe</u> Y , <u>et toute application</u> φ <u>affine continue de</u> X <u>sur</u> Y , <u>constante sur les faces</u> F_i , <u>il existe une application</u> $\tilde{\varphi}$ <u>unique de</u> $(X|R)$ <u>sur</u> Y , <u>telle que</u>

$$\tilde{\varphi} \circ \psi_R = \varphi \quad .$$

Soit $R = (F_i)_{i\in I}$ une relation d'équivalence simpliciale sur X ; on remarque que les ensembles $(E(F_i))_{i\in I}$ définissent une relation d'équivalence au sens usuel sur $E(X)$. Inversement, on dit qu'une relation d'équivalence sur $E(X)$ est simpliciale, quand ses classes sont les ensembles de points extrémaux d'une famille de faces fermées formant une relation d'équivalence simpliciale.

On convient de noter une relation d'équivalence simpliciale R et sa trace sur $E(X)$ par la même lettre.

Les espaces $\max(X)$ et $\max((X|R))$ sont reliés par le théorème suivant.

THÉORÈME 2.8. - <u>Soit</u> R <u>une relation d'équivalence simpliciale sur</u> X ; <u>alors</u> $\max((X|R))$ <u>et</u> $\max(X)/R$ <u>sont canoniquement homéomorphes</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit φ la restriction de l'application ψ_R à $E(X)$. Pour établir le théorème, on montre que $F \subset \max((X|R))$ est fermé si, et seulement si, $\varphi^{-1}(F)$ est fermé dans $\max(X)$.

Soit F un fermé dans $\max((X|R))$. Il existe une face fermée Q de $(X|R)$, telle que $E(Q) = F$. Par conséquent, $\varphi^{-1}(F)$ est fermé dans $\max(X)$, puisque

$$\varphi^{-1}(F) = \psi_R^{-1}(Q) \cap E(X) \quad .$$

Inversement, soit $F \subset \max((X|R))$ tel que $\varphi^{-1}(F)$ soit fermé dans $\max(X)$. Il existe une face fermée G de X , telle que $\varphi^{-1}(F) = E(G)$. Mais

$$\psi_R(E(X)) = E((X|R)) \quad ,$$

donc, d'après le corollaire 2.2, $\psi_R(G)$ est une face fermée de $(X|R)$; de plus $F = E(\psi_R(G))$. L'ensemble F est donc fermé dans $\max((X|R))$.

Par conséquent, l'application quotient de φ par R est une homéomorphie de $\max((X|R))$ sur $\max(X)/R$.

Avant d'aborder l'étude des espaces fortement réticulés, rappelons les deux résultats suivants sur les simplexes de Bauer.

PROPOSITION 2.9. - *Pour un convexe compact* K , *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) K *est un simplexe de Bauer* ;

(b) *Toute fonction* f *de* $C(\overline{E(K)})$ *se prolonge de manière unique en une fonction de* $A(K)$;

(c) *L'espace* $A(K)$ *est réticulé pour son ordre propre* ;

(d) K *est affinement homéomorphe au simplexe* $M_+^1(\overline{E(K)})$.

Pour une démonstration, on peut consulter [13] par exemple.

COROLLAIRE 2.10. - *Pour que deux simplexes de Bauer* X *et* Y *soient affinement homéomorphes, il faut et il suffit que* $E(X)$ *et* $E(Y)$ *soient homéomorphes.*

Ce résultat se déduit du point (d) de la proposition 2.9.

3. Sous-espaces fortement réticulés.

Dans cette partie, on étudie une classe particulière de sous-espaces réticulés de l'espace des fonctions affines sur un convexe compact. On montre, en particulier, que le centre C de $A(X)$ est le plus grand sous-espace fortement réticulé contenant les constantes.

DÉFINITION 3.1. - *Soit* K *un convexe compact ; un sous-espace* H *de* $A(K)$ *est fortement réticulé, si* :

(a) H *est réticulé pour son ordre propre* ;

(b) *Si* f *et* g *sont dans* H , *et* k *dans* $E(K)$, *alors*

$$f \sup_H g(k) = f(k) \vee g(k) \quad .$$

PROPOSITION 3.2. - *Soient* K *un convexe compact, et* H *un sous-espace fortement réticulé de* $A(K)$; *pour tout couple* (f , g) *dans* H , *la fonction* $\widehat{f \vee g}$ *(resp.* $\widecheck{f \wedge g}$ *) est affine continue.*

Démonstration. - En effet, $\widehat{f \vee g}$ est la plus petite fonction concave s. c. s. qui majore $f \vee g$; par suite,

$$\widehat{f \vee g} \leqslant f \sup_H g \quad .$$

Soit h dans $A(K)$, telle que $h > f \vee g$; elle majore aussi $f \sup_H g$, d'après l'hypothèse et le principe du maximum de Bauer. Par conséquent, $f \sup_H g = \widehat{f \vee g}$.

La même méthode permet d'écrire $f \inf_H g = \widecheck{f \wedge g}$.

PROPOSITION 3.3. - *Soient* K *un convexe compact, et* H *un sous-espace de* $A(K)$; *pour que* H *soit fortement réticulé, il faut et il suffit que tout couple de fonctions* f *et* g *dans* H *admette une borne supérieure dans* $A(K)$ *qui appartienne à* H .

Démonstration. - D'après la proposition précédente, la condition est nécessaire ; elle est suffisante, car l'hypothèse entraîne que H est réticulé pour son ordre propre. De plus, soit k un point de $E(K)$, et supposons

$$f \sup_H g(k) > f(k) \vee g(k) \quad ,$$

par suite,

$$f \sup_H g(k) > \widehat{f \vee g}(k) \quad .$$

Il existe donc h_k dans $A(K)$, telle que

$$h_k > f \vee g \qquad \text{et} \qquad f \sup_H g(k) > h_k(k) \quad .$$

Ceci prouve que $f \sup_H g$ n'est pas la borne supérieure de f et g , ce qui contredit l'hypothèse.

PROPOSITION 3.4. - *Soient* K *un convexe compact, et* H *un sous-espace fortement réticulé de* $A(K)$; *alors l'espace* $\overline{H}$ *est un sous-espace fortement réticulé de* $A(K)$.

Démonstration. - Soient f et g deux fonctions de $\overline{H}$, telles que

$$f = \lim_n f_n \qquad \text{et} \qquad g = \lim_n g_n \quad ;$$

la suite $f_n \sup_H g_n$ est de Cauchy. En effet, d'après le principe du maximum de Bauer et l'hypothèse sur H ,

$$\|f_n \sup_H g_n - f_p \sup_H g_p\| = \sup\{|f_n \vee g_n(k) - f_p \vee g_p(k)| \ ; \ k \in E(K)\} \quad .$$

Par construction, les suites f_n et g_n convergent uniformément vers f et g, par conséquent :

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \underset{\sim}{N}$ tel que, pour tout n, $p \geqslant N$, on ait

$$\|f_n \sup_H g_n - f_p \sup_H g_p\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Soit h la limite de $f_n \sup_H g_n$ dans $\bar{H}$; comme h coïncide sur $E(K)$ avec $f \vee g$, la fonction h est la borne supérieure de f et g dans $A(K)$. On conclut grâce à la proposition 3.3.

PROPOSITION 3.5. - <u>Soit</u> K <u>un convexe compact ; il existe dans</u> $A(K)$ <u>des sous-espaces fortement réticulés maximaux. Un tel sous-espace est fermé dans</u> $A(K)$.

<u>Démonstration</u>. - D'après le lemme de Zorn, il suffit de montrer que, si $(H_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée de sous-espaces fortement réticulés, l'espace $H = \bigcup_i H_i$ est fortement réticulé. Soient f et g dans H ; il existe i dans I, tel que $f \in H_i$ et $g \in H_i$. La fonction $f \sup_{H_i} g$ est la borne supérieure de f et g dans $A(K)$; on conclut par la proposition 3.3.

La deuxième partie est une conséquence de la proposition précédente.

L'exemple 6.2 montre qu'il existe un convexe compact K tel que $A(K)$ ne contienne pas un sous-espace fortement réticulé maximum.

PROPOSITION 3.6. - <u>Un sous-espace de Banach de</u> $A(K)$ <u>fortement réticulé est un M-espace</u>.

<u>Démonstration</u>. - L'espace H étant réticulé pour son ordre propre, il suffit de montrer que H est un espace simplicial ; pour cela, on utilise le théorème 1.6.

Le cône positif de H est fermé, et H vérifie le lemme de décomposition de Riesz, puisqu'il est réticulé. Soient f, g et h des fonctions dans H, telles que

$$\|f\| \leqslant 1 \ , \qquad \|g\| \leqslant 1 \ , \qquad \text{et} \qquad f \leqslant h \leqslant g \ .$$

Il est clair que $\|h\| \leqslant 1$.

La boule unité de H est filtrante croissante, d'après le principe du maximum de Bauer et l'hypothèse sur H. L'espace H est donc un M-espace.

On verra, dans 6.3, qu'il existe un simplexe X, et un sous-espace H de $A(X)$ fortement réticulé, tel que $H + \underset{\sim}{R}$ ne soit pas réticulé.

Soit K un convexe compact ; on peut supposer K canoniquement plongé dans

$(A(K))'$, muni de la topologie $\sigma((A(K))', A(K))$, au moyen du plongement canonique φ défini par

$$\varphi(k)(f) = f(k) , \qquad \text{pour tout } f \text{ dans } A(K) \text{ et } k \text{ de } K .$$

L'application φ est une homéomorphie affine de K sur $\varphi(K)$, où

$$\varphi(K) = \{\ell \in (A(K))' ; \ \ell \geqslant 0 , \ \|\ell\| = 1\} .$$

On confondra, dans la suite, K et $\varphi(K)$; par conséquent, on peut parler de $c(K \cup \{0\})$, et c'est un convexe compact. Soit π la trace sur $Y = c(K \cup \{0\})$ de la transposée de l'injection canonique de H dans $A(K)$. Elle applique Y dans $P(H)$; en effet, π est positive, et pour tout k dans Y , on a

$$\|\pi(k)\| = \sup\{|f(k)| ; \ f \in H , \ \|f\| \leqslant 1\} ,$$

$$\|\pi(k)\| \leqslant \|k\| \leqslant 1 .$$

D'après la proposition 3.6 et le théorème 1.5, l'espace H s'identifie à $A_0(P(H))$; plus précisément, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3.7. - <u>Soit</u> H <u>un sous-espace de</u> $A(K)$ <u>qui soit un espace simplicial</u> ; H <u>est identique à l'espace</u> $A_0(P(H)) \circ \pi$, <u>et l'application</u> π <u>est surjective</u> <u>de</u> Y <u>sur</u> $P(H)$.

<u>Démonstration</u>. - La dualité entre H et H' induit une application θ de H dans $A_0(P(H))$, isométrique et surjective sur un sous-espace dense.

La densité de $\theta(H)$ est une conséquence du théorème de Hahn-Banach ; l'isométrie se déduit du théorème d'Effros (théorème 1.5). Par suite, θ est surjective sur $A_0(P(H))$. Par définition des applications θ et π , il est simple de vérifier que, pour tout f dans H , on a $f = \theta(f) \circ \pi$. Ce qui démontre la première partie.

L'application π étant affine continue, $\pi(Y)$ est un convexe compact. Pour montrer que π est surjective, il suffit de montrer que $E(P(H)) \subset \pi(Y)$.

Soit p un point de $E(P(H)) \setminus \pi(Y)$; par suite,

$$p \notin c(\pi(Y) \cup -\pi(Y)) .$$

Sinon, $p = p_1 - p_2$ où p_i est dans $\pi(Y)$, l'espace H étant simplicial, et p , p_1 , p_2 étant positifs, on a $\|p_1\| - \|p_2\| = \|p\| = 1$; donc $p_2 = 0$; ce qui contredit l'hypothèse sur p .

Il existe, d'après ce qui précède, une fonction f dans H , telle que

$$\|f\| \geqslant f(p) > \sup\{f(q) ; \ q \in c(\pi(Y) \cup -\pi(Y))\}$$

$$= \sup\{|f(q)| ; \ q \in \pi(Y)\} = \|f\| .$$

D'où la contradiction recherchée ; par suite, π est surjective. Pour une généralisation, on pourra se reporter à la remarque 6.8.

Soit p un point extrémal non nul de $P(H)$; comme π est surjective, $\pi^{-1}(p)$ est une face fermée non vide de $c(K \cup \{0\})$. Plus précisément, $\pi^{-1}(p) \subset K$. En effet, on a $1 = \|p\| = \|\pi(k)\| \leq \|k\| = 1$, où k est dans $\pi^{-1}(p)$. Par conséquent, k est un point de K.

Comme $P(H)$ est un chapeau universel du cône positif de H', ce cône possède des génératrices extrémales ; notons $E(H'_+)$ cet ensemble.
(Pour la définition de chapeau d'un cône et ses propriétés, on renvoie à [18].)

Le théorème suivant caractérise les sous-espaces fortement réticulés.

THÉORÈME 3.8. - Soient K un convexe compact, et H un sous-espace de Banach de $A(K)$ qui soit un M-espace, et π l'application définie plus haut. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) H est fortement réticulé ;

(b) $\pi(E(K)) \subset P(H) \cap E(H'_+)$.

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Soit k un point de $E(K)$, tel que $\pi(k) \neq 0$, et supposons que $\pi(k)$ n'appartienne pas à une génératrice extrémale.

Il existe deux points y_1 et y_2, de même norme que $\pi(k)$, tels que

$$\pi(k) = 1/2(y_1 + y_2) \quad .$$

Soit h une forme linéaire continue, nulle en $\pi(k)$, et non nulle en y_1 et y_2 (h existe, d'après le théorème de Hahn-Banach). On peut supposer $h(y_1) = 1$ et $h(y_2) = -1$. Par suite, toute fonction f affine continue positive sur $P(H)$, qui majore h, ne peut s'annuler en $\pi(k)$:

$$f(\pi(h)) = 1/2(f(y_1) + f(y_2)) \geq 1/2 \quad .$$

D'après les théorèmes 3.6 et 3.7, la fonction $h \circ \pi$ appartient à H, et la fonction $\ell = (h \circ \pi \sup_H 0)$ s'annule en k. D'après le théorème 3.7, il existe une fonction f de $A_0(P(H))$, telle que $\ell = f \circ \pi$. La fonction f est affine, continue, positive, et majore h, tout en s'annulant en $\pi(k)$; d'où la contradiction recherchée, et $\pi(k) \in E(H'_+) \cap P(H)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Soient f et g deux fonctions de H ; comme $H = A_0(P(H)) \circ \pi$, il existe f_1 et g_1 dans $A_0(P(H))$, telles que $f = f_1 \circ \pi$ et $g = g_1 \circ \pi$. Il est simple de vérifier l'égalité

$$f \sup_H g = (f_1 \sup_{A_0(P(H))} g_1) \circ \pi \quad .$$

Soit k un point de $E(K)$, tel que $\pi(k) \neq 0$; par hypothèse,

$$\pi(k) = \|\pi(k)\| . \pi(k)/\|\pi(k)\| \quad ,$$

où $\pi(k)/\|\pi(k)\|$ est un point extrémal de $P(H)$. Le calcul barycentrique permet d'écrire :

$$\begin{aligned}(f_1 \sup_{A_0(P(H))} g_1)(\pi(k)) &= (f_1 \vee g_1)\ \pi(k) \\ &= f(k) \vee g(k) \quad .\end{aligned}$$

L'espace H est donc fortement réticulé.

Soient K un convexe compact, et H un sous-espace de Banach de $A(K)$, réticulé pour son ordre propre, et contenant les constantes. On sait que H est un M-espace (théorème 1.6 et remarque précédente), et il s'identifie à l'espace $A(X)$ où X est le simplexe de Bauer :

$$X = \{\ell \in H' \ ; \ \ell \geqslant 0 \ , \ \ell(1) = 1\} \quad .$$

Soit π l'application définie plus haut ; elle applique K sur X . En effet, pour tout k dans K ,

$$\|\pi(k)\| = \sup\{|f(k)| \ ; \ f \in H \ , \ \|f\| \leqslant 1\} = 1 \quad .$$

D'autre part, l'application π est surjective, car H contient les constantes (théorème de Hahn-Banach).

COROLLAIRE 3.9. - Soient K un convexe compact, et H un sous-espace de Banach de $A(X)$, réticulé pour son ordre propre, et contenant les constantes. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) H est fortement réticulé ;

(b) $\pi(E(K)) = E(K)$.

La démonstration se déduit de la remarque précédente et du théorème 3.8.

Nous verrons, dans l'exemple 6.4, que les hypothèses du théorème 3.8 n'entraînent pas $\pi(E(K)) = E(P(H))$.

Dans la suite, on étudie les sous-espaces fortement réticulés de l'espace des fonctions affines sur un simplexe compact X ; en particulier, on précise la proposition 3.5.

Pour tout x dans $E(X)$, on pose

$$Q(x) = \{y \in E(X) \ ; \ f(x) = f(y) \ , \ \forall\ f \in C(\max(X))\} \quad .$$

On rappelle que le centre de $A(X)$ (noté C) est l'espace des prolongements affines continus des fonctions de $C(\max(X))$ (voir le corollaire 1.10).

PROPOSITION 3.10. - C <u>est un espace de Banach fortement réticulé, identique à l'espace des fonctions de</u> $A(X)$ <u>constantes sur</u> $Q(x)$ <u>pour tout</u> x <u>dans</u> $E(X)$.

<u>Démonstration</u>. - Pour tout f de $C(\max(X))$, notons $\tilde{f}$ le prolongement affine continu de f .

Le principe du maximum de Bauer appliqué à $\tilde{f}$ montre que l'opérateur $f \to \tilde{f}$ est une isométrie et un isomorphisme d'ordre de $C(\max(X))$ sur C .

En particulier, si f et g sont dans C , on a les relations suivantes :

$$f \sup_C g = \widetilde{(f_{|\max(X)} \vee g_{|\max(X)})} \quad ,$$

$$f \inf_C g = \widetilde{(f_{|\max(X)} \wedge g_{|\max(X)})} \quad .$$

Par suite, l'espace C est fortement réticulé.

Soit

$$L(x) = \{y \in X \; ; \; f(x) = f(y) \; , \; \forall f \in C\} \quad .$$

L'espace C vérifie les conditions du théorème 1.11 ; par suite, C est l'espace des fonctions de $A(X)$ constantes sur $L(x)$ (pour tout x dans $E(X)$).

Montrons que $\overline{c(Q(x))} = L(x)$, pour tout x dans $E(X)$. L'ensemble $L(x)$ est une face fermée ; par suite,

$$E(L(x)) \subset E(X) \qquad \text{et} \qquad Q(x) \subset E(L(x)) \quad .$$

Soit y un point de $E(L(x)) \setminus Q(x)$; par définition de $Q(x)$, il existe une fonction f de $C(\max(X))$, telle que $f(x) \neq f(y)$; par conséquent, $\tilde{f}(x) \neq \tilde{f}(y)$ et $y \notin L(x)$; d'où la contradiction.

COROLLAIRE 3.11. - C <u>est un sous-espace de</u> $A(X)$, <u>fermé pour la topologie de la convergence simple sur</u> $E(X)$.

<u>Démonstration</u>. - En effet, soit f une fonction de $A(X)$ à C , pour la topologie de la convergence simple sur $E(X)$. Par suite, f est constante sur les ensembles $Q(x)$; on conclut par la proposition précédente.

LEMME 3.12. - <u>Il existe une relation d'équivalence simpliciale</u> R_X <u>sur</u> $E(X)$, <u>dont les classes sont les ensembles</u> $Q(x)$ <u>où</u> x <u>parcourt</u> $E(X)$.

<u>Démonstration</u>. - La famille $(Q(x))_{x \in E(X)}$ est l'ensemble des classes de la relation d'équivalence sur $\max(X)$ définie par $C(\max(X))$. Soit $L(x) = \overline{c(Q(x))}$; on

a vu que $L(x)$ est une face fermée. Posons $R_X = (L(x))_{x\in E(X)}$; le sous-espace H^{R_X} est identique à C , par suite, R_X est simpliciale.

COROLLAIRE 3.13. - <u>Le simplexe</u> $(X|R_X)$ <u>est un simplexe de Bauer.</u>

<u>Démonstration</u>. - L'espace $A((X|R_X))$ s'identifie pour l'ordre et pour la norme à l'espace C . D'après les propositions 2.9 (c) et 3.10, le simplexe $(X|R_X)$ est un simplexe de Bauer.

Le simplexe $(X|R_X)$ est solution d'un problème universel dans le sens suivant.

THÉORÈME 3.14. - <u>Pour tout simplexe de Bauer</u> Y , <u>et toute application affine continue</u> φ <u>de</u> X <u>dans</u> Y , <u>telle que</u> $\varphi(E(X)) \subset E(Y)$, <u>il existe une application affine continue</u> $\tilde{\varphi}$ <u>de</u> $(X|R_X)$ <u>dans</u> Y , <u>telle que</u>

$$\tilde{\varphi}(E(X|R_X)) \subset E(Y) \qquad \underline{\text{et}} \qquad \tilde{\varphi} \circ \psi_X = \varphi \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - L'application φ vérifie $\varphi(E(X)) \subset E(Y)$; d'après le corollaire 2.2, l'ensemble $\varphi(X)$ est une face fermée de Y , donc un simplexe de Bauer. Par suite, on peut, sans diminuer la généralité, supposer φ surjective. L'application φ étant affine continue de X sur Y , la restriction de φ à $\max(X)$ est continue de $\max(X)$ sur $\max(Y)$. En effet, soient $\varphi_{|\max(X)}$ cette restriction, et F un fermé de $\max(Y)$; il existe une face fermée G dans Y , telle que $F = E(G)$. Par conséquent,

$$(\varphi_{|\max(X)})^{-1}(F) = E(X) \cap \varphi^{-1}(G) \quad .$$

Or $\varphi^{-1}(G)$ est une face fermée de X , par suite $(\varphi_{|\max(X)})^{-1}(F)$ est un fermé de $\max(X)$, et $\varphi_{|\max(X)}$ est continue.

Soit R_φ la relation d'équivalence sur $\max(X)$ associée à φ ; alors $R_\varphi \supset R_X$. En effet, soient x et y dans $\max(X)$, tels que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$; le simplexe Y étant de Bauer, il existe une fonction f dans $C(\max(X))$, telle que

$$f \circ \varphi(x) \neq f \circ \varphi(y)$$

(théorème 1.8 (b)). Mais l'application $f \circ \varphi$ est dans $C(\max(X))$; on en déduit l'inclusion cherchée.

Il existe donc une application $\tilde{\varphi}$ de $\max(X)/R_X$ sur $\max(Y)$, telle que

$$\varphi_{|\max(X)} = \tilde{\varphi} \circ \psi_{X|\max(X)} \quad .$$

Le théorème 2.8 permet de supposer que $\tilde{\varphi}$ est continue de $\max((X|R_X))$ sur $\max(Y)$. Les simplexes $(X|R_X)$ et Y étant des simplexes de Bauer, les topologies de

$\max((X|R_X))$ et $\max(Y)$ sont respectivement les traces des topologies de $(X|R_X)$ et Y, d'après le théorème 1.8 (b).

On peut considérer que $\tilde{\varphi}$ est continue de $E((X|R_X))$ sur $E(Y)$; d'après la proposition 2.9, $\tilde{\varphi}$ se prolonge en une fonction affine continue unique de $(X|R_X)$ sur Y. Ce prolongement est encore noté $\tilde{\varphi}$. Par conséquent, $\tilde{\varphi} \circ \psi_X$ et φ sont affines continues et coïncident sur $E(X)$, elles sont donc égales.

L'unicité de $\tilde{\varphi}$ est facile à établir ; on déduit l'unicité de $((X|R_X), \psi_X)$ (à une homéomorphie affine près) du corollaire 2.10.

COROLLAIRE 3.15. - Toute relation d'équivalence simpliciale R sur X, telle que $(X|R)$ soit un simplexe de Bauer, contient R_X.

Le corollaire suivant généralise le corollaire 2.10.

COROLLAIRE 3.16. - Si X et Y sont deux simplexes tels que $\max(X)$ et $\max(Y)$ sont homéomorphes, alors $(X|R_X)$ et $(Y|R_Y)$ sont affinement homéomorphes.

La démonstration est immédiate, d'après le théorème 3.11 et les corollaires 2.10 et 3.12.

THÉORÈME 3.17. - Le sous-espace C est le plus grand sous-espace fortement réticulé de $A(X)$ et contenant les constantes.

Démonstration. - On a déjà vu que C est un sous-espace fortement réticulé.

Soit H un sous-espace de $A(X)$, fortement réticulé et contenant les constantes ; d'après le lemme 3.4, on peut supposer H fermé. Soient Y le simplexe de Bauer tel que H s'identifie à $A(Y)$, et π l'application canonique de X sur Y qui vérifie $\pi(E(X)) = E(Y)$ d'après le corollaire 3.9. Le théorème 3.14 montre qu'il existe une application affine continue $\tilde{\pi}$ de $(X|R_X)$ sur Y, telle que $\psi_X \circ \tilde{\pi} = \pi$. Des égalités $C = A((X|R_X)) \circ \psi_X$ et $H = A(Y) \circ \pi$, on déduit

$$H \subset C .$$

On donnera, dans 6.5, un exemple de deux simplexes X et Y non affinement homéomorphes, mais tels que $E(X)$ et $E(Y)$ munis des structures uniformes induites soient isomorphes, et tels que $\max(X)$ et $\max(Y)$ soient homéomorphes.

Soient E un espace simplicial, et $P(E)$ le simplexe compact associé. Si C désigne le centre de $A(P(E))$, on note C_0 le sous-espace des fonctions de C nulles en 0.

COROLLAIRE 3.18. - Soient E un espace simplicial, H un sous-espace de E tel que $H + \underset{\sim}{R}$ soit fortement réticulé ; alors H est un sous-espace de C_0.

Démonstration. - Le sous-espace $H + \underset{\sim}{R}$ étant fortement réticulé, c'est un sous-espace de C, d'après le théorème 3.17. Comme H est un sous-espace de E, toute fonction de H s'annule en 0, et par suite $H \subset C_0$.

L'exemple 6.7 (b) montre qu'il existe un simplexe X, et un sous-espace H de $A(X)$ fortement réticulé ne contenant pas les constantes, mais tels que $H + \underset{\sim}{R}$ ne soit pas fortement réticulé.

Donnons une caractérisation des fonctions de C, et quelques propriétés de ces fonctions.

THÉORÈME 3.19. - Soient X un simplexe, et f une fonction de $A(X)$; les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est une fonction de C ;

(b) Pour tout λ réel, les ensembles $\{x \in X \; ; \; f(x) \geq \lambda\}$ et $\{x \in X \; ; \; f(x) \leq \lambda\}$ contiennent une plus grande face fermée ;

(c) Pour tout λ réel, les fonctions $\widehat{f \vee \lambda}$ et $\widecheck{f \wedge \lambda}$ sont continues.

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (c). L'espace C est fortement réticulé et contient les constantes, de plus on a remarqué dans le lemme 3.2 que

$$f \sup_C \lambda = \widehat{f \vee \lambda} \qquad \text{et} \qquad f \inf_C \lambda = \widecheck{f \wedge \lambda} \; .$$

Ce qui prouve l'assertion (c).

(c) $\Longrightarrow$ (b). Soit λ un nombre réel, et soit

$$G_\lambda = \{x \in X \; ; \; \widehat{f \vee \lambda} = f\} \; .$$

L'ensemble G_λ est une face fermée, d'après l'hypothèse sur $\widehat{f \vee \lambda}$. Si G' est une face fermée vérifiant $G' \subset \{x \in X \; ; \; f(x) \geq \lambda\}$, on a, pour tout x dans $E(X)$, $f(x) \geq \lambda$, par conséquent $\widehat{f \vee \lambda}(x) = f(x)$, donc $G' \subset G_\lambda$.

La même méthode s'applique pour $\{x \in X \; ; \; f(x) \leq \lambda\}$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) est évident.

PROPOSITION 3.20. - Soit f une fonction de C ; alors $f(E(X))$ est un compact, et pour tout u dans $C(f(E(X)))$, on peut définir une fonction $u \circ f$ dans C. L'espace

$$L = \{u \circ f \; ; \; u \in C(f(E(X)))\}$$

est le plus petit sous-espace fermé fortement réticulé contenant f et les constantes.

Démonstration. - L'espace $\max(X)$ est quasi-compact d'après [8], et $f_{|\max(X)}$ est continue par hypothèse ; par suite, $f(E(X))$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Soit u une fonction de $C(f(E(X)))$; l'application $u \circ f$ restreinte à $\max(X)$ est continue, par conséquent, elle admet un prolongement unique en une fonction affine continue sur X. Ce prolongement est noté $\widehat{u \circ f}$.

L'espace

$$L = \{\widehat{u \circ f} \; ; \; u \in C(f(E(X)))\}$$

est fortement réticulé.

En effet, soient u_1 et u_2 deux fonctions de $C(f(E(X)))$; il est clair que les fonctions $\widehat{u_1 \circ f} \sup_{A(X)} \widehat{u_2 \circ f}$ et $\widehat{(u_1 \vee u_2) \circ f}$ coïncident sur $E(X)$, on conclut grâce à la proposition 3.3. Soit H un sous-espace fortement réticulé contenant la fonction f et les constantes. Pour tout λ réel, la fonction $\widehat{f \vee \lambda}$ est dans H ; or, avec les notations précédentes, $\widehat{f \vee \lambda} = \widehat{(u_0 \vee \lambda) \circ f}$, où u_0 désigne l'application identité définie sur $f(E(X))$. Par induction, on déduit que, pour toute fonction u affine par morceaux, la fonction $\widehat{u \circ f}$ est dans H. Par application du théorème de Weierstrass-Stone, on conclut que L est inclus dans $\overline{H}$.

Nous allons maintenant étudier le centre d'un M-espace sans unité.

Rappelons un résultat d'EFFROS [9] qui nous sera utile dans la suite.

LEMME 3.21. - Soit E un M-espace (sans unité) ; $\max(E)$ est le quotient de $\overline{E(P(E))} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence suivante :

$x \sim y$ si, et seulement s'il existe λ dans $\mathbb{R}_+$, tel que

$$x = \lambda y \; .$$

Le centre C de E est l'espace des fonctions f de E, telles que $f_{|\overline{E(P(E))} \setminus \{0\}}$ appartienne à $C(\max(E))$.

Le théorème 3.22 a été obtenu lors d'une discussion avec MM. GOULLET de RUGY et ROGALSKI.

THÉORÈME 3.22. - Soient $A = \overline{E(P(E))} \setminus E(P(E))$, et u l'application définie par $u(x) = x/\|x\|$; alors C est isomorphe pour l'ordre et pour la norme à l'espace des fonctions définies continues sur $E(P(E)) \setminus \{0\}$ et nulles sur $\overline{u(A)}$.

Démonstration. - Soit f une fonction du centre C ; montrons que f est nulle sur $\overline{u(A)}$; il suffit, en fait, de montrer qu'elle est nulle sur $u(A)$.

Soit x dans $u(A)$; il existe y dans $\overline{E(P(E))} \setminus E(P(E))$, et $0 < \lambda < 1$, tels que $y = \lambda x$.

Le point y étant dans $\overline{E(P(E))}$, il existe une famille filtrante $(x_i)_{i\in I}$ qui converge faiblement vers y . D'après le lemme 3.21, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est convergente vers x pour la topologie de $\max(E)$. Par suite,

$$f(x) = \lim_i f(x_i) \qquad \text{et} \qquad f(y) = \lim_i f(x_i) \quad ,$$

donc $f(x) = f(y)$, mais d'autre part $f(y) = \lambda f(x)$, par conséquent $f(x) = 0$.

Inversement, soit f définie continue sur $E(P(E)) \setminus \{0\}$, nulle sur $\overline{u(A)}$; montrons qu'il existe un prolongement unique de f en une fonction de C .

L'ensemble $\overline{u(A)} \cap (E(P(E)) \setminus \{0\})$ est un fermé de $\max(E)$. En effet, $\overline{u(A)} \cup \{0\}$ est un fermé stable (définition 2.3), d'après la proposition 2.4, $F = c(\overline{u(A)} \cup \{0\})$ est une face fermée, et on a

$$E(F) \subset (\overline{u(A)} \cup \{0\}) \cap E(P(E)) \quad .$$

Par suite,

$$E(F) \setminus \{0\} = \overline{u(A)} \cap (E(P(E)) \setminus \{0\}) \quad .$$

L'ensemble

$$W = (E(P(E)) \setminus \{0\}) \setminus (\overline{u(A)} \cap E(P(E)) \setminus \{0\})$$

est un ouvert facial ; et, d'après le lemme 3.21, les topologies faciales et faibles coïncident sur W .

Soit g le prolongement de f à $\overline{E(P(E))}$, défini par $g(0) = 0$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{E(P(E))} \setminus E(P(E))$. La fonction ainsi définie est continue sur $\overline{E(P(E))}$, et telle que $\mu_x(g) = g(x)$ pour tout x dans $\overline{E(P(E))}$. La fonction g se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ de E [9]. Pour montrer que $\tilde{f}$ est dans C , il suffit de montrer que $\tilde{f}_{|W} = f_{|W}$ est facialement continue ; or c'est bien le cas, d'après ce qui précède.

D'après le principe du maximum de Bauer, l'application $f \to \tilde{f}$ est un isomorphisme pour l'ordre et pour la norme ; ce qui établit le théorème.

Rappelons la définition suivante.

DÉFINITION 3.23. – <u>Un idéal d'ordre est un sous-espace I de E positivement engendré, tel que I_+ soit une face de E_+ .</u>

COROLLAIRE 3.24. – <u>Le centre de E est un idéal d'ordre fermé.</u>

En effet, le centre C s'identifie à l'espace des fonctions de E s'annulant sur la face fermée $F = \overline{c(\overline{u(A)} \setminus \{0\})}$.

On appelle C-idéal, tout idéal d'ordre de E isomorphe pour l'ordre et pour la norme à l'espace des fonctions continues sur un espace localement compact, nulles à l'infini.

THÉORÈME 3.25. - Le centre de E est le plus grand C-idéal inclus dans E . L'espace W , muni de la trace de la topologie $\max(E)$, est localement compact.

Démonstration. - Pour montrer que C est un C-idéal, il suffit de montrer que toute fonction de C est continue sur $\max(C)$ ([9]). Or, d'après EFFROS [8], $\max(C)$ est homéomorphe à W muni de la trace de $\max(E)$.

Soit I un C-idéal de E ; pour montrer l'inclusion de I dans C , il suffit de montrer que toute fonction de I est nulle sur F .

Supposons le contraire : il existe un point x de $u(A)$, et une fonction f de I , tels que $f(x) \neq 0$. Mais alors la méthode utilisée dans le théorème 3.22 montre que f n'est pas continue sur $\max(I)$, ce qui contredit le fait que I est un C-idéal.

Le centre C étant un C-idéal, $\max(C)$ est un espace localement compact ; or, on a remarqué que $\max(C)$ est homéomorphe à W . Ce qui établit la deuxième partie du théorème.

COROLLAIRE 3.26. - Soient f une fonction de C , et g une fonction de E ; il existe une fonction de C qui coïncide avec le produit $f.g$ sur $E(P(E))$.

Inversement, soit f une fonction de E telle que, pour tout g dans E , il existe un élément de E qui coïncide avec $f.g$ sur $E(P(E))$. Alors f est une fonction de C .

Démonstration. - On déduit la première partie de [9] et du théorème 3.22.

Inversement, soit x dans $u(A)$, tel que $f(x) \neq 0$; il existe une fonction g dans E , telle que $g(x) \neq 0$. Le point x étant dans $u(A)$, il existe une famille filtrante $(x_i)_{i\in I}$ dans $E(P(E))$ convergeant vers un point y tel que $y = \lambda x$ (avec $0 < \lambda < 1$). Par suite,

$$\lambda f(x) = f(y) = \lim f(x_i)$$

et

$$\lambda g(x) = g(y) = \lim g(x_i) \quad .$$

Comme le produit $f.g$ est défini dans E , on a

$$(f.g)(y) = \lim f(x_i).g(x_i) \quad ,$$
$$(f.g)(y) = \lambda\, f(x).g(x) \quad .$$

Or ceci est impossible, puisque λ est différent de 0 et de 1 ; d'où la contradiction cherchée.

COROLLAIRE 3.27. - Un M-espace est un C-espace si, et seulement si, pour tout x dans $E(P(E)) \setminus \{0\}$, il existe une fonction du centre de E qui ne s'annulle pas en x.

Démonstration. - La condition est nécessaire, puisqu'un C-espace est identique à son centre.

Inversement, si elle est vérifiée, la face F (théorème 3.22) est réduite à 0. L'espace E est alors un C-espace.

Il est faux qu'un espace simplicial sans unité, dont le centre est un idéal d'ordre vérifiant le corollaire 3.26, soit un M-espace. Il suffit de prendre pour espace simplicial le sous-espace des fonctions nulles en 1 de l'espace H introduit dans l'exemple 6.5.4.

COROLLAIRE 3.28. - Soit K un convexe compact. Tout sous-espace fortement réticulé et fermé de $A(K)$ contient un plus grand C-idéal d'ordre.

Ce qui précède nous permet d'introduire et préciser la notion de centre C_H d'un sous-espace H fortement réticulé fermé dans $A(K)$.

THÉORÈME 3.29. - Si H est un sous-espace fortement réticulé, fermé et séparable dans $A(K)$, il admet C_H comme facteur direct.

Démonstration. - Il suffit de montrer qu'un M-espace séparable admet son centre comme facteur direct.

Soit E un tel espace ; le simplexe $P(E)$ est métrisable, et la face F (théorème 3.22) est une face G_δ. D'après un théorème de Lazar ([16]), il existe une rétraction affine continue r de K sur F, qui coïncide avec l'identité sur F. L'application $f \to f \circ r$ de $A_0(F)$ **dans** E est une isométrie positive sur un sous-espace G de E. Toute fonction f de E s'écrit

$$f = (f_{|F} \circ r) + (f - f_{|F} \circ r) \quad ,$$

où $(f_{|F} \circ r)$ est dans G, et $(f - f_{|F} \circ r)$ dans C. D'autre part, $G \cap C = \{0\}$.

Par suite, E est somme directe (algébrique) de G et C. Ces deux espaces étant fermés, on déduit du théorème des homomorphismes de Banach que E est somme directe topologique de C et G.

Remarquons que cette somme directe n'est pas une somme ordonnée et, en général, il n'existe pas de relations simples (non triviales) entre la norme de f et celles de $(f_{|F} \circ r)$ et $(f - f_{|F} \circ r)$.

4. Tribu de Baire de $\max(X)$.

Dans la suite, on notera $\mathfrak{A}$ l'espace de toutes les fonctions affines définies sur un simplexe compact X. Si f et g sont deux fonctions de $\mathfrak{A}$, on note $f \sup_{\mathfrak{A}} g$ (resp. $f \inf_{\mathfrak{A}} g$) la borne supérieure (resp. inférieure) de f et g dans l'espace $\mathfrak{A}$ (si elle existe).

Dans ce paragraphe, X désigne un simplexe compact.

DÉFINITION 4.1. - Soient K un convexe compact, et f une fonction affine sur K; la fonction f vérifie le calcul barycentrique, si elle est universellement intégrable, et si, pour toute mesure μ de $M_+^1(K)$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\mu(f) = f(b(\mu)) .$$

LEMME 4.2. - Soient f et g deux fonctions définies sur X, vérifiant le calcul barycentrique ; alors $f \sup_{\mathfrak{A}} g$ et $f \inf_{\mathfrak{A}} g$ existent, et pour tout x dans X, les égalités suivantes sont vérifiées :

(a) $$f \sup_{\mathfrak{A}} g(x) = \mu_x(f \vee g) = \sup\{\lambda f(y) + (1 - \lambda)\, g(z) \ ; \ x = \lambda y + (1 - \lambda) z\} ;$$

(b) $$f \inf_{\mathfrak{A}} g(x) = \mu_x(f \wedge g) = \inf\{\lambda f(y) + (1 - \lambda)\, g(z) \ ; \ x = \lambda y + (1 - \lambda) z\} .$$

Démonstration. - Il suffit de montrer l'existence de $f \sup_{\mathfrak{A}} g$, ainsi que les égalités (a), le cas $\inf_{\mathfrak{A}}$ et (b) étant similaires.

Les deux fonctions f et g étant universellement intégrables, il en est de même de $f \vee g$. Par suite, l'application $x \to \mu_x(f \vee g)$ de X dans $\mathbb{R}$ est définie et affine.

Soient

$$A_1 = \{x \in X \ ; \ f(x) \geqslant g(x)\} ,$$

$$A_2 = \{x \in X \ ; \ f(x) < g(x)\} .$$

On note μ_i la restriction de μ à A_i $(i = 1 , 2)$; alors

(i) $$\mu_x = \mu_1 + \mu_2 \quad ;$$

l'égalité suivante est vérifiée :

$$\mu_x(f \vee g) = \mu_1(f) + \mu_2(g) \quad .$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer $\mu_x(A_i) \neq 0$;

(ii) $$\mu_x(f \vee g) = \mu_x(A_1).\mu_1(f)/\mu_x(A_1) + \mu_x(A_2).\mu_2(g)/\mu_x(A_2) \quad .$$

Si x_i désigne le barycentre de $\mu_i/\mu_x(A_i)$ $(i = 1\ ,\ 2)$, d'après (i), il est clair que

(iii) $$x = \mu_x(A_1)x_1 + \mu_x(A_2)x_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_x(A_1) + \mu_x(A_2) = 1 \quad .$$

Par suite,

(iv) $$\mu_x(f \vee g) = \mu_x(A_1)\ f(x_1) + \mu_x(A_2)\ g(x_2) \quad .$$

Soit, par ailleurs, une décomposition quelconque de x ,

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z \quad ,$$

donc

$$\mu_x = \lambda\mu_y + (1 - \lambda)\mu_z \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\mu_x(f \vee g) = \lambda\mu_y(f \vee g) + (1 - \lambda)\ \mu_z(f \vee g) \quad ,$$

$$\mu_x(f \vee g) \geqslant \lambda f(y) + (1 - \lambda)\ g(z) \quad .$$

Cette inégalité, comparée avec (iv), entraîne la deuxième partie de (a).

Soit h une fonction affine définie sur X , majorant f et g ; d'après (iii),

$$h(x) = \mu_x(A_1)\ h(x_1) + \mu_x(A_2)\ h(x_2)$$

$$\geqslant \mu_x(A_1)\ f(x_1) + \mu_x(A_2)\ g(x_2) \quad ,$$

d'où

$$h(x) \geqslant \mu_x(f \vee g) \quad .$$

Par conséquent,

$$f\ \sup_{\mathfrak{a}} g(x) = \mu_x(f \vee g) \quad .$$

Notons que le lemme précédent n'affirme pas que l'application $f\ \sup_{\mathfrak{a}} g$ vérifie le calcul barycentrique.

Le lemme 4.2 a été démontré sous une forme un peu différente par ALFSEN dans [1], dans le cas d'un simplexe métrisable.

COROLLAIRE 4.3. - *Si* f *et* g *sont deux fonctions s. c. s. (resp. s. c. i.) définies sur* X , *l'application* $f\ \sup_{\mathfrak{a}}\ g$ (*resp.* $f\ \inf_{\mathfrak{a}}\ g$) *est s. c. s. (resp. s. c. i.), et coïncide avec* $f \vee g$ (*resp.* $f \wedge g$).

La démonstration de ce corollaire est déduite du lemme précédent, en remarquant qu'une fonction s. c. s. (resp. s. c. i.) vérifie le calcul barycentrique.

Dans la suite, on aura besoin du résultat de G. CHOQUET [3].

LEMME 4.4.

(a) *Soit* K *un convexe compact ; toute fonction sur* K *vérifiant le calcul barycentrique est bornée.*

(b) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* K , *vérifiant le calcul barycentrique, et qui converge simplement vers une fonction* f . *Alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée, et* f *vérifie le calcul barycentrique.*

On note L le plus petit espace de fonctions contenant C , et stable par limite simple de suites. Remarquons que les fonctions de L sont bornées, et vérifient le calcul barycentrique (d'après le lemme 4.4).

PROPOSITION 4.5. - *L'espace* L *est réticulé pour son ordre propre, et pour tout* x *dans* X , *les égalités suivantes sont vérifiées* :

(a) $i\ \sup_L\ g(x) = \mu_x(f \vee g)$;
(b) $f\ \inf_L\ g(x) = \mu_x(f \wedge g)$.

Démonstration. - Soient f et g dans L , on note $S(f\ ;\ g)$ la fonction $x \to \mu_x(f \wedge g)$; il suffit de prouver que $S(f\ ;\ g)$ est dans L , pour tout couple f et g ; on pourra conclure grâce au lemme 4.2 et à la proposition 1.3.

Par conséquent, si f est une fonction de L , et si on pose

$$N(f) = \{g \in L\ ;\ \ S(f\ ;\ g) \in L\} \ ,$$

il suffit de prouver $L \subset N(f)$, pour tout f dans L .

L'ensemble $N(f)$ est stable par limites simples de suites : en effet, soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $N(f)$, convergeant simplement vers une fonction g ; la suite (g_n) est uniformément bornée, grâce au lemme 4.4, et

$$f \vee g = \lim(f \vee g_n) \ .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\mu_x(f \vee g) &= \mu_x(\lim(f \vee g_n)) \\ &= \lim(\mu_x(f \vee g_n))\end{aligned}$$

(d'après le théorème de Lebesgue). La suite $S(f\ ;\ g_n)$ converge vers $S(f\ ;\ g)$; par suite, cette fonction est dans L. L'ensemble $N(f)$ est donc stable par limites simples de suites.

Montrons l'inclusion $C \subset N(f)$, pour tout f dans L. Cette démonstration se fait par récurrence transfinie sur la classe de f :

Supposons f dans C, et soit g une fonction de C ; la fonction $S(f\ ;\ g)$ est dans C, grâce aux lemmes 3.2 et 3.10.

Soit α un ordinal donné ; on suppose que, pour toute fonction h de classe β $(\beta < \alpha)$, on ait $C \subset N(h)$. Soient f une fonction de L de classe α, et g dans C. Alors il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans L, telle que h_n soit de classe β_n $(\beta_n < \alpha)$ pour tout entier n. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée (lemme 4.4), et

$$\mu_x(f \vee g) = \mu_x(\lim(h_n \vee g))$$

$$= \lim(\mu_x(h_n \vee g)) \ .$$

Par hypothèse de récurrence, $S(h_n\ ;\ g)$ est dans L, il en est donc de même pour $S(f\ ;\ g)$; par suite, $C \subset N(f)$.

Cette dernière inclusion, jointe au fait que $N(f)$ est stable par limites simples de suites, entraîne que $L \subset N(f)$, pour tout f dans L.

C. Q. F. D.

DÉFINITION 4.6. - <u>Un espace vectoriel ordonné</u> E <u>est dit</u> dénombrablement réticulé, <u>si, pour toute partie dénombrable majorée (resp. minorée), il existe une borne supérieure (resp. inférieure)</u>.

COROLLAIRE 4.7. - <u>L'espace</u> L <u>est dénombrablement réticulé, et, pour toute suite majorée dans</u> L, <u>les deux fonctions "borne supérieure" et "enveloppe supérieure" coïncident sur</u> $E(X)$. <u>On a la propriété duale pour les bornes inférieures.</u>

<u>Démonstration</u>. - Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite majorée de fonctions de L ; pour tout entier n, on pose $g_n = \sup(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Cette fonction existe, d'après la proposition 4.5. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par hypothèse ; par suite, elle converge vers une fonction notée f. Cette fonction est dans L, et c'est la borne supérieure de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, soit h une fonction de L qui majore f_n pour tout n ; par suite, $h \geqslant g_n$ pour tout entier n, ce qui entraîne $h \geqslant f$.

Grâce à la construction de f, pour tout x dans $E(X)$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup(g_n(x)\ ,\ n \in \mathbb{N}) \\ &= \sup(f_1(x)\ ,\ \dots\ ,\ f_n(x)\ ,\ n \in \mathbb{N}) \\ &= \sup(f_n(x)\ ,\ n \in \mathbb{N})\ . \end{aligned}$$

Ce qui démontre la deuxième partie du corollaire.

On rappelle la définition d'un simplexe standard.

DÉFINITION 4.8. - Un simplexe X est standard, si $E(X)$ est universellement mesurable et porte toutes mesures maximales.

On note $B(\max(X))$ l'espace des fonctions bornées de Baire sur $\max(X)$, c'est-à-dire le stabilisé de $C(\max(X))$ par limites simples de suites bornées convergentes.

PROPOSITION 4.9.

(a) Si f est une fonction de L , alors $f_{|E(X)}$ est une fonction de $B(\max(X))$.

(b) Soient X un simplexe standard, et f une fonction de $B(\max(X))$; la fonction définie par $\tilde{f}(x) = \mu_x(f)$ est une fonction de L prolongeant f , telle que l'opérateur $T : f \to \tilde{f}$ soit une bijection et une isomorphie d'ordre de $B(\max(X))$ sur L et inverse de l'opérateur restriction à $E(X)$.

Démonstration.

(a) Par définition de C , toute fonction f de C est telle que $f_{|E(X)}$ appartienne à $C(\max(X))$; il est facile de vérifier (a) par un argument de récurrence transfinie.

(b) Soit X un simplexe ; l'inclusion $B(\max(X)) \subset B(E(X))$ étant claire, toute fonction de $B(\max(X))$ est universellement intégrable. Par suite, si on suppose que X est standard, l'application $x \to \mu_x(f)$ a un sens.

Pour montrer que f est une fonction de L , on utilise de nouveau un argument de récurrence transfinie.

Il est clair que $\tilde{f}$ est un prolongement de f . L'opérateur $f \to \tilde{f}$ est surjectif de $B(\max(X))$ sur L , d'après (a) ; il est injectif, car les fonctions de L vérifient le calcul barycentrique. Il est simple de vérifier que c'est aussi un isomorphisme d'ordre.

DÉFINITION 4.10. - Une partie A de X est une L-face, si elle est L-exposée, c'est-à-dire, si on peut trouver une fonction f dans L_+ , telle que $A = f^{-1}(0)$.

On rappelle que, si A est une face d'un simplexe X, il existe une plus grande face disjointe de A (notée A'), dite face complémentaire de A.

Le lemme suivant est démontré dans [14] sous des hypothèses assez larges, mais l'énoncé que nous en donnons est suffisant pour notre propos.

LEMME 4.11. - Soit A une L-face ; alors les équivalences suivantes sont vérifiées :

(a) $(x \in A) \iff (\mu_x(A) = 1)$;

(b) $(x \in A') \iff (\mu_x(A) = 0)$.

PROPOSITION 4.12.

(a) La classe des L-faces est stable par intersections dénombrables et enveloppes convexes finies.

(b) Si X est un simplexe standard, la face complémentaire d'une L-face est une L-face.

L'application $A \to E(A)$ est une bijection entre la classe des L-faces et la tribu de Baire de $\max(X)$.

Démonstration.

(a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de L-faces telles que, pour tout n, on ait

$$A_n = f_n^{-1}(0) , \qquad \text{où } f_n \in L_+ .$$

Les fonctions f_n sont bornées, d'après le lemme 4.4 (a) ; par suite,

$$f = \sum_n 2^{-n} \frac{f_n}{\|f_n\|}$$

est une fonction de L_+.

Il est simple de vérifier que $\bigcap_n A_n = f^{-1}(0)$; c'est une L-face. Soient A_1 et A_2 deux L-faces associées à deux fonctions f_1 et f_2 de L_+. Il suffit de montrer que

$$c(A_1 \cup A_2) = (f_1 \inf_L f_2)^{-1}(0) .$$

Or ceci résulte du lemme 4.2 (b).

(b) Supposons que X est standard, et que A est une L-face non vide ; d'après la proposition 4.9 (b), $E(A) = A \cap E(X)$ est un ensemble non vide de la tribu de Baire de $\max(X)$. Soient $1_{E(A)}$ la fonction caractéristique de $E(A)$, et $\tilde{1}_{E(A)}$

le prolongement défini dans la proposition 4.9 ; alors $A' = (\widetilde{1}_{E(A)})^{-1}(0)$. En effet,

$$(\widetilde{1}_{E(A)})^{-1}(0) \cap A = \emptyset \quad ,$$

grâce au lemme 4.11 (a) ; de plus, d'après la première partie,

$$c((\widetilde{1}_{E(A)})^{-1}(0) \cup A) = \widetilde{1}_{E(A)} \inf_L (1 - \widetilde{1}_{E(A)})^{-1}(0) = X \quad .$$

Par suite, $(\widetilde{1}_{E(A)})^{-1}(0)$ est la face complémentaire de A , et c'est, bien entendu, une L-face.

Soit B un ensemble de la tribu de Baire de $\max(X)$; il est clair que

$$B = E((1 - \widetilde{1}_B)^{-1}(0)) \quad .$$

Il reste à prouver que $A \to E(A)$ est injective ; or ceci résulte du lemme 4.11.

On notera la ressemblance entre les propositions 4.5, 4.9, et 4.12 de cet exposé et les résultats d'ALFSEN dans [1].

Pour conclure cette partie, donnons un critère généralisant un résultat d'EFFROS [8] pour qu'un simplexe X soit un simplexe de Bauer.

Notons $\mathcal{H}$ le stabilisé de $A(X)$ par limites simples de suites ; alors, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 4.13. - <u>Avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $C = A(X)$;

(b) $A(X) \subset L$;

(c) $\mathcal{H} \subset L$;

(d) X <u>est un simplexe de Bauer</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il est simple de vérifier (d) $\Longrightarrow$ (a) $\Longrightarrow$ (b) et (b) $\Longrightarrow$ (c) ; (c) $\Longrightarrow$ (a) est une conséquence de la proposition 3.10.

5. Frontière de Choquet et frontière de Šilov d'un M-espace.

Nous étudions, dans cette partie, les "frontières" de Choquet et de Šilov associées à un sous-espace de $A(X)$, où X est un simplexe compact. Les sous-espaces considérés n'étant pas nécessairement séparant, nous introduisons la notion de "pseudo-frontière".

Soient K un espace compact, et H un sous-espace de $C(K)$; on note φ le plongement canonique de K dans H', défini par

$$\varphi(k)(f) = f(k) , \qquad \text{pour tout } f \text{ dans } H .$$

Il est clair que $\varphi(k)$ est une forme linéaire positive, de norme inférieure ou égale à 1.

Soit

$$P(H) = \{\ell \in H' ; \ \ell \geqslant 0 , \ \|\ell\| \leqslant 1\} .$$

DÉFINITION 5.1. - Avec les notations précédentes, définissons l'ensemble $\partial_C(H)$ des points k de K tels que $\varphi(k)$ soit un point extrémal non nul de $P(H)$. L'ensemble $\partial_C(H)$ est appelé pseudo-frontière de Choquet.

DÉFINITION 5.2. - Soient K un compact, et H un sous-espace. $F \subset K$ est H-maximisant, si, pour toute fonction f de H, il existe un point k de F, tel que $|f(k)| = \|f\|$. S'il existe un plus petit ensemble fermé saturé et H-maximisant, il est dit pseudo-frontière de Šilov.

PROPOSITION 5.3. - Soient K un espace compact, et H un sous-espace de $\varphi(K)$ qui soit un espace simplicial ; alors $\overline{c(\varphi(K) \cup \{0\})} = P(H)$. En particulier, $\partial_C(H)$ est non vide.

Démonstration. - Soit $X = M_+^1(K)$; l'espace H s'identifie à un sous-espace de $A(X)$ qui soit un espace simplicial pour l'ordre et la norme induits. Notons π le prolongement naturel de φ à $c(X \cup \{0\})$; d'après le théorème 3.7, on a

$$\pi(c(X \cup \{0\})) = P(H) .$$

Il suffit donc de montrer l'égalité

$$\pi(c(X \cup \{0\})) = \overline{c(\varphi(K) \cup \{0\})} .$$

Or K s'identifie à $E(X)$, et φ à la trace de π sur $E(X)$; par suite,

$$\begin{aligned} \overline{c(\varphi(K) \cup \{0\})} &= \overline{c(\pi(E(X)) \cup \{0\})} \\ &= \pi(\overline{c(E(X) \cup \{0\})}) \\ &= \pi(c(X \cup \{0\})) . \end{aligned}$$

Grâce au théorème de Krein-Milman, $\partial_C(H)$ n'est pas vide.

Pour une généralisation, nous renvoyons à la remarque 6.8.

PROPOSITION 5.4. - Soient K un compact, et H un sous-espace de $C(K)$ qui soit un espace simplicial ; alors la pseudo-frontière de Šilov est l'adhérence de la pseudo-frontière de Choquet.

Démonstration. - Soit F un fermé saturé et H-maximisant dans K, et supposons $\partial_C(H) \not\subset F$. Il existe donc un point k de K, tel que

$$\varphi(k) \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(k) \in E(P(H)) \setminus \varphi(F) .$$

L'ensemble $\varphi(F)$ étant compact, et le point $\varphi(k)$ étant extrémal, il existe (d'après le théorème d'Edwards) une fonction positive f dans $A_0(P(H))$, telle que

$$\begin{aligned} \|f\| = f(\varphi(k)) &> \sup\{f(q) \; ; \; q \in \varphi(F)\} \\ &> \sup\{f(y) \; ; \; y \in F\} = \|f\| . \end{aligned}$$

D'où la contradiction recherchée ; par suite, $\overline{\partial_C}$ est la pseudo-frontière de Šilov de H.

Soient X un simplexe compact, et H un sous-espace de $A(X)$ qui soit un M-espace pour l'ordre et la norme induits par $A(X)$. On identifie H à l'espace $A_0(P(H))$, et on note π l'application canonique de $c(X \cup \{0\})$ sur $P(H)$. On rappelle que $E(H'_+)$ désigne l'ensemble des génératrices extrémales de H'_+. En général, l'inclusion $\pi(E(X)) \subset E(H'_+) \cap P(H)$ est fausse en vertu du théorème 3.8.

THÉORÈME 5.5. - <u>Soit</u> H <u>un sous-espace de</u> $A(X)$ <u>qui soit un</u> M-<u>espace ; il existe une plus grande face fermée</u> F <u>dans</u> X, <u>vérifiant les trois propriétés suivantes</u> :

(a) <u>L'espace des restrictions à</u> F <u>des fonctions de</u> H <u>est un sous-espace de</u> $A(F)$ <u>fortement réticulé</u> ;

(b) π, <u>restreinte à</u> $c(F \cup \{0\})$, <u>est surjective sur</u> $P(H)$;

(c) <u>Toute fonction de</u> H <u>atteint son maximum sur</u> F.

Démonstration.

(a) Soit $A = \pi^{-1}(E(H'_+) \cap P(H)) \cap E(X)$; pour montrer que $F = \overline{c(A)}$ est une face fermée, il suffit de montrer que $E(F) \subset E(X)$, en vertu de la proposition 2.1. Comme H est un M-espace, $E(H'_+) \cap P(H)$ est faiblement fermé ([9]) ; par suite, $E(F) \subset \pi^{-1}(E(H'_+) \cap P(H))$.

Soient x un point de $E(F)$, et G_x la génératrice extrémale contenant x ; alors $G = \pi^{-1}(G_x)$ est une face fermée de X. Par conséquent $E(G) \subset E(X)$, donc

$$E(G) \subset \pi^{-1}(E(H'_+) \cap P(H)) \cap E(X) ,$$

par suite $G \subset F$. Le point x extrémal dans F est extrémal dans G ; par conséquent, x est dans $E(X)$.

Soient H_F l'espace des restrictions à F des fonctions de H , et j l'injection canonique de F dans X ; l'application $\pi \circ j$ vérifie

$$\pi \circ j(E(F)) \subset E(H'_+) \cap P(H) \quad .$$

Montrons que les deux simplexes $P(H_F)$ et $P(H)$ sont affinement homéomorphes. En effet, l'application $f \to f_{|F}$ est une isométrie et une isomorphie d'ordre de H sur H_F . Soit f une fonction de H , elle s'écrit $f = f_1 \circ \pi$ où $f_1 \in A_0(P(H))$ et $\|f\| = \|f_1\|$. Il existe un point $p \neq 0$ extrémal dans $P(H)$, tel que

$$|f_1(p)| = \|f_1\| \quad ;$$

mais alors, $\pi^{-1}(p)$ est une face fermée de X , d'après la remarque suivant le théorème 3.7. Par conséquent $\|f_{|F}\| = \|f\|$.

L'application $f \to f_{|F}$ est évidemment positive. Inversement, soit h une fonction positive de H_F , elle s'écrit $h = h_1 \circ \pi \circ j$ où $h_1 \in A_0(P(H))$.

La fonction h étant positive, h_1 est positive sur $E(H'_+) \cap P(H)$, elle est donc positive sur $P(H)$, grâce au principe du maximum de Bauer.

Le sous-espace H_F étant égal à $A_0(P(H)) \circ \pi \circ j$, il est fortement réticulé, d'après le théorème 3.8.

Les points (b) et (c) sont des conséquences du théorème 3.7 et du principe du maximum de Bauer.

Soient F' une face de X vérifiant (a), (b), (c), et H_F l'espace des restrictions à F' des fonctions de H . Comparons $P(H_{F'})$ et $P(H)$. L'application restriction $f \to f_{|F}$ est une isométrie et une isomorphie d'ordre de H sur $H_{F'}$. En effet, pour tout $f \in H$, il existe, d'après (c), un point x de X tel que

$$|f(x)| = \|f\| \quad ;$$

par suite, $\|f_{|F'}\| = \|f\|$. L'isomorphie d'ordre se déduit de (b). Par conséquent, les deux simplexes $P(H_{F'})$ et $P(H)$ sont affinement homéomorphes.

D'après l'hypothèse sur $H_{F'}$, on déduit

$$\pi(E(F')) \subset P(H) \cap E(H'_+) \quad ,$$

on a donc $F' \subset F$.

COROLLAIRE 5.6. - <u>Les points extrémaux de</u> F <u>sont les points de</u> $E(X)$ <u>où les fonctions</u> $f \sup_H g$ <u>et</u> $f \vee g$ <u>coïncident, pour tout couple</u> f <u>et</u> g <u>de fonctions de</u> H .

Ce corollaire est une conséquence de la définition 3.1 et du théorème 5.5.

THÉORÈME 5.7. - Soient X un simplexe compact, et H un sous-espace de $A(X)$ réticulé pour son ordre propre et contenant les constantes. Alors :

(a) $\partial_C(H)$ est fermé dans X, et $\partial_C(H) \cap E(X)$ est l'ensemble des points de $E(X)$ où les fonctions $f \sup_H g$ et $f \vee g$ coïncident, pour tout couple f et g de fonctions de H ;

(b) $F = \overline{c(\partial_C(H))}$ est une face fermée de X ; c'est l'unique face fermée contenant $\partial_C(H)$, et telle que l'espace H_F soit un sous-espace fortement réticulé de $A(F)$;

(c) L'espace H_F est un sous-espace du centre de $A(F)$.

Démonstration. - L'espace H contenant les constantes, l'ensemble

$$Y = \{\ell \in P(H) \; ; \; \|\ell\| = 1\}$$

est un simplexe de Bauer, et π est surjective de X sur Y (corollaire 3.9). On a, de plus, les égalités suivantes :

$$\partial_C(H) = \pi^{-1}(E(Y)) \qquad \text{et} \qquad A = \partial_C(H) \cap E(X) \; .$$

Le point (a) se déduit du corollaire 5.6 et des égalités précédentes.

Pour montrer (b), il suffit de prouver l'égalité

$$\overline{c(\partial_C(H))} = \overline{c(\partial_C(H) \cap E(X))} \; .$$

En effet, $\partial_C(H)$ est une réunion de faces fermées ; grâce au théorème de Krein-Milman, on a

$$\partial_C(H) \subset \overline{c(\partial_C(H) \cap E(X))} \; ,$$

d'où l'égalité recherchée.

D'après le théorème 5.5, l'ensemble $F = \overline{c(\partial_C(H))}$ est une face fermée.

Soit F' une face fermée de X contenant $\partial_C(H)$, et telle que $H_{F'}$ soit un sous-espace de $A(F)$ fortement réticulé. D'une part, l'inclusion $F \subset F'$ est claire ; d'autre part, la face F' vérifie les conditions (a), (b) et (c) du théorème 5.5, par conséquent $F' \subset F$: d'où l'égalité.

Pour montrer (c), il suffit de remarquer que l'espace H_F est fortement réticulé dans $A(F)$, et contient les constantes ; d'après le théorème 3.17, H_F est un sous-espace du centre de $A(F)$.

On retrouve ainsi le résultat bien connu suivant.

COROLLAIRE 5.8. - Soient K un espace compact, et H un sous-espace de $C(K)$ contenant les constantes et réticulé pour son ordre propre. Alors $\partial_C(H)$ est fermé, et les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) k est un point de $\partial_C(H)$;

(b) Pour tout couple de fonctions de H, on a

$$f \sup_H g(k) = f \vee g(k) \quad .$$

Démonstration. - Soit X le simplexe $M_+^1(K)$; l'espace H s'identifie à un sous-espace L de $A(X)$ réticulé pour son ordre propre et contenant les constantes. Il est clair que $\partial_C(L) \cap E(X) = \partial_C(H)$; on conclut grâce au théorème 5.7.

6. Exemples et remarques.

Dans ce paragraphe, on construit des exemples qui montrent la limite de validité de certains théorèmes des précédentes parties. Nous utilisons les notations du théorème auquel se rapporte l'exemple sans les rappeler.

EXEMPLE 6.1. - L'hypothèse " X est un simplexe" est fondamentale dans les propositions 2.1 et 2.4, comme le montre l'exemple suivant :

Soit X un carré $(ABCD)$; notons K la diagonale (AC), et D l'ensemble $\{A\} \cup \{C\}$. Les ensembles X, K et D vérifient les conditions des propositions 2.1 et 2.4, pourtant K n'est pas une face.

EXEMPLE 6.2. - Soit K un convexe compact ; la proposition 3.5 montre qu'il existe des sous-espaces de $A(K)$ fortement réticulés maximaux. Il existe un convexe compact K, tel que $A(K)$ contienne deux sous-espaces fortement réticulés contenant les constantes, maximaux, distincts. En effet, prenons pour K un carré $(ABCD)$, et H (resp. G) le sous-espace de $A(K)$ formé des fonctions constantes sur les deux côtés opposés (AB) et (CD) (resp. (AC) et (BD)). Les deux sous-espaces H et G sont fortement réticulés, contiennent les constantes, et engendrent $A(K)$.

REMARQUE 6.3. - La proposition 3.6 montre qu'un sous-espace fortement réticulé est un M-espace. Il existe un simplexe X, et un sous-espace H fortement réticulé de $A(X)$, tel que $P(H)$ ne soit pas un simplexe de Bauer.

Rappelons la définition d'idéal ([8]).

DÉFINITION 6.3.1. - Un sous-espace H d'un espace simplicial E est un idéal, s'il est positivement engendré, et si, pour tout couple f et g dans H, les *inégalités* $f \leq h \leq g$ *entraînent* $h \in H$.

PROPOSITION 6.3.2. - *Soit* X *un simplexe compact ; un idéal fermé de* $A(X)$ *réticulé pour son ordre propre est fortement réticulé.*

Démonstration. - Soient H un idéal fermé réticulé pour son ordre propre, et $H^{\perp}$ la face fermée associée à H . On sait ([8]) que H est identique à l'espace des fonctions de $A(X)$ nulles sur la face H . Si f et g sont deux fonctions de H , la fonction $f \sup_H g$ est donc nulle sur H .

Soit x un point de $E(X)$, tel que $f \sup_H g(x) > f(x) \vee g(x)$; d'après le théorème d'Edwards, il existe une fonction h_x de $A(X)$, telle que

$$f \vee g \leq h_x \leq f \sup_H g \quad \text{et} \quad h_x(x) = f(x) \vee g(x) \quad .$$

La fonction h_x s'annule sur $H^{\perp}$; par suite, elle appartient à H ; d'où la contradiction.

Cette proposition est fausse pour un convexe compact quelconque, comme le montre l'idéal des fonctions affines nulles en un point extrémal d'un carré.

EXEMPLE 6.3.3. - Soit E l'espace des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que $\lim_n x_n = 1/2.(x_1 + x_2)$. Muni de l'ordre produit et de la norme

$$\|(x_n)\| = \sup(|x_n| \ ; \ n \in \mathbb{N}) \quad ,$$

l'espace E est un espace de Banach ordonné. Il est aisé de vérifier que c'est un espace simplicial avec unité ; il s'identifie donc à $A(X)$, où X est le simplexe $\{\ell \in E' \ ; \ \ell \geq 0 \ , \ \|\ell\| = 1\}$. L'ensemble $E(X)$ s'identifie à $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$, définies par

$$\delta_m((x_n)) = x_m \quad .$$

Le simplexe X n'est pas un simplexe de Bauer, puisque

$$\lim_m \delta_m = 1/2.(\delta_1 + \delta_2) \quad ,$$

qui n'est pas un point extrémal.

Soit H le sous-espace de E formé des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_1 = 0$; l'ensemble H est un idéal fermé et réticulé pour son ordre propre.

En effet, si (x_n) et (y_n) sont deux suites de H , la suite $(x_n \vee y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans H , puisque

$$\lim_n x_n = 1/2.x_2 \ , \qquad \lim_n y_n = 1/2.y_2 \ ,$$

et

$$\lim_n (x_n \vee y_n) = 1/2.(x_2 \vee y_2) \ .$$

Le simplexe $P(H)$ n'est pas un simplexe de Bauer, car $E(P(H))$ s'identifie à $(\varepsilon_m)_{m\geq 2}$ où $\varepsilon_m((x_n)) = x_m$, et il est clair que $\lim_m \varepsilon_m = 1/2.\varepsilon_2$, qui n'est pas un point extrémal.

EXEMPLE 6.4. – Les hypothèses du théorème 3.8 n'entraînent pas l'inclusion $\pi(E(K)) \subset E(P(H))$.

Soient K le simplexe $M_+^1([0\ ,\ 1])$, et H le sous-espace de $A(K)$ formé des applications de la forme $\mu \to \mu(f)$, où f est affine sur $[0\ ,\ 1]$, nulle en 0 .

L'espace H est fortement réticulé, un point de $E(K)$ est de la forme ε_t où $t \in [0\ ,\ 1]$, et on a

$$\|\pi(x)\| = \sup\{|f(\varepsilon_t)| \ ; \ \|f\| \leq 1 \ , \ f \text{ affine sur } [0\ ,\ 1] \text{ et nulle en } 0\} \ .$$

Par suite, $\pi(E(K))$ s'identifie au segment $[0\ ,\ 1]$ considéré comme chapeau universel du cône $\mathbb{R}_+$.

EXEMPLE 6.5. – On peut construire deux simplexes compacts X et Y , non affinement homéomorphes, bien que $\max(X)$ et $\max(Y)$ soient homéomorphes, et que $E(X)$ et $E(Y)$ munis des structures uniformes induites soient isomorphes.

Pour donner cet exemple, nous avons besoin de préciser la topologie des faces pour une classe particulière de simplexes.

DÉFINITION 6.5.1. – Un simplexe X est dit de classe P , s'il vérifie :

(a) $\overline{E(X)} \setminus E(X)$ est réduit à un point noté x_0 ;

(b) $E(X)$ porte toute mesure maximale.

Soient X un simplexe de classe P , μ_{x_0} la mesure maximale de barycentre x_0 , et S_{x_0} son support. Pour toute partie K dans $E(X)$, on note $\overline{K}^\sigma$ son adhérence faible dans X , et $\overline{K}^\tau$ son adhérence dans $\max(X)$.

PROPOSITION 6.5.2. – Soient X un simplexe de classe P , et $K \subset E(X)$:

(a) Si $x_0 \notin \overline{K}^\sigma$, alors $\overline{K}^\tau = \overline{K}^\sigma$;

(b) Si $x_0 \in \overline{K}^\sigma$, alors $\overline{K}^\tau = (\overline{K}^\sigma \cup S_{x_0}) \cap E(X)$.

Le sous-espace $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions de $A(X)$ constantes sur S_{x_0} .

Démonstration. - Si l'hypothèse (a) est vérifiée, l'ensemble $\overline{K^\sigma}$ est un compact stable ; on conclut d'après 2.5.

Si l'hypothèse (b) est vérifiée, le compact $\overline{K^\sigma} \cup S_{x_0}$ est stable, et on conclut d'après 2.4.

La caractérisation de C se déduit de la topologie de $\max(X)$.

Rappelons le résultat suivant.

PROPOSITION 6.5.3. - Soient K un espace compact, $k_1 , \ldots , k_n$ une suite finie de points de K , et $\mu_1 , \ldots , \mu_n$ une suite finie de mesures de $M_+^1(K)$ non ponctuelles et ne chargeant pas les points $x_1 , \ldots , x_n$. On note

$$H = \{f \in C(K) \ ; \ \mu_i(f) = f(x_i) \ , \ i = 1 , \ldots , n\} \ .$$

L'espace H est un espace simplicial avec unité.

Démonstration. - Soit l'application $k \to \mu_k$ de K dans $M_+^1(K)$, définie comme suit :

- Si $k \neq k_i$, $\mu_k = \varepsilon_k$;
- Si $k = k_i$, $\mu_k = \mu_i$.

Cette application vérifie les conditions du théorème 10 de [10].

La proposition précédente a été généralisée par GLEIT dans sa thèse ([12]).

Nous pouvons maintenant construire l'exemple suivant.

EXEMPLE 6.5.4. - Soient λ la mesure de Lebesgue sur $[0 , 1]$, et

$$H = \{f \in C([0 , 1]) \ ; \ \lambda(f) = f(0)\}$$

et

$$G = \{f \in C([0 , 1]) \ ; \ \frac{f(1) + \lambda(f)}{2} = f(0)\} \ .$$

Soient φ (resp. ψ) le plongement canonique de $[0 , 1]$ dans H' (resp. G'), et $X = \overline{c(\varphi([0 , 1]))}$ (resp. Y où $Y = \overline{c(\psi([0 , 1]))}$).

On démontre que X et Y sont des simplexes de classe P .

D'après la proposition 6.5.2, $\max(X)$ et $\max(Y)$ sont homéomorphes.

Les espaces $E(X)$ et $E(Y)$ sont isomorphes, car ils sont isomorphes à $]0 , 1]$.

Si π est une homéomorphie affine de X sur Y , on a

$$\pi(\mu_{\varphi(0)}) = \mu_{\psi(0)} \ ;$$

or ceci est impossible car $\mu_{\psi(0)}$ est diffuse, alors que $\mu_{\psi(0)}$ charge le point $\psi(1)$.

EXEMPLE 6.6. - L'espace $\max(X)$ peut ne pas être un espace de Baire.

En effet, prenons de nouveau le simplexe de l'exemple précédent ; soit la suite d'ouverts $\omega_n = \varphi\left(\left]0 , \frac{1}{n}\right[\right)$. D'après 6.5.2, ω_n est un ouvert dense dans $\max(X)$ pour tout entier n , pourtant $\bigcap_n \omega_n$ est vide ; $\max(X)$ est donc de première catégorie.

REMARQUE 6.7.

(a) Soit X un simplexe ; il existe des sous-espaces du centre C de $A(X)$, contenant les constantes, et qui ne sont pas fortement réticulés.

(b) Il existe un sous-espace fortement réticulé de $A(X)$, tel que $H + \underline{R}$ soit réticulé sans être fortement réticulé.

En effet, on vérifie (a) sur l'exemple suivant :

Soient X le simplexe de Bauer $M_+^1([0 , 1])$, et H le sous-espace de $A(X)$ formé des applications $\mu \rightarrow \mu(f)$, où f est affine sur $[0 , 1]$.

L'application π se confond avec l'application barycentre, et ne vérifie donc pas $\pi(E(X)) \subset E([0 , 1])$.

D'après le corollaire 3.9, l'espace H n'est pas fortement réticulé.

Pour vérifier (b), il suffit de rapprocher l'exemple ci-dessus de 6.4.

REMARQUE 6.8. - Le théorème 3.7 n'est pas donné dans toute sa généralité.

En effet, la seule hypothèse utilisée pour montrer que π est surjective est l'additivité de la norme H'_+ . Le théorème reste donc vrai si on remplace "espace simplicial", dans l'énoncé, par "espace des fonctions affines sur un chapeau universel nulles en 0 ".

Comme la proposition 5.3 ne repose que sur le théorème 3.7, elle reste vraie en opérant le même changement dans l'énoncé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (Erik M.). - A note on the Borel structure of a metrizable Choquet simplex and of its extreme boundary, Math. Scand., t. 19, 1966, p. 161-171.

[2] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chap. 1-4. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[3] CHOQUET (Gustave). - Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 8, 13 p.

[4] CHOQUET (Gustave) et MEYER (Paul-André). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, fasc. 1, p. 139-154.

[5] DAVIES (E. B.). - On the Banach duals of certain spaces with the Riesz decomposition property, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 18, 1967, p. 109-111.

[6] EDWARDS (David Albert). - Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2798-2800.

[7] EDWARDS (D. A.) et VINCENT-SMITH (G. F.). - A Weierstrass-Stone theorem for Choquet simplexes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 18, 1968, fasc. 1, p. 261-282.

[8] EFFROS (Edward G.). - Structure in simplexes, Acta Math., Uppsala, t. 117, 1967, p. 103-121.

[9] EFFROS (E. G.). - Structure in simplex, II, J. of funct. Anal., t. 1, 1967, p. 379-391.

[10] FAKHOURY (Hicham). - Une caractérisation des simplexes compacts et des cônes réticulés, Applications, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/70, n° 2, 12 p.

[11] FAKHOURY (Hicham). - Solution d'un problème posé par Effros, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 77-79.

[12] GLEIT (A.). - Topics in simplex space theory. Thèse Stanford Univ., 1969.

[13] GOULLET de RUGY (Alain). - Géométrie des simplexes. - Paris, Centre de Documentation Universitaire, 1968 (Collection d'Analyse fonctionnelle, 1).

[14] GOULLET de RUGY (Alain). - Faces complémentables dans un simplexe, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 6, 21 p.

[15] JELLETT (Francis). - Homomorphisms and inverse limits of Choquet simplexes, Math. Z., t. 103, 1968, p. 219-226.

[16] LAZAR (Aldo J.). - Spaces of affine continuous functions on simplexes, Trans. Amer. math. Soc., t. 134, 1968, p. 503-525.

[17] NAGEL (R.). - Idealtheorie in geordneten lokalkonvexen Vertorraümen. Thèse Univ. Tübingen, 1969.

[18] PHELPS (Robert R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

[19] ROGALSKI (Marc). - Quotient d'un simplexe par une relation d'équivalence, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 351-354.

[20] ROGALSKI (Marc). - Quelques problèmes concernant une caractérisation des simplexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 645-647.

(Texte reçu le 29 mai 1970)

Hicham FAKHOURY
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75 - PARIS 05