SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

ALAIN GOULLET DE RUGY

Invitation à la théorie des algèbres stellaires

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 1 (1969-1970), exp. nº 4-5, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_1_A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 4-5, 21 p.

20 novembre
et 4 décembre 1969

INVITATION À LA THÉORIE DES ALGÈBRES STELLAIRES

par Alain GOULLET de RUGY

0. Introduction.

Le texte qui suit représente deux exposés du séminaire. Avec un troisième exposé, de ROGALSKI, ils constituent un tout, dont le but essentiel est l'analyse de l'article de ALFSEN et ANDERSEN [1].

La théorie des algèbres stellaires étant au départ mal connue des auditeurs, nous avons consacré une grande partie de notre temps à exposer les résultats fondamentaux de la théorie nécessaires pour aborder cet article. Dans la rédaction qui suit, pas plus qu'au cours des exposés, nous n'avons cherché à donner de démonstrations, soit qu'elles se trouvent dans les excellents ouvrages de MM. DIEUDONNÉ et DIXMIER ([5], [6]), soit qu'elles nécessitent des outils trop raffinés. Dans tous les cas, nous avons donné toutes les références nécessaires pour retourner aux sources. Par contre, nous avons proposé beaucoup d'exemples parlants ; en particulier, nous avons insisté sur les algèbres de matrices carrées (n , n) . En effet, il est illusoire d'espérer approfondir la théorie des algèbres stellaires et des algèbres d'opérateurs sans bien connaître "l'algèbre linéaire" (cf. par exemple [9]).

Dans leur travail, ALFSEN et ANDERSEN ont étudié le convexe compact $E(A)$ des états d'une algèbre stellaire unifère. Ils ont montré que sur $E(A)$ une face fermée est complémentable si, et seulement si, elle est invariante. Ils ont remarqué que la trace sur l'ensemble des états purs $P(A)$ de A , de la famille de ces faces, constituait l'ensemble des fermés d'une topologie fort intéressante sur $P(A)$, que, par référence à eux, nous proposons d'appeler topologie 2A-faciale.

Pour simplifier et généraliser quelques-uns de leurs résultats, nous avons introduit les notions plus faibles de face parallélisable et de topologie faciale sur un convexe compact quelconque X . Ces notions ont été reprises et approfondies par ROGALSKI dans son exposé, de sorte que, pour lire notre travail, il faut lire sa rédaction ([13]), ou au moins le résumé qu'il en a fait ([12]).

Dans ce qui suit, nous montrons que, pour $X = E(A)$, les notions de face fermée complémentable et de face fermée parallélisable coïncident, de sorte que, dans ce cas, la topologie faciale est la plus fine de toutes les topologies faciales qu'on peut considérer sur $P(A) = \mathcal{E}(E(A))$, ce qui est une situation remarquable. Ensuite, nous montrons que les fonctions continues pour cette plus fine topologie s'identifient aux éléments du centre de A . Enfin, nous caractérisons les algèbres stellaires A pour lesquelles cette topologie est irréductible.

La démonstration de ces résultats, nécessitant des outils assez élaborés (cf. [3]), n'a pas été donnée au cours des exposés. De même, pour ne pas alourdir la rédaction, nous l'avons rejetée à la fin du papier, dans un appendice.

Nous tenons à remercier vivement MM. F. COMBES et F. PERDRIZET des agréables et fructueux échanges que nous avons eu ensemble.

1. Définitions.

1.1. - Soit A une algèbre sur $\mathbb{C}$. On dit que A est une algèbre normée, si on se donne, sur A , une norme $\| \ \|$ vérifiant la condition

$$\|x.y\| \leqslant \|x\|.\|y\| , \qquad \forall\ x , y \in A .$$

On dit que A est une algèbre de Banach, si c'est une algèbre normée complète.

On appelle involution sur A , une application $x \to x^*$ de A dans A , telle que :

(i) $(x^*)^* = x$,

(ii) $(x + y)^* = x^* + y^*$,

(iii) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$,

(iv) $(xy)^* = y^* x^*$, $\forall\ x , y \in A$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$.

On dit que A est une algèbre normée involutive, si A est une algèbre normée munie d'une involution vérifiant l'égalité

$$\|x\| = \|x^*\| , \qquad \forall\ x \in A .$$

Enfin, on appelle algèbre stellaire (ou C^*-algèbre), toute algèbre de Banach involutive A , vérifiant la relation

$$\|x\|^2 = \|x^* x\| , \qquad \forall\ x \in A .$$

1.2. - Dans une algèbre involutive A , un élément $x \in A$ est dit hermitien, si $x^* = x$. L'ensemble des hermitiens de A est un espace vectoriel réel, noté A_h , qui engendre A ([6], 1.1.4). Si A a une unité, un élément u de A est dit unitaire, si $uu^* = u^* u = 1$. Ces éléments forment un groupe pour la multiplication, appelé groupe unitaire. A chaque unitaire u de A correspond l'automorphisme de A : $x \longmapsto u^* xu$. Le groupe de ces automorphismes joue un rôle très important dans la théorie des algèbres stellaires.

1.3. Exemples.

1.3.1. - Soit X un espace compact, et soit $A = \mathcal{C}_{\underset{\sim}{C}}(X)$. A , munie de la norme sup et de l'involution $f \longmapsto \bar{f}$, est une algèbre stellaire. Dans ce cas, $A_h = \mathcal{C}_{\underset{\sim}{R}}(X)$. Un élément f de A est unitaire si, et seulement si, $|f(x)| = 1$, $\forall\ x \in X$. Les unitaires sont donc exactement les points extrémaux de la boule unité de A ([10]).

1.3.2. - Soit $A = M_n(\underset{\sim}{C})$, algèbre des matrices de rang n sur $\underset{\sim}{C}$, l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs sur un espace hilbertien de dimension n . Munie de la norme d'algèbre d'opérateurs et de l'involution $M \longmapsto {}^t\bar{M}$, A est une algèbre stellaire. Les éléments hermitiens (resp. unitaires) de A sont les matrices dont les valeurs propres sont réelles (resp. de module 1). En particulier, une matrice est à la fois hermitienne et unitaire si, et seulement si, elle est la différence de deux projecteurs orthogonaux de somme l'identité ([9], § 36, n° 8).

2. Algèbres stellaires commutatives.

2.1. Idéaux. - Soit A une algèbre de Banach unitaire. Alors :

(i) Tout idéal à gauche maximal est fermé ;

(ii) Si A est commutative, tout idéal maximal est un hyperplan fermé.

2.2. Caractères. - On appelle caractère d'une algèbre A , tout morphisme de A dans $\underset{\sim}{C}$. Dans l'exemple 1.3.1, les caractères sont les mesures ponctuelles de masse 1 ([5], 15.3.7), et $Sp(A)$ s'identifie à l'espace compact X . Dans l'exemple 1.3.2, il n'y a aucun caractère non nul dès que $n > 1$ (s'inspirer de [5], 15.7, problème). Leur introduction est justifiée par le résultat suivant.

THÉORÈME ([5], 15.3.1). - Soit A une algèbre de Banach involutive unitaire. Alors :

(a) Tout caractère est continu de norme 1 ;

(b) $\chi \to \chi^{-1}(0)$ est une bijection de l'ensemble des caractères de A sur l'ensemble des idéaux maximaux de A .

On appelle spectre de A , et on note $Sp(A)$, l'ensemble des caractères de A muni de la topologie faible induite par $\sigma(A', A)$. C'est donc un compact faible de la boule unité de A' . Le spectre de A est lié au spectre usuel d'un élément $a \in A$, par la relation

$$\{\chi(a) \mid \chi \in Sp(A)\} = \{\lambda \in \underset{\sim}{C} \mid a - \lambda \text{ non inversible}\} ,$$

valable dans le cas commutatif seulement.

2.3. GEL'FAND. - Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. À $a \in A$, on associe $\mathcal{G}(a) : \chi \longmapsto \chi(a) : \mathrm{Sp}(A) \to \underset{\sim}{C}$. Il est assez facile de voir que :

PROPOSITION 2.3.1 ([5], 15.3.4). - $a \longmapsto \mathcal{G}(a)$ <u>est un homomorphisme (d'algèbres) continu de</u> A <u>dans</u> $\mathcal{C}_{\underset{\sim}{C}}(\mathrm{Sp}(A))$.

Ce qui nous intéresse est évidemment de savoir quand $\mathcal{G}$ est une isométrie. Supposons donc que A soit de plus une algèbre stellaire. On montre que tout caractère est hermitien ([6], 1.4.1). En conséquence, $\mathcal{G}(A)$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{C}_{\underset{\sim}{C}}(\mathrm{Sp}(A))$ séparant les points de $\mathrm{Sp}(A)$, donc partout dense. De plus ([4], 15.4.14.1), $\|\mathcal{G}(a)\| = \|a\|$, $\forall a \in A$. D'où le résultat suivant.

THÉORÈME 2.3.2 (GEL'FAND-NEUMARK)([5], 15.4.14). - <u>Si</u> A <u>est une algèbre stellaire ayant un élément unité</u>, $a \longmapsto \mathcal{G}(a)$ <u>est un isomorphisme d'algèbres stellaires, isométrique de</u> A <u>sur</u> $\mathcal{C}_{\underset{\sim}{C}}(\mathrm{Sp}(A))$.

CONTRE-EXEMPLE 2.3.3. - Reprenons l'exemple 1.3.2, et prenons pour A l'algèbre commutative à unité engendrée par une matrice nilpotente M (par exemple pour $n = 2$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). Tout caractère est nul sur A. Donc $\mathcal{G}$ n'est pas injectif. L'énoncé 2.3.2 ne s'applique pas, car A n'est pas involutive.

CONTRE-EXEMPLE 2.3.4. - Soit A l'algèbre des fonctions complexes continues sur le disque unité D, holomorphes à l'intérieur. $\mathrm{Sp}(A) = D$, $\mathcal{G}$ est isométrique, mais non surjectif. Là encore, 2.3.2 tombe en défaut, car A n'est pas involutive ([5], 15.3.8).

3. Algèbres stellaires non commutatives.

Lorsque A n'est plus commutative, on abandonne l'espoir de représenter A comme une algèbre de fonctions. L'exemple le plus naturel d'algèbre stellaire non commutative étant $\mathcal{L}(H)$, algèbre des opérateurs sur un espace de Hilbert, où l'on prend pour multiplication la composition des applications, on va chercher à représenter une algèbre stellaire A comme sous-algèbre stellaire d'un $\mathcal{L}(H)$. Auparavant, nous introduisons une notion d'ordre.

3.1. <u>Eléments positifs d'une algèbre stellaire</u> A. - On dit que $a \in A$ est <u>positif</u>, et on note $a \geqslant 0$, si $a = x^* x$ pour un $x \in A$. On note A^+ l'ensemble des éléments positifs de A.

On démontre, de manière d'ailleurs assez délicate ([6], 1.6.1), la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1.1. - A^+ <u>est un cône convexe fermé saillant de</u> A .

EXEMPLES 3.1.2. - Si A est commutative, $a \in A^+$ si, et seulement si, $\mathcal{G}(a) \geq 0$. On en déduit, dans le cas non commutatif, que tout $a \in A_h$ s'écrit comme différence de deux éléments positifs ([6], 1.5.7).

Prenons l'exemple 1.3.2. En diagonalisant, il est facile de voir que $M \in A^+$ si, et seulement si, M a ses valeurs propres positives.

REMARQUES 3.1.3.

(a) La norme est croissante sur A^+ . En conséquence, lorsque A est unitaire, 1 est une unité d'ordre de l'espace de Banach A_h ([6], 1.6.9).

(b) Les homomorphismes $x \longmapsto a^* xa$, où a est fixé dans A , conservent l'ordre ([6], 1.6.8).

3.2. <u>Formes positives</u>. - Dans tout ce numéro, A désigne une algèbre stellaire à unité.

On dit qu'une forme linéaire f , définie sur A , est <u>positive</u>, si $f(a) \geq 0$, $\forall\ a \in A^+$. Toute forme positive est continue ([6], 2.1.4). L'ensemble A'_+ de ces formes constitue un cône convexe faiblement complet. On appelle <u>état</u> de A , toute forme positive de norme 1 ; on note $E(A)$ l'ensemble des états de A . C'est une base compacte de A'_+ . Enfin, on note $P(A)$ les <u>états purs</u> de A , c'est-à-dire les points extrémaux de $E(A)$.

Le résultat suivant, très simple ([5], 15.6.2 ; [6], 2.1.5), est crucial, car il va permettre d'établir le lien entre formes positives et représentations.

PROPOSITION 3.2.1. - <u>Si à</u> $f \in A'_+$ <u>on associe l'application</u>

$$(x\ ,\ y) \rightarrow g(x\ ,\ y) = f(y^* x)\quad ,$$

<u>cette application est une forme hermitienne positive sur</u> A .

3.3. <u>Représentations</u>. - Soit A une algèbre involutive. On appelle <u>représentation</u> de A dans un espace de Hilbert H , tout morphisme involutif de A dans l'algèbre involutive $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs continus de H dans lui-même (pour l'involution dans $\mathcal{L}(H)$, voir [5], 11.5).

Si π_i est une représentation de A dans H_i , $1 \leq i \leq n$, on peut construire une nouvelle représentation π de A dans $\bigoplus_{i=1}^{n} H_i$, en posant $\pi(a) = \bigoplus_{i=1}^{n} \pi_i(a)$. Etant donnée une représentation π de A dans H , on en déduit donc une infinité de représentations de A dans H , $H \oplus H$, $H \oplus H \oplus H$, ... Il faut donc classer les représentations.

Si H et H' sont deux hilberts, et π et π' des représentations de A dans H et H', on dit que <u>π et π' sont équivalents</u>, et on note $\pi \sim \pi'$, s'il existe un isomorphisme d'espaces de Hilbert $T : H \to H'$, tel que

$$\pi'(a)(h') = T(\pi(a)(T^{-1}(h'))) \ , \qquad \forall\, h' \in H' \ , \ \forall\, a \in A \ .$$

On dit qu'une représentation π de A dans un hilbertien H est <u>topologiquement irréductible</u>, si les seuls sous-espaces fermés de H, stables par $\pi(A)$, sont $\{0\}$ et A.

Enfin, étant donnée une représentation π de A dans H, un vecteur ξ de H est dit <u>totalisateur</u> pour π, si l'ensemble $\{\pi(a)\xi \ , \ a \in A\}$ est total dans H.

THÉORÈME 3.3.1 ([6], 2.4.4). - <u>Soit A une algèbre stellaire à unité. A chaque forme linéaire positive f sur A, il correspond une unique représentation π_f de A dans un hilbert H_f, définie à une équivalence près, et un vecteur ξ_f de H_f, tels que :</u>

(a) ξ_f <u>soit totalisateur pour</u> π_f ;
(b) $f(x) = (\pi_f(x)\xi_f | \xi_f)$, $\forall\, x \in A$.

COROLLAIRE 3.3.2 ([6], 2.6.1). - <u>Si A est une algèbre stellaire à unité, il existe une représentation isométrique de A dans un hilbert H</u>.

Ce dernier résultat tient à l'abondance des formes linéaires positives sur une algèbre stellaire et aux deux résultats suivants fort importants :

Tout morphisme d'algèbres involutives d'une algèbre de Banach involutive dans une algèbre stellaire est continu ([6], 1.3.7).
Tout morphisme injectif d'algèbres involutives d'une algèbre stellaire dans une algèbre normée involutive est de norme au moins égale à 1 ([6], 1.8.1).

REMARQUE 3.3.3. - Pour bien comprendre le théorème 3.3.1, il est conseillé de regarder l'exemple $A = \mathcal{C}_{\underset{\sim}{C}}(X)$, avec X compact ([5], 15.10.1).

Parmi les représentations π_f construites en 3.3.1, il faut sélectionner celles qui sont irréductibles.

THÉORÈME 3.3.4 ([6], 2.5.4). - <u>Sous les hypothèses de 3.3.1, pour que π_f soit topologiquement irréductible, il faut et il suffit que f soit dans une génératrice extrémale de A'_+, autrement dit que f soit proportionnelle à un état pur de A</u>.

Soit $\hat{A}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations topologiquement irréductibles ; comme deux formes f et f' proportionnelles définissent des représentations π_f et $\pi_{f'}$ équivalentes, et comme, d'autre part, toute représentation irréductible π de A est équivalente à une représentation de la forme π_f ([5], 2.4.6), l'application $f \longmapsto \pi_f$ est une surjection de $P(A)$ sur $\hat{A}$. Lorsque A est stellaire, le résultat suivant ([6], 2.8.6) renseigne bien sur cette application.

PROPOSITION 3.3.5. - Soient A une algèbre stellaire à unité, f_1 et f_2 deux états purs de A . Pour que π_{f_1} et π_{f_2} soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un unitaire u de A , tel que

$$f_2(x) = f_1(u^* xu) , \qquad \text{pour tout } x \in A .$$

4. Faces de A^+ .

Dans tout ce paragraphe, A est une algèbre stellaire. Nous allons, dans la suite, nous intéresser de plus en plus à l'aspect linéaire de la théorie des algèbres stellaires, en utilisant au maximum l'ordre introduit en 3.1. Voici le premier résultat de base ([2], 2.7 ; [11], 4.9). D'abord quelques définitions et notations.

Soit B une partie de A , On dit que B est invariante, si $a^* Ba \subset B$, $\forall a \in A$. Par exemple, tout idéal bilatère est invariant. Soit maintenant P une face de A^+ , on note $\mathfrak{L}(P)$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $x^* x \in P$. On montre facilement que $\mathfrak{L}(P)$ est un idéal à gauche qui est bilatère si, et seulement si, P est invariante ([2], 1.3).

THÉORÈME 4.1. - Soit A une algèbre stellaire. L'application $I \longmapsto I^+ = I \cap A^+$ est une bijection de :

(a) L'ensemble des idéaux à gauche fermés de A sur l'ensemble des faces fermées de A^+ ;

(b) L'ensemble des idéaux bilatères fermés de A sur l'ensemble des faces invariantes fermées de A^+ .

La bijection réciproque est $P \longmapsto \mathfrak{L}(P)$.

Il n'est pas question de démontrer ici ce résultat. Nous allons seulement essayer de l'illustrer sur un exemple.

EXEMPLE 4.2. - Prenons pour A une sous-algèbre stellaire de l'algèbre des opérateurs sur un espace hilbertien H de dimension finie. Soient Σ la sphère unité de A , Σ^+ sa partie positive.

(a) Toute génératrice extrémale de A^+ rencontre Σ suivant un projecteur (i. e. un élément P tel que $P = P^2 = P^*$).

Soit P le point d'intersection d une génératrice avec la sphère unité. On a $P \leqslant 1$, donc d'après 3.1.3 (b) :

$$P^2 = P^{1/2}\, PP^{1/2} \leqslant P^{1/2}\, P^{1/2} = P \quad .$$

D'où

$$P^2 = \lambda P \ , \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad .$$

Mais comme A est stellaire, $\|P\|^2 = \|P^2\| = 1$, d'où $\lambda = 1$, et P est bien un projecteur.

(b) Soient Q une projection de A , et $M \in A$ tel que $0 \leqslant M \leqslant Q$. Alors $MQ = QM = M$.

A^+ étant fermé, on a, compte tenu de (a), $M = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$, où les P_i sont des projecteurs de A^+ . Donc $\lambda_i P_i \leqslant Q$ pour tout i , ce qui implique $P_i(H) \subset Q(H)$, soit $P_i \leqslant Q$; donc $P_i Q = QP_i$ pour tout i , et $MQ = QM = M$.

(c) Si I est un idéal à gauche (fermé) de A , I^+ est une face de A^+ . De plus, il existe un projecteur P dans A , tel que $I^+ = PAP$ et $I = AP$.

Pour prouver cela, nous admettrons que l'ensemble des projecteurs contenus dans A est une partie complètement réticulée de Σ . Alors l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs dans I est réticulé, et admet une borne supérieure P qui est dans I . Soient $M \in I^+$, $[M]$ l'algèbre engendrée par M dans $\mathcal{L}(H)$; comme $M = M^*$, $[M]$ est une sous-algèbre stellaire contenue dans I . $[M]^+$ étant fermé, on a, compte tenu de (a), $M = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$, où les P_i sont des projecteurs de $[M]^+ \subset I^+$. En conséquence, $M \leqslant (\Sigma \lambda_i)P$ et, d'après (b), $PMP = M$. Ainsi $I^+ \subset PA^+ P$. Réciproquement, comme $P \in I$, $PA^+ P \subset I^+$, et il est immédiat que $PA^+ P$ est une face. D'où le résultat. La seconde égalité se montre de la même manière (voir [11], § 2).

Retenons finalement qu'à chaque idéal à gauche I de A , nous avons associé une "unité" $P \in I^+$, qui détermine entièrement l'idéal ; ceci explique la bijection annoncée en 4.1. Dans le cas général, on procède d'une manière analogue avec les "unités approchées".

5. Faces de A'_+ .

Soit toujours A une algèbre stellaire. Si $B \subset A$, on pose

$$B^{\perp} = \{f \in A'_+ \mid f(x^* x) = 0 , \forall x \in B\} .$$

De même, si $B' \subset A'_+$, on pose

$$B'_{\perp} = \{x \in A \mid f(x^* x) = 0 , \forall f \in B'\} .$$

Il est facile de voir que $B^{\perp}$ est toujours une face faiblement fermée de A'_+, et que $B'_{\perp}$ est toujours un idéal à gauche fermé de A. On dit qu'une partie B' de A'_+ est invariante, si l'application $(x \longmapsto f(a^* xa))$ appartient à B', $\forall f \in B'$, $\forall a \in A$.

THÉORÈME 5.1 ([11], 5.11 ; [7], 5.1). - Soit A une algèbre stellaire. L'application $I \to I^{\perp}$ est une bijection :

(a) de l'ensemble des idéaux à gauche fermés de A sur l'ensemble des faces faiblement fermées de A'_+ ;

(b) de l'ensemble des idéaux bilatères fermés de A sur l'ensemble des faces invariantes faiblement fermées de A'_+.

La bijection réciproque est $F \longmapsto F_{\perp}$.

Nous ne démontrerons pas ce résultat. En utilisant le théorème 4.1, on voit qu'il met en évidence un théorème des bipolaires pour les faces fermées de deux cônes en dualité. Il est naturel de songer à appliquer le théorème des bipolaires usuel. Pour cela, il faudrait un théorème du type suivant : la partie positive du polaire d'une face engendre le polaire tout entier. Dans le cas qui nous intéresse, c'est irréalisable, sauf pour les idéaux bilatères fermés qui, parmi les idéaux à gauche I, sont caractérisés par l'une quelconque des propriétés suivantes :

(a) I est linéairement engendré par I^+ ;
(b) I est auto-adjoint ([6], 1.8.2).

Dans le cadre de l'exemple 4.2, la situation est claire. Soit I un idéal à gauche d'une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{L}(H)$ avec $\dim(H) < +\infty$, et soit P le projecteur "unité" associé à I ; alors

$$I^{\perp} = \{f \in A'^+ \mid f(X) = f(PXP) , \forall X \in A\} .$$

Et réciproquement, si J est une face de A'^+, on peut lui associer un unique projecteur P de A, tel que

$$J = \{f \in A'^+ \mid f(X) = f(PXP) , \forall X \in A\} ,$$

et alors $J_{\perp} = AP$.

6. Faces de $E(A)$.

Soit X un convexe compact, et soit F une face fermée de X . On a toujours $X = \mathrm{conv}(F \cup F')$, où F' est la réunion des faces de X disjointes de F. De plus, si $x \in X \setminus (F \cup F')$, il existe $0 < \alpha < 1$, $y \in F$, $z \in F'$, tels que

$$x = \alpha y + (1 - \alpha) z \quad .$$

Si cette écriture est unique, et si F' est une face, on dit que F est une face complémentable. Si dans cette écriture, le coefficient α seul est unique, et si F' est une face, on dit que F est une face parallélisable.

Lorsque X est l'espace des états d'une algèbre stellaire à unité, on dit que F est invariante, si la face engendrée par F dans A'_+ est invariante. On dit que F est unitairement invariante, si pour $f \in F$, $f(u^*.u) \in F$, $\forall$ u unitaire de A . Relativement à ces faces, X a une propriété remarquable.

THÉORÈME 6.1. - Soit A une algèbre stellaire à unité. Pour une face fermée de $P(A)$, il est équivalent de dire que :

(a) F est unitairement invariante ;
(b) F est invariante ;
(c) F est complémentable ;
(d) F est parallélisable.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de ces équivalences qui font appel à des théories assez élaborées. (a) $\Longleftrightarrow$ (c) a été remarqué par ALFSEN et ANDERSEN dans [1], proposition 7.1. Ils utilisent la théorie des idéaux archimédiens dans un espace de Banach ordonné. C'est pourquoi nous donnerons, en appendice, une démonstration simple reposant sur la représentation atomique, destinée aux spécialistes des algèbres stellaires.

Retournons à l'exemple 4.2, et montrons (b) $\Longrightarrow$ (c) dans ce cadre. Si F est invariante, l'idéal $I = F_\perp$ est un idéal bilatère. On peut déduire de (b) que, nécessairement, le projecteur "unité" P associé à I est central, c'est-à-dire commute avec tout élément de A . En sorte que toute $f \in P(A)$ s'écrit

$$f(.) = f(P.P) + f((1 - P).(1 - P)) \quad .$$

Et, à une constante multiplicative près,

$$f(P.P) \in F' \qquad \text{et} \qquad f((1 - P).(1 - P)) \in F \quad .$$

Ensuite il est facile de voir que cette écriture est unique.

7. Topologies faciales sur $P(A)$.

A est toujours une algèbre stellaire à unité.

Soit X un convexe compact. On appelle topologie faciale sur X , la donnée d'une famille de faces fermées parallélisables de X , stable par intersection quelconque et par enveloppe convexe finie. Ceci induit sur $\mathcal{E}(X)$ une topologie, encore appelée topologie faciale, telle que toute fonction f , définie sur $\mathcal{E}(X)$, et continue pour cette topologie, se prolonge en une fonction affine continue sur X ([13]). Si $\mathcal{C}$ est cette topologie, notons $H_{\mathcal{C}}$ l'espace des fonctions affines continues sur X ainsi construit.

On dit que $\mathcal{C}$ est irréductible, si toute topologie faciale $\mathcal{C}'$, moins fine que $\mathcal{C}$ et telle que $H_{\mathcal{C}} = H_{\mathcal{C}'}$, est identique à $\mathcal{C}$. Pour plus de détails, nous renvoyons à [13] ou à l'exposé de ROGALSKI à ce même séminaire ([14]). Du théorème 6.1, on déduit le résultat suivant.

COROLLAIRE 7.1. - Il existe une topologie faciale plus fine que toutes les autres sur l'espace des états associé à une algèbre stellaire à unité.

C'est, bien entendu, la topologie faciale définie à partir des faces complémentables. Cette topologie a été introduite par ALFSEN et ANDERSEN dans [1]. C'est pourquoi nous dirons que cette topologie est 2A-faciale, et nous la noterons $\mathcal{C}_{2A}$. Ceci est une situation assez remarquable, semblable à celle qu'on trouve dans les simplexes compacts, où toute face fermée est complémentable. Cependant, il ne faut pas se faire d'illusion sur cette analogie. En effet, si on prend pour A l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ où H est un hilbert de dimension finie, les seules faces parallélisables de $P(A)$ sont $\emptyset$ et $P(A)$!

A chaque état pur ρ de A , il correspond une plus petite face fermée complémentable F_ρ . Le résultat suivant décrit simplement F_ρ .

PROPOSITION 7.2 ([1], 7.2 et 7.3). - On a :

(a) $F_\rho = \overline{\text{conv}}(\bigcup f(u^*.u)$, u unitaire de $A)$;

(b) $F_\rho = (\text{Ker}(\pi_\rho))^\perp$;

(c) $(F_\rho)_\perp = \text{Ker}(\pi_\rho)$.

D'où l'on déduit une nouvelle démonstration du résultat suivant.

COROLLAIRE 7.3. - Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour une algèbre stellaire à unité :

(a) A <u>est commutative</u> ;

(b) A_h <u>vérifie le lemme de décomposition de Riesz</u> ;

(c) A'_h <u>vérifie le lemme de décomposition de Riesz</u> ;

(d) <u>Tout état pur de</u> A <u>est unitairement invariant (ou complémentable, ou parallélisable)</u>.

<u>Démonstration</u>. - (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (A'_+ est réticulé) $\Longrightarrow$ (P(A) est un simplexe) $\Longrightarrow$ (d) . Réciproquement, si $f(u^*.u) = f(.)$, $\forall f \in P(A)$, on a $f(u^* xu) = f(x)$, $\forall x \in A$, $\forall f \in E(A)$, donc $u^* xu = x$, ou encore $xu = ux$, $\forall x \in A$. Ainsi x commute à tout unitaire, donc à un élément quelconque de A .

Ce résultat met en évidence une autre propriété du convexe compact $X = E(A)$, à savoir que, si tout point extrémal de X est complémentable, X est un simplexe, et même un simplexe de Bauer. On sait qu'une telle propriété est fausse pour les convexes compacts généraux ([1], 6.4).

Finalement, il se pose le problème de savoir si la topologie 2A-faciale $\mathcal{T}_{2A}$ sur E(A) est irréductible. Le résultat suivant (proposition 7.4) va permettre d'y répondre.

Auparavant, remarquons que, si $a \in A$, il lui correspond une application affine continue $\tilde{a}$ de E(A) dans $\mathbb{C}$, définie par $\tilde{a}(f) = f(a)$. Et réciproquement, si on se donne une application f affine continue sur E(A) , il lui correspond un $a \in A$ tel que $\tilde{a} = b$.

On note, dans ce qui suit, Z le <u>centre</u> de A , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tout élément de A .

PROPOSITION 7.4. - <u>L'application</u> $z \longmapsto \tilde{z}$ <u>est une bijection du centre</u> Z <u>de</u> A <u>sur l'ensemble des fonctions affines continues sur</u> E(A) , <u>dont la restriction à</u> P(A) <u>est</u> <u>2A-facialement continue</u>.

Nous renvoyons la démonstration en appendice, pour ne pas alourdir l'exposé.

Elle montre aussi que Z est la plus grande sous-algèbre stellaire B de A réticulée pour l'ordre induit par B^+ , telle que $\rho(a \vee_B b) = \sup(\rho(a) , \rho(b))$ pour tout état pur ρ de A et tous $a , b \in B_h$ (cf. 14 et 15 de [12]).

Finalement, nous sommes à même de donner une condition pour que la topologie 2A-faciale sur P(A) soit irréductible.

THÉORÈME 7.5. - <u>Soient</u> A <u>une algèbre stellaire, et</u> Z <u>son centre. Pour que la topologie</u> <u>2A-faciale sur</u> P(A) <u>soit irréductible, il faut et il suffit que</u> A <u>soit</u> centrale, <u>c'est-à-dire que</u> A <u>vérifie la propriété suivante</u> :

Si deux représentations π et π' ont des noyaux $\mathrm{Ker}(\pi)$ et $\mathrm{Ker}(\pi')$, qui coïncident sur Z, alors $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Ker}(\pi')$.

On trouvera aussi la démonstration en appendice.

8. Autres propriétés de $E(A)$.

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que les propriétés de $E(A)$ relatives aux faces fermées complémentables. Dans le même ordre d'idées, nous devons signaler le résultat suivant.

PROPOSITION 8.1. - Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de faces fermées complémentables de $E(A)$, l'ensemble $F = \overline{\mathrm{conv}}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)$ est une face complémentable.

La démonstration est immédiate, et repose sur le fait qu'un sous-convexe compact invariant de $E(A)$ est nécessairement une face, donc une face complémentable.

Cependant, comme il peut ne pas exister de faces fermées complémentables dans $E(A)$, les propriétés que nous énonçons maintenant sont très intéressantes, car elles donnent des renseignements plus généraux.

Soient E un espace vectoriel, K un cône convexe saillant de E engendrant E, et avec une base X linéairement compacte. On dit que X a la propriété (I), si :

$\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \geqslant 0$, l'ensemble $X \cap (x + \lambda X)$:
ou bien est vide, ou bien est réduit à un point,
ou bien contient un ensemble de la forme $y + \mu X$, avec $y \in E$ et $\mu \geqslant 0$.

PROPOSITION 8.2 (ELLIS [8]). - L'espace des états d'une algèbre stellaire unifère vérifie la propriété (I) (*).

Nous allons voir maintenant que la propriété (I) est liée au fait que toute face fermée parallélisable est complémentable, tout au moins en dimension finie, ce qui est a priori surprenant.

PROPOSITION 8.3. - Soit X un convexe de dimension n finie, et ayant la propriété (I). Alors, toute face parallélisable de X est complémentable.

Démonstration. - Soit F une face parallélisable de X, que nous supposons non complémentable. Alors il existe $z \in X$, et deux décompositions distinctes

$$z = \alpha x_1 + (1-\alpha) y_1 = \alpha x_2 + (1-\alpha) y_2$$

(*) Avec $E = A'_h$ dual de A_h, et $K = A'_+$.

de z suivant F et F'. Il en résulte que les segments de droite $[x_1, x_2]$ et $[y_1, y_2]$ sont portés par des droites parallèles, et ne sont pas réduits à un point. Soient x et y leurs milieux respectifs. Soit maintenant $\ell = \hat{1}_F$; c'est une fonction affine continue sur X, valant 1 sur F, et 0 sur F'. Comme nous sommes en dimension finie, nous pouvons étendre ℓ à l'espace tout entier. Nous noterons encore ℓ cette extension. Considérons $B = X \cap (y - x + X)$, et soit b un point de B. On a $b \in X$, donc $\ell(b) \geqslant 0$. D'autre part,

$$b = y - x + x' , \qquad \text{avec } x' \in X ,$$

donc

$$\ell(b) = - \ell(x) + \ell(x') = \ell(x') - 1 \leqslant 0 .$$

D'où $\ell(b) = 0$, soit $b \in F'$. Ainsi $B \subset F'$. En particulier, $\dim(B) < n$. De la propriété (I), il résulte que B se réduit à un point, ce qui est contradictoire avec le fait que B contienne le segment non réduit à un point

$$[y_1 , y_2] \cap [x_1 - x + y , x_2 - x + y] .$$

Terminons ce paragraphe en indiquant une belle propriété de $E(A)$. La démonstration est reportée en appendice.

THÉORÈME 8.4. - Soit F une face fermée de $E(A)$. On note $L(F)$ l'ensemble des formes affines continues ℓ sur $E(A)$, telles que :

(i) $0 \leqslant \ell \leqslant 1$;
(ii) $\ell(F) = 0$.

Alors, l'enveloppe supérieure de $L(F)$ est une forme affine s. c. i. f sur $E(A)$, qui s'annule sur F exactement. De plus, f est l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante de fonctions de $L(F)$.

Dans le plan, un sommet d'un carré ne vérifie pas la propriété du théorème 8.4 ; par contre, tout point d'une ellipse la vérifie.

APPENDICE

A.1. Démonstration du théorème 6.1.

DÉFINITION A.1.1. - Soit X un convexe compact. On dit qu'une forme affine s. c. s. est caractéristique, si elle prend les valeurs 0 ou 1 sur $\mathcal{E}(X)$. On note $\mathrm{Car}(X)$ l'ensemble de ces formes.

LEMME A.1.2. - <u>Soit</u> X <u>un convexe compact. On note</u> $\mathfrak{F}_p(X)$ <u>l'ensemble des faces fermées parallélisables de</u> X . <u>L'application</u> $f \longmapsto \{f = 1\}$ <u>est une bijection de</u> $\mathrm{Car}(X)$ <u>sur</u> $\mathfrak{F}_p(X)$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $f \in \mathrm{Car}(X)$. Montrons que $F = \{f = 1\}$ est parallélisable. Pour cela, il suffit de vérifier (théorème 6 de [12]) que $\hat{1}_F$ est affine. Soit h affine continue $\geqslant 1_F$; alors, $h \geqslant f$ sur $\mathcal{E}(X)$, donc partout. Ce qui implique $\hat{1}_F \geqslant f$. Réciproquement, si h est affine continue $\geqslant f$, alors $h \geqslant 1_F$, donc $h \geqslant \hat{1}_F$, et comme f est enveloppe inférieure des fonctions affines qui la majorent, $f \geqslant \hat{1}_F$. D'où $\hat{1}_F = f$. Réciproquement, si $F \in \mathfrak{F}_p(X)$, $\hat{1}_F \in \mathrm{Car}(X)$. La bijection résulte enfin de ce que, pour toute face fermée F de X ,

$$F = \mathrm{conv}(F \cap \mathcal{E}(X)) \quad .$$

LEMME A.1.3. - <u>Soient</u> I <u>un idéal bilatère fermé d'une algèbre stellaire</u> A , <u>et</u> (u_λ) <u>une unité approchée filtrante croissante de</u> I . <u>Alors</u>

$$(1 - \lim(\tilde{u}_\lambda)) \in \mathrm{Car}(X) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour une représentation irréductible π de A , l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :

(1) $\pi(I) = 0$, et $\lim \pi(u_\lambda) = 0$;

(2) $\pi(I) \neq 0$, et alors ([6], 2.11.3) $\pi_{|I}$ est irréductible, donc non dégénérée, de sorte que $\pi(u_\lambda)$ converge fortement vers 1 .

A chaque u_λ , associons la fonction affine continue $\tilde{u}_\lambda$ sur $E(A)$, définie par $\tilde{u}_\lambda(f) = f(u_\lambda)$, $\forall f \in E(A)$. La famille $\tilde{u}_\lambda$ est filtrante croissante majorée par 1 . Son enveloppe supérieure ℓ est une fonction affine s. c. i. sur $E(A)$. Si $\rho \in P(A)$, π et ξ étant la représentation et le vecteur associés, on a

$$\ell(\rho) = \lim \tilde{u}_\lambda(\rho) = \lim \rho(u_\lambda) = \lim(\pi(u_\lambda)\xi|\xi) \quad ,$$

qui vaut, soit 0 , soit 1 , d'après ce qu'on a vu plus haut, car $\|\xi\| = 1$ ([6], 2.4.3).

<u>Démonstration du théorème</u> 6.1.

(b) $\Longrightarrow$ (d) . Soit F une face invariante fermée de $E(A)$. Il lui correspond un idéal bilatère fermé I de A , tel que $I^\perp = F$ (5.1). Soit (u_λ) une unité approchée filtrante croissante de I , et soit $\ell = \lim(\tilde{u}_\lambda)$. D'après A.1.3, $G = \{\ell = 0\}$ est une face fermée parallélisable. Montrons que $F = G$, ce qui prouvera (b) $\Longrightarrow$ (d) . Pour cela, il suffit de vérifier $\mathcal{E}(F) = \mathcal{E}(G)$, soit

$$F \cap P(A) = G \cap P(A) \quad .$$

Or, d'après [6], 2.4.9 et 5.1, pour $\rho \in P(A)$, on a

$$(\rho \in F) \iff (\rho(I) = 0) \iff (\pi_\rho(I) = 0) \iff (\ell(\rho) = 0) \iff (\rho \in G) \quad .$$

(d) $\Longrightarrow$ (a) . On part d'une face fermée parallélisable F de $E(A)$. D'après le lemme A.1.2, cela équivaut à la donnée d'une forme ℓ affine s. c. i. sur $E(A)$, avec $0 \leq \ell \leq 1$, valant 0 sur F , et 1 sur F' . D'après [3], 2.2.2 et 2.2.3, il existe un élément s. c. i. de A'' , avec $0 \leq L \leq 1$, tel que $\widetilde{L} = \ell$. Montrons que L est central dans A'' . Pour cela, considérons la représentation atomique π de A'' dans $B = \bigoplus_{\rho \in P(A)} \mathcal{L}(H_\rho)$. Elle est isométrique sur les éléments s. c. i. de A'' . Pour que L soit central, il suffit que $\pi(L) \in \pi(A)'$. En fait, nous allons montrer mieux, à savoir que L est central dans B . Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $\rho \in P(A)$, $\pi(L)/H_\rho = 1_{H_\rho}$ ou 0 . Soient donc $\rho \in P(A)$, et $\xi \in H_\rho$, $\|\xi\| = 1$. La forme φ : $a \longmapsto (\pi(a)\xi|\xi)$ est pure sur A . On a donc

$$(\pi(L)\xi|\xi) = \varphi(L) = \widetilde{L}(\varphi) = \ell(\varphi) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad .$$

Si c'est 1 , on a $\pi(L)(\xi) = \xi$, comme $\|\pi(L)\| = \|L\| \leq 1$; si c'est 0 , $\pi(L)^{1/2}(\xi) = 0$. Ainsi tout vecteur ξ de H_ρ est vecteur propre de $\pi(L)$, ce qui n'est possible que si $\pi(L)_{|H_\rho} = 1_{H_\rho}$ ou 0 .

Reste à montrer que F est unitairement invariante. Soit u un unitaire de A . On veut $u^* Fu \subset F$. Pour cela, il suffit de voir que

$$\rho(u^*.u) \in F , \qquad \forall\ \rho \in \mathcal{E}(F) = F \cap P(A) \quad ,$$

ou encore

$$\ell(\rho(u^*.u)) = 0 , \qquad \forall\ \rho \in F \cap P(A) \quad .$$

Or,

$$\ell(\rho(u^*.u)) = \rho(u^* Lu) = \rho(L) = \ell(\rho) = 0 \quad ,$$

par définition de ρ , puisque L est central.

(a) $\iff$ (b) est immédiat d'après 6.1, car F unitairement invariante implique $F_\perp$ bilatère.

(c) $\Longrightarrow$ (d) est toujours vrai. Reste (d) $\Longrightarrow$ (c) . Pour cela reprenons la démonstration de (d) $\Longrightarrow$ (a) . A la face fermée parallélisable F , il correspond une fonction affine s. c. i. ℓ sur $E(A)$, valant 0 sur F , et 1 sur F' , et un projecteur central L de A'' , tel que $\widetilde{L} = \ell$. Si $f \in E(A)$, f s'écrit $f = \alpha f_1 + (1-\alpha)f_2$, avec $f_1 \in F$, $f_2 \in F'$, et $0 \leq \alpha \leq 1$. Le fait que $f_1 \in F$ peut s'écrire $\ell(f_1) = f_1(L) = 0$, et que $f_2 \in F'$, entraîne

$$\ell(f_2) = f_2(L) = 1 , \qquad \text{soit} \quad f_2(1 - L) = 0 \quad .$$

Si $a \in A$,

$$f(LaL) = (1 - \alpha)\ f_2(LaL) \quad ,$$

car $f_1(LaL) = 0$, et

$$f((1 - L)\ a(1 - L)) = \alpha f_1((1 - L)\ a(1 - L)) \quad ,$$

car $f_2((1 - L)\ a(1 - L)) = 0$; il en résulte que f_1 et f_2 sont entièrement déterminés par f , ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

COROLLAIRE A.1.4. - Sous les hypothèses du théorème 6.1, on a, pour un état $f \in E(A)$:

(a) $f \in F \iff f(I) = 0$;

(b) $f \in F' \iff \|f\| = \|f_{|I}\|$.

Démonstration. - Le (a) n'est autre que 5.1. Montrons (b). Si $f \in F'$, on a, avec les notations précédentes, $\ell(f) = f(L) = 1$, et donc

$$\|f_{|I}\| \geq \sup |f(u_\lambda)| = f(L) = 1 \quad .$$

D'où $1 = \|f\| = \|f_{|I}\|$. Réciproquement, si $\|f\| = \|f_{|I}\| = 1$, on a, d'après [6], 2.4.3,

$$f(L) = \lim(f(u_\lambda)) = \|f_{|I}\| = 1 \quad ,$$

et donc $f \in F'$.

Remarque. - Cela redonne la décomposition 2.11.7 de [6] dans le cas unitaire. Cela laisse supposer qu'un théorème, du genre 6.1, est valable dans le cas sans unité.

Il est utile d'énoncer le corollaire suivant, où $\mathcal{P}_i$ désigne l'ensemble des projecteurs s. c. i. de A'' .

COROLLAIRE A.1.5.

(α) L'application $p \longmapsto 1 - \tilde{p}$ est une bijection de $\mathcal{P}_i$ sur $\mathrm{Car}(E(A))$.

(β) L'application $f \longmapsto \{f = 1\}$ est une bijection de $\mathrm{Car}(E(A))$ sur $\mathfrak{F}_p(E(A))$.

(γ) L'application $F \longrightarrow F_\perp$ est une bijection de $\mathfrak{F}_p(E(A))$ sur l'ensemble des idéaux bilatères fermés de A .

A.2. Démonstration de la proposition 7.4.

Dans un sens, c'est facile. Soit f une fonction définie sur $P(A)$, 2A-facialement continue. D'après [12], théorème 12, f se prolonge de manière unique en une forme affine continue $\bar{f}$ sur $E(A)$. Soit maintenant z l'élément de A , tel que $\tilde{z} = \bar{f}$. Puisque $\bar{f}$ est constante sur chaque face F_ρ , $\rho \in P(A)$, on a

$\rho(z) = f(\rho) = f(\rho(u^*.u)) = \rho(u^*.zu)$, $\forall\ \rho \in P(A)$, $\forall$ u unitaire de A .

Il en résulte que $z = u^* zu$, soit $uz = zu$, autrement dit, z commute à tout unitaire de A , donc $z \in Z$.

Pour la réciproque, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME A.2.1. - <u>L'application</u> $\varphi : f \longmapsto f_{|Z}$ <u>est affine continue de</u> E(A) <u>sur</u> E(Z) , <u>dont la restriction à</u> P(A) <u>est une application de</u> P(A) <u>sur</u> P(Z) , <u>continue pour les topologies</u> 2A-<u>faciales</u>.

<u>Démonstration</u>. - Cette application est évidemment continue. Elle est surjective d'après [6], 2.10.1. Montrons que, si $\rho \in P(A)$, $\rho_{|Z} \in P(Z)$, autrement dit $\rho_{|Z}$ est un caractère. Soient π_ρ et ξ_ρ la représentation et le vecteur associés ; comme π_ρ est irréductible, $\pi_\rho(Z) \subset \pi_\rho(A)'$ se réduit aux scalaires ([6], 2.3.1). Donc

$$\rho(z) = \pi_\rho(z)(\xi_\rho|\xi_\rho) = \pi_\rho(z) , \qquad \forall\ z \in Z ,$$

car $\|\xi_\rho\| = 1$. Mais alors,

$$\rho(az) = (\pi_\rho(az)\xi_\rho|\xi_\rho) = (\pi_\rho(a)\ \pi_\rho(z)\xi_\rho|\xi_\rho) = \pi_\rho(a)(\pi_\rho(z)\xi_\rho|\xi_\rho) = \rho(a)\ \rho(z) ,$$
$$\forall\ z \in Z , \quad \forall\ a \in A .$$

En particulier, $\rho_{|Z}$ est un caractère. Reste à montrer la continuité pour les topologies 2A-faciales. Montrons que, si F est une face fermée (invariante) de E(Z) , $G = \{f \in E(A) \mid f_{|Z}\}$ est une face unitairement invariante. Or il est bien connu que G est une face (même démonstration que [6], 2.10.1) ; et que G soit unitairement invariante est immédiat, puisque $\rho_{|Z} = \rho(u^*.u)_{|Z}$, $\forall$ u unitaire de A .

Retournons maintenant à la démonstration de 7.4. Soit $z \in Z$. Par la transformation de Gel'fand, z s'identifie à une fonction continue $\mathcal{G}(z)$ sur $Sp(Z) = P(Z)$ muni de la topologie faible. Mais, puisque E(Z) est un simplexe de Bauer, cette topologie coïncide avec la topologie 2A-faciale sur P(Z) ([12], 25). D'après le lemme, l'application $\mathcal{G}(z)$ se relève en une fonction 2A-facialement continue $\tilde{z}$ sur E(A) .

A.3. Démonstration du théorème 7.5.

Nous avons remarqué dans la démonstration du lemme A.2.1 que, si $\rho \in P(A)$, $\pi_{\rho|Z}$ était scalaire, en sorte qu'on pouvait écrire $\pi_\rho(z) = \rho(z)$ pour tout $z \in Z$. Il en résulte, en particulier, que

(A.3.1) $$Z \cap Ker(\pi_\rho) = Z \cap Ker(\rho) , \qquad \forall\ \rho \in P(A) .$$

Cela étant, supposons A centrale, et soit F une face fermée invariante de $E(A)$. Soit $G = \varphi(F)$; c'est une face fermée ([13], lemme 28). Montrons que $F = \varphi^{-1}(G)$. Pour cela, il suffit que $\mathcal{E}(\varphi^{-1}(G)) \subset \mathcal{E}(F)$. Prenons donc un état pur ρ dans F, et $\rho' \in P(A)$, tels que $\rho'_{|Z} = \rho_{|Z}$. D'après (A.3.1),

$$\operatorname{Ker}(\pi_\rho) \cap Z = \operatorname{Ker}(\rho) \cap Z = \operatorname{Ker}(\rho') \cap Z = \operatorname{Ker}(\pi_{\rho'}) \cap Z \quad ,$$

de sorte que, comme A est centrale, $\operatorname{Ker}(\pi_\rho) = \operatorname{Ker}(\pi_{\rho'})$, donc $\operatorname{Ker}(\rho') \supset \operatorname{Ker}(\pi_\rho)$ ou encore $\rho' \in F_\rho \subset F$, d'après 7.2.

Supposons maintenant que A ne soit pas centrale. Alors, il existe ρ et ρ' appartenant à $P(A)$, tels que $\operatorname{Ker}(\pi_\rho) \cap Z = \operatorname{Ker}(\pi_{\rho'}) \cap Z$ et $\operatorname{Ker}(\pi_\rho) \neq \operatorname{Ker}(\pi_{\rho'})$. L'égalité des noyaux sur Z implique $\rho_{|Z} = \rho'_{|Z}$, donc $\rho' \in \varphi^{-1}(\varphi(F_\rho))$. Distinguons deux cas :

(1) L'un des noyaux est contenu dans l'autre, par exemple $\operatorname{Ker}(\pi_\rho) \supsetneq \operatorname{Ker}(\pi_{\rho'})$. Alors $\rho' \notin F_\rho$. En effet, si on avait $\rho' \in F_\rho$, on aurait $\rho'(\operatorname{Ker}(\pi_\rho)) = 0$ d'après 7.2, et donc $\operatorname{Ker}(\pi_{\rho'}) \supset \operatorname{Ker}(\pi_\rho)$ d'après [6], 2.4.11, ce qui serait absurde.

(2) Aucun des noyaux n'est contenu dans l'autre. Alors, $\operatorname{Ker}(\rho') \not\supset \operatorname{Ker}(\pi_\rho)$, car si on avait l'inclusion, on aurait $\operatorname{Ker}(\pi_{\rho'}) \supset \operatorname{Ker}(\pi_\rho)$ d'après [6], 2.4.10. Finalement, on a encore $\rho' \notin F_\rho$ d'après 7.2.

Dans les deux cas, $\rho' \notin F_\rho$ et $\rho' \in \varphi^{-1}(\varphi(F_\rho))$, soit $F_\rho \not\supset \varphi^{-1}(\varphi(F_\rho))$, ce qui exprime que F_ρ n'est l'image réciproque d'aucune face fermée de $E(Z)$. Il résulte du théorème 20 (b) de [12] que la topologie 2A-faciale n'est pas irréductible.

A.4. Démonstration du théorème 8.4.

Soit F une face fermée de $E(A)$. D'après le théorème 5.1, il existe un idéal à gauche fermé de A, tel que $F = I^\perp$. Soit (u_λ) une unité approchée filtrante croissante de I. Il lui correspond une famille filtrante croissante $\widetilde{u}_\lambda$ de fonctions affines continues sur $E(A)$, dont l'enveloppe supérieure ℓ est affine s. c. i. Puisque, pour tout λ, $0 \leq u_\lambda \leq 1$, alors $0 \leq \ell \leq 1$; de plus, si $f \in F$, $\widetilde{u}_\lambda(f) = f(u_\lambda) = 0$, donc $\ell(f) = 0$. Montrons qu'inversement, $\ell(f) = 0$, pour $f \in E(A)$, implique $f \in F$, c'est-à-dire que $f(y) = 0$ pour tout $y \in I^+$. Or, il résulte de la démonstration de 1.7.2 de [6], que pour tout $y \in I^+$ et tout entier n, il existe λ tel que

$$0 \leq y \leq \left(\frac{1}{n} + \|y\|\right) u_\lambda \quad . \tag{A.4.1}$$

Or, si $\ell(f) = 0$, a fortiori $\widetilde{u}_\lambda(f) = 0$ pour tout λ, donc

$$\widetilde{y}(f) \leq \left(\frac{1}{n} + \|y\|\right) \widetilde{u}_\lambda(f) = 0 \quad .$$

Ainsi, f annule I^+, donc, d'après 5.1, $f \in F$.

Montrons finalement que, si $u \in L(F)$, $u \leqslant \ell$, ce qui achèvera de montrer 8.4. Soit $a \in A$ tel que $\tilde{a} = u$. On a $0 \leqslant a \leqslant 1$. De plus, u est nulle sur F, donc $a \in F_\perp = I$. On peut appliquer (A.4.1). Pour tout n, il existe λ tel que

$$0 \leqslant u \leqslant \left(\frac{1}{n} + 1\right) \tilde{u}_\lambda \leqslant \left(\frac{1}{n} + 1\right) \ell \quad .$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $u \leqslant \ell$.

C. Q. F. D.

INDEX DES DÉFINITIONS

INDEX DES NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (Erik) and ANDERSEN (T. B.). - Split faces of compact convex sets, Aarhus Universitet, Reprint Series, 1968/69, n° 32.

[2] COMBES (François). - Sur les faces d'une C^*-algèbre, Bull. Sc. math., t. 93, 1969, p. 37-62.

[3] COMBES (François). - Quelques propriétés des C^*-algèbres (à paraître).

[4] DELAROCHE (Claire). - Sur les centres des C^*-algèbres, Bull. Sc. math., t. 91, 1967, p. 105-112.

[5] DIEUDONNÉ (Jean). - Eléments d'analyse, tomes 1 et 2. - Paris, Gauthier-Villars, 1968 (Cahiers scientifiques, 28 et 31).

[6] DIXMIER (Jacques). - Les C^*-algèbres et leurs représentations. - Paris, Gauthier-Villars, 1964 (Cahiers scientifiques, 29).

[7] EFFROS (E. G.). - Order ideals in a C^*-algebra and its dual, Duke math. J., t. 30, 1963, p. 391-412.

[8] ELLIS (A. J.). - An intersection property for state spaces, J. London math. Soc., t. 43, 1968, p. 173-176.

[9] GODEMENT (Roger). - Cours d'algèbre. - Paris, Hermann, 1963 (Enseignement des Sciences, 5).

[10] PHELPS (R. R.). - Extreme points in function algebras, Duke math. J., t. 32, 1965, p. 267-277.

[11] PROSSER (Reese T.). - On the ideal structure of operator algebras. - Providence, American mathematical Society, 1963 (Memoirs of the American mathematical Society, 45).

[12] ROGALSKI (Marc). - Topologie faciale dans les convexes compacts, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 523-526.

[13] ROGALSKI (Marc). - Etude du quotient d'un simplexe par une face fermée, et application à un théorème de Alfsen ; quotient par une relation d'équivalence, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 2, 25 p.

[14] ROGALSKI (Marc). - Topologies faciales dans les convexes compacts ; calcul fonctionnel et décomposition spectrale dans le centre d'un espace $A(X)$, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/70, n° 3.

(Texte reçu le 15 janvier 1970)

Alain GOULLET de RUGY
Att. Rech. CNRS
10 parc du Château
78 - LOUVECIENNES