Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Nessim Sibony

Sur la notion de part pour les ensembles convexes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 8 (1968-1969), exp. n° 4, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1968-1969__8__A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
8e année, 1968/69, n° 4, 10 p.

SUR LA NOTION DE PART POUR LES ENSEMBLES CONVEXES

par Nessim SIBONY

Cet exposé est basé, avec quelques améliorations de détail, sur un article à paraître, de H. BAUER et H. BEAR ; j'ai rajouté quelques propositions bien connues dans le cas des algèbres de fonctions continues sur un espace compact.

1. Définition de la notion de part, et étude de la distance associée.

Soient L un espace vectoriel réel, C un convexe de L ne contenant pas de droite.

On dira que le segment $[x , y]$ se prolonge par ε , et on notera $[x , y](\varepsilon)$, si x , y , $x + \varepsilon(x - y)$ et $y + \varepsilon(y - x)$ appartiennent à C .

On écrira $x \sim y$, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x , y](\varepsilon)$; il est clair que c'est une relation d'équivalence sur C .

LEMME 1. - Soient C un convexe ne contenant pas de droite, et x , y , z trois points de C . Si $[x , z](a)$ et $[z , y](b)$, alors on a $[x , y](c)$ ou

$$(1 + a^{-1})(1 + b^{-1}) = (1 + c^{-1}) \quad .$$

La vérification est élémentaire.

Une classe d'équivalence, suivant la relation précédente, sera appelée une part.

Définissons la distance suivante sur une part :

$$(x , y) \to d(x , y) = \inf\{\log(1 + \varepsilon^{-1}) \; ; \; [x , y](\varepsilon)\} \quad .$$

LEMME 2. - d est une métrique sur chaque part de C .

Démonstration. - Si $d(x , y) = 0$, sachant que le convexe C ne contient pas de droite, on a $x = y$. L'inégalité triangulaire résulte du lemme 1.

Remarque. - On peut prolonger d à C en posant $d(x , y) = \infty$, si x et y sont dans des parts différentes. Si on pose $d^* = \frac{d}{1 + d}$, on obtient ainsi une distance sur C pour laquelle les parts sont des ensembles à la fois ouverts et fermés ; la relation $x \sim y$ équivaut alors à $d^*(x , y) < 1$.

Nous allons donner une caractérisation des parts d'un convexe fermé dans un e. l. c. s. à l'aide d'inégalités du type des inégalités de Harnack.

PROPOSITION 1. - Soient E un e. l. c. s., C un convexe fermé de E ne contenant pas de droite ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $[x , y]$ se prolonge par ε ;

(2) Pour toute fonction concave positive sur C ,

$$(1 + \varepsilon^{-1})^{-1} u(y) \leqslant u(x) \leqslant (1 + \varepsilon^{-1}) u(y) .$$

Démonstration. - (1) $\Longrightarrow$ (2) . Par hypothèse, $x' = x + \varepsilon(x - y)$ appartient à C , donc

$$x = \frac{1}{1 + \varepsilon} x' + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} y , \qquad x' \in C .$$

Puisque u est concave positive sur C ,

$$u(x) \geqslant \frac{1}{1 + \varepsilon} u(x') + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} u(y) \geqslant \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} u(y) .$$

Donc $u(y) = 0$ dès que $u(x) = 0$; par suite, une fonction concave positive sur C est, soit identiquement nulle sur une part, soit strictement positive sur elle. Par un argument symétrique, on obtient $u(y) \geqslant \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} u(x)$, d'où la relation à démontrer.

(2) $\Longrightarrow$ (1) . Supposons $x' = x + \varepsilon(x - y) \notin C$, et $x , y \in C$. Soit

$$x = \frac{1}{1 + \varepsilon} x' + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} y , \qquad \text{avec } x' \notin C ;$$

d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe u affine continue positive sur C avec $u(x') < 0$, d'où $u(x) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} u(y)$, ce qui est contraire à $u(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u(y)$, et par suite $[x , y](\varepsilon)$.

PROPOSITION 2. - Soient E un e. l. c. s., K un convexe compact de E ; les relations suivantes sont équivalentes :

(i) $[x , y]$ se prolonge par ε ;

(ii) Il existe des mesures maximales μ_x , μ_y de résultantes respectives x et y telles que

$$(1 + \varepsilon^{-1})^{-1} \mu_y \leqslant \mu_x \leqslant (1 + \varepsilon^{-1}) \mu_y .$$

Démonstration. - (i) $\Longrightarrow$ (ii) . La relation $[x , y](\varepsilon)$ entraîne que les points $x' = x + \varepsilon(x - y)$ et $y' = y + \varepsilon(y - x)$ appartiennent à K ; on écrira $x = \lambda x' + (1 - \lambda) y'$, $y = \lambda y' + (1 - \lambda) x'$, avec $\lambda = (1 + \varepsilon)/(1 + 2\varepsilon)$.

Soient μ et ν des mesures maximales de résultantes respectives x' et y'. Posons $\mu_x = \lambda\mu + (1-\lambda)\nu$, $\mu_y = \lambda\nu + (1-\lambda)\mu$. Il est clair que μ_x a pour résultante x, et μ_y a pour résultante y. Compte-tenu de

$$\max\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}, \frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = 1 + \varepsilon^{-1} ,$$

on obtient

$$\mu_x \leqslant (1+\varepsilon^{-1})\, \mu_y \qquad \text{et} \qquad \mu_y \leqslant (1+\varepsilon^{-1})\, \mu_x .$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). L'hypothèse implique que, pour toute fonction affine continue, $(1+\varepsilon^{-1})^{-1} u(y) \leqslant u(x) \leqslant (1+\varepsilon^{-1})\, u(y)$, d'où, d'après le même raisonnement que dans la proposition précédente, on a $(x , y)(\varepsilon)$. On peut remarquer que la proposition reste valable si K est un convexe faiblement complet.

Nous allons étudier la topologie définie par la distance d ; pour cela, nous reprenons les hypothèses de la proposition 1 pour les deux corollaires suivants.

On désignera par $\mathcal{A}^+$ l'ensemble des fonctions affines continues positives sur C, et par C^+ l'ensemble des fonctions concaves positives sur C.

COROLLAIRE 1. - On a

$$d(x , y) = \sup\{|\log F(x) - \log F(y)| : F \in \mathcal{A}^+ , F(y) > 0\}$$
$$= \sup\{|\log F(x) - \log F(y)| : F \in C^+ , F(y) > 0\} .$$

Démonstration. - Si $x \sim y$, cela résulte de la proposition 1.

Si $x \not\sim y$, alors on peut supposer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $y + \varepsilon(x - y) \notin C$; donc il existe $F \in \mathcal{A}^+$ telle que $F(y + \varepsilon(x - y)) < 0$, c'est-à-dire

$$(1+\varepsilon)\, F(y) - \varepsilon\, F(x) < 0 ;$$

ceci implique que $F(x) > 0$, et

$$|\log F(x) - \log F(y)| = \log F(x) - \log F(y) > \log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \infty$$

quand ε tend vers 0.

Ceci montre, en particulier, que les fonctions concaves bornées inférieurement sur C sont uniformément continues pour d.

COROLLAIRE 2. - Un système fondamental de voisinages de $x_0 \in C$ pour la métrique d est

$$\{x \in C : |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon , F \in \mathcal{A}^+ , F(x_0) = 1\} ,$$

ou encore

$$\{x \in C : |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon , \quad F \in \mathfrak{a}^+ , \quad 0 < F(y_0) \leqslant 1\} .$$

Cela résulte du corollaire 1, car une suite (x_n) de points de C converge vers x_0 pour d si, et seulement si, $\log F(x_n) \to \log F(x_0)$ uniformément pour $F \in \mathfrak{a}^+$, avec $F(x_0) > 0$; or $\log F(x_n) - \log F(x_0)$ ne change pas si on multiplie F par une constante positive, donc $d(x_n , x_0) \to 0$ est équivalent à

$$F(x_n) \to F(x_0) \quad \text{uniformément pour} \quad F \in \mathfrak{a}^+ \quad \text{avec} \quad F(x_0) = 1 .$$

On suppose à présent que C est un convexe faiblement complet d'un e. l. c. s. E, ne contenant pas de droite ; par suite, d'après un théorème de G. CHOQUET, toute fonction affine continue sur E est différence de deux fonctions de $\mathfrak{a}^+$. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - *Soit* E *un e. l. c. s. muni de la topologie* $\sigma(E , E')$, *et soit* C *un convexe complet de* E *ne contenant pas de droite. Alors* :

1° *La topologie définie par* d *est plus fine que celle induite par* $\sigma(E , E')$;

2° C *est complet pour* d .

Démonstration. - Le 1° résulte du corollaire 2 et de la proposition de G. CHOQUET qui a été rappelée.

Le 2° résulte du fait que chaque point de C a une base de voisinages pour d, fermés pour $\sigma(E , E')$.

2. Cas où le convexe C est un cône saillant. Etude d'un exemple.

Soit C un cône convexe saillant (c'est-à-dire $C \cap (- C) = \{0\}$) dans un espace vectoriel réel E. On notera $\leqslant$ l'ordre défini par C .

PROPOSITION 4. - *Pour deux points* $x , y \in C$, *on a* :

(i) $(x , y)(\varepsilon)$ *si, et seulement si*, $\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} y \leqslant x \leqslant \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) y$;

(ii) $(x , y)(\varepsilon) \iff (\lambda x , \lambda y)(\varepsilon)$, *pour tout* $\lambda > 0$;

(iii) *Si* $(x , y)(\varepsilon)$ *et si* $z \in C$, *alors* $(x + z , y + z)(\varepsilon)$;

(iv) $x \sim \lambda x$, *pour* $\lambda > 0$;

(v) Si $x \sim y$, *alors* $x \sim x + y$.

Démonstration. - (i) est une reformulation de la définition de $(x , y)(\varepsilon)$, en utilisant l'ordre défini par le cône.

(ii) et (iii) découlent de (i). (iv) est évident, et (v) résulte de (iii) et (iv), car $x + y \sim y + y = 2y \sim y \sim x$.

COROLLAIRE 3. - <u>Toute part de</u> C <u>est un sous-cône convexe</u>.

PROPOSITION 5. - <u>La distance</u> d <u>sur</u> C <u>a les propriétés suivantes</u> :

(i) $x \sim y$ <u>et</u> $x \neq 0$, <u>alors</u> $d(x, y) = \inf\{\log a : ax \geqslant y$ <u>et</u> $ay \geqslant x\}$;
(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = d(x, y)$, <u>pour</u> $\lambda > 0$ <u>et</u> $x, y \in C$;
(iii) $d(x + z, y + z) \leqslant d(x, y)$, <u>pour</u> $x, y, z \in C$;
(iv) $d(rx, sx) = |\log r - \log s|$.

<u>Démonstration</u>. - (i), (ii), et (iii), résultent respectivement des (i), (ii), et (iii), de la proposition précédente. (iv) résulte de (i), en observant que $d(rx, sx) = d\left(\frac{r}{s} x, x\right)$.

<u>Exemple</u>. - Soit $\mathfrak{M}(X)$ l'espace des mesures de Radon sur X localement compact, muni de la topologie faible $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$, où $\mathfrak{K}$ désigne l'espace des fonctions continues à support compact. Soit $\mathfrak{M}^+$ le cône des mesures positives, il est convexe saillant et faiblement complet.

D'après la proposition 1, $(\mu \sim \nu) \iff (\exists\, \alpha > 0$ tel que $\frac{1}{\alpha} \nu \leqslant \mu \leqslant \alpha\nu)$. Π_μ désignera la part contenant $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$, et P_μ désignera l'ensemble des fonctions de $L^\infty(\mu)$ bornées inférieurement par un nombre > 0. D'après le théorème de Radon-Nikodym, on a $\Pi_\mu = \{g\mu : g \in P_\mu\}$.

PROPOSITION 6. - <u>Sur une part</u> Π_μ <u>de</u> $\mathfrak{M}^+(X)$, <u>la distance</u> d <u>est topologiquement équivalente à la métrique induite par</u> $L^\infty(\mu)$ <u>sur</u> P_μ.

<u>Démonstration</u>. - Soit $g_0 \in P_\mu$. Posons

$$A_0 = \{u \in \mathfrak{K}_+ : \int u g_0 \, d\mu \leqslant 1\} \qquad \text{et} \qquad B = \{v \in \mathfrak{K} : \int |v| \, d\mu \leqslant 1\} .$$

D'après le corollaire 2, $d(g_n \mu, g_0 \mu) \to 0$ si, et seulement si,

(1) $$\lim \int u(g_n - g_0) \, d\mu = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } u \in A_0 .$$

Supposons $\|g_n - g_0\|_\infty \to 0$, on a

$$\|g_n - g_0\|_\infty = \sup_{v \in B} \left| \int v(g_n - g_0) \, d\mu \right| .$$

Si α est la borne inférieure p. p. de g_0, on a $\int \alpha u \, d\mu \leqslant 1$, pour $u \in A_0$, donc

$$\lim \int u(g_n - g_0)\, d\mu = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } u \in A_0 .$$

Réciproquement, si $d(g_n \mu , g_0 \mu) \to 0$, en décomposant $v \in B$ en sa partie positive et sa partie négative, on voit que $\|g_n - g_0\|_\infty \to 0$.

3. Etude des mesures représentatives de points d'une même part.

Nous allons démontrer un lemme qui nous servira par la suite.

LEMME 3. - *Si* $x , y \in C$ *et* $\Phi(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y$, *alors* Φ *est continue sur* $]0 , 1[$; *si* $x \sim y$, Φ *est continue sur* $[0 , 1]$.

Démonstration. - La première assertion résulte de la seconde, car pour deux points x , y de C , $x \neq y$, le segment $]x , y[$ est dans une part, et pour $0 < \lambda_0 < 1$, $\Phi(\lambda_0)$ est combinaison convexe de points $\Phi(\lambda_1)$, $\Phi(\lambda_2)$ tels que $0<\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2<1$.

Supposons $x \sim y$, montrons que $d(\Phi(\lambda) , y) \to 0$ quand $\lambda \to 0$; la continuité à gauche pour $\lambda_0 \in]0 , 1[$ en résultera ; en effet,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda' x + (1 - \lambda')\, \Phi(\lambda_0) \qquad \text{avec } \lambda' = \lambda'(\lambda) ,$$

$\lambda' \to 0$ quand $\lambda \to \lambda_0$ à gauche ; un raisonnement semblable montrerait la continuité à droite. Les relations suivantes sont immédiates :

$$y + \varepsilon(y - x) = y + \frac{\varepsilon}{\lambda}(y - \Phi(\lambda)) \quad \text{et} \quad x + \varepsilon(x - y) = \Phi(\lambda) + \frac{1 - \lambda + \varepsilon}{\lambda}(\Phi(x) - \lambda) ;$$

donc, si $[x , y](\varepsilon)$, $[\Phi(x) , y]$ se prolonge par le minimum de $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ et $\frac{1 - \lambda + \varepsilon}{\lambda}$; par suite, $d(\Phi(\lambda) , y) \to 0$ quand $\lambda \to 0$.

PROPOSITION 7. - *Les parts de* C *sont les composantes connexes de* C *pour la métrique* d .

Démonstration. - Elle résulte du lemme 3.

Remarque. - Soient E un e. l. c. s., K un simplexe compact de E . Soit Γ l'adhérence des points extrémaux de K ; on sait que, pour tout $x \in K$, il existe une mesure maximale unique μ_x représentant x .

Si d et d' désignent respectivement les métriques introduites précédemment sur K et $\mathfrak{M}^+(\Gamma)$, alors l'application $(K , d) \to (\mathfrak{M}^+(\Gamma) , d')$, qui à x fait correspondre μ_x , est une isométrie. En effet, sur chaque composante connexe de (K , d) , c'est-à-dire sur chaque part, on a

$$[x , y](\varepsilon) \iff (1 + \varepsilon^{-1})^{-1} \mu_y \leq \mu_x \leq (1 + \varepsilon^{-1})\, \mu_y , \quad \text{d'après la proposition 2} ,$$

en tenant compte de l'unicité des mesures représentatives maximales ; la définition des distances d et d' montre alors qu'il s'agit d'une isométrie.

Soient K un convexe compact dans un e. l. c. s., $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses points extrémaux, et Γ leur adhérence. $\mathcal{M}_x$ désignera les mesures de probabilité portées par Γ et de résultante x ; un ensemble sera dit $\mathcal{M}_x$ nul, s'il est de mesure nulle pour toute mesure de $\mathcal{M}_x$.

PROPOSITION 8. - K <u>étant un convexe compact dans un e. l. c. s., si</u> $x \sim y$, <u>alors les ensembles</u> $\mathcal{M}_x$ <u>nuls et</u> $\mathcal{M}_y$ <u>nuls coïncident.</u>

<u>Démonstration</u>. - On sait que $x \sim y$ implique l'existence de deux mesures maximales $\mu_x \in \mathcal{M}_x$ et $\mu_y \in \mathcal{M}_y$ telles que $\frac{1}{C}\mu_y \leqslant \mu_x \leqslant C\mu_y$.

Posons $\nu_y = (\mu_y - \frac{1}{C}\mu_x) + \frac{1}{C}\nu_x$, où $\nu_x \in \mathcal{M}_x$; ν_y est une mesure $\geqslant 0$ de masse 1 et de résultante y telle que $\nu_x \leqslant C\nu_y$.

Soit A un ensemble $\mathcal{M}_y$ nul, et soit $\nu_x \in \mathcal{M}_x$. Il existe, comme on vient de le voir, $\nu_y \in \mathcal{M}_y$ telle que $\nu_x \leqslant C\nu_y$, par suite $\nu_x(A) = 0$, d'où la proposition. On remarquera que, si ν_x est maximale, ν_y l'est aussi.

Avec les hypothèses de la proposition précédente, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 9. - <u>Si</u> $x \sim y$ <u>et si</u> x <u>se représente par une mesure maximale unique, il en est de même de</u> y.

<u>Démonstration</u>. - Sinon, soient ν_y et ν'_y deux mesures maximales représentant y ; d'après la démonstration précédente, $\nu_y \leqslant C\nu_x$ et $\nu'_y \leqslant C\nu_x$, car il existe une mesure maximale unique représentant x. Donc $\nu_y = p\nu_x$ et $\nu'_y = p'\nu_x$ avec p, $p' \in L^\infty(\nu_x)$, $p - p'$ étant bornée, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$1 + \varepsilon(p - p') > 0 \quad [\nu_x \text{ p. p.}] .$$

$[1 + \varepsilon(p - p')]\,\nu_x$ représente x, et elle est maximale ; d'où, d'après l'hypothèse d'unicité, $p = p'$ et $\nu_y = \nu'_y$.

4. Théorème de sélection pour la distance sur les parts.

Il s'agit d'une généralisation du théorème suivant de MICHAEL.

THÉORÈME. - <u>Soient</u> T <u>un espace topologique paracompact,</u> Φ <u>une fonction multivoque s. c. i. de</u> T <u>dans un espace de Banach</u> E, <u>telle que, pour tout</u> $t \in T$, $\Phi(t)$ <u>soit un convexe fermé non vide ; alors il existe une sélection continue de</u> Φ, <u>c'est-à-dire une fonction continue</u> $f : T \to E$ <u>telle que</u> $f(t) \in \Phi(t)$ <u>pour tout</u> t.

Il s'agit ici de remplacer l'espace de Banach E par un ensemble convexe C, muni d'une métrique "convexe" telle que C soit complet.

Définition. - Soit C un convexe dans un espace vectoriel E ; une distance d sur C sera dite convexe, si :

1° Pour tout ensemble convexe S et pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{y \in C : d(y , S) < \varepsilon\}$$

est convexe ;

2° L'application $(\lambda , x , y) \to \lambda x + (1 - \lambda)y$ de $[0 , 1] \times C \times C$ dans C est continue.

Remarque. - La distance d introduite précédemment sur un convexe C ne contenant pas de droite est une distance convexe, en effet :

1° Si $[x , x'](\varepsilon)$ et $[y , y'](\varepsilon)$, alors $[\lambda x + (1 - \lambda)y , \lambda x' + (1 - \lambda)y'](\varepsilon)$, d'où

$$d(\lambda x + (1 - \lambda)y , \lambda x' + (1 - \lambda)y') \leqslant \max[d(x , x') , d(y , y')] ,$$

et, par suite, l'ensemble $\{y : y \in C , d(y , S) < \varepsilon\}$ est convexe si S est convexe.

2° Soient $x , y , x_0 , y_0 \in C$, et $\lambda , \lambda_0 \in [0 , 1]$; alors

$$\begin{aligned} & d(\lambda x + (1 - \lambda)y , \lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0)y_0) \\ & \leqslant d(\lambda x + (1 - \lambda)y , \lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0) + d(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0 , \lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0)y_0) \\ & \leqslant \max[d(x , x_0) , d(y , y_0)] + d(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0 , \lambda_0 x_0 + (1 - \lambda)y_0) . \end{aligned}$$

Le comportement du second terme a été étudié au lemme 3.

On rappelle qu'une application multivoque d'un espace topologique T dans un espace topologique Y est dite s. c. i. si, pour tout ouvert $U \subset Y$, l'ensemble $\{t : \Phi(t) \cap U \neq \emptyset\}$ est ouvert dans T.

LEMME 4. - Soient T un espace paracompact, C un convexe muni d'une distance convexe d, et Φ une application multivoque s. c. i., $\Phi : T \to C$, telle que $\Phi(t)$ est convexe non vide ; alors, pour tout $r > 0$, il existe une fonction continue $f : T \to C$, telle que $d(\Phi(t) , f(t)) < r$ pour tout $t \in T$.

Démonstration. - Soit $U_y = \{t \in T : d(y , \Phi(t)) < r\}$. Φ étant s. c. i., U_y est ouvert, $(U_y)_{y \in C}$ est un recouvrement ouvert de T qui est paracompact, donc il existe un raffinement de (U_y) localement fini, $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$; soit $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$, une partition de l'unité associée au recouvrement (V_α), i. e. $p_\alpha = 0$ en dehors de V_α et $\sum_{\alpha\in A} p_\alpha(t) = 1$ pour tout $t \in T$. Pour chaque α, choisissons y_α tel que $V_\alpha \subset U_{y_\alpha}$, et posons $f(t) = \sum_\alpha p_\alpha(t)\, y_\alpha$; t_0 étant fixé, il existe un voisinage $W(t_0)$ de t_0 qui rencontre seulement un nombre fini de V_α ; par suite, dans $W(t_0)$, $f(t) = p_{\alpha_1}(t)\, y_{\alpha_1} + \dots + p_{\alpha_n}(t)\, y_{\alpha_n}$, α étant une métrique convexe, f est continue sur $W(t_0)$ donc sur T ; par ailleurs, pour $t \in V_\alpha \subset U_{y_\alpha}$, $f(t)$ est combinaison convexe de points qui sont à une distance de $\Phi(t)$ inférieure à ε, donc, d'après la condition 1° sur d, on a $d(f(t), \Phi(t)) < r$.

THÉORÈME 1. - Soient T un espace paracompact, et C un ensemble convexe complet pour une métrique convexe d. Soit Φ une fonction multivoque s. c. i. de T dans C telle que $\Phi(t)$ soit convexe fermé non vide pour tout $t \in T$; alors il existe une fonction continue $f : T \to C$, telle que $f(t) \in \Phi(t)$.

Démonstration. - Il suffit, en utilisant le lemme 4, de reprendre la démonstration de MICHAEL.

COROLLAIRE 4. - Soit C un convexe dans un e. l. c. s. E complet pour $\sigma(E, E')$, et soit Π une part de C ; si Φ est une fonction multivoque s. c. i.,

$$\Phi : T \to \Pi ,$$

avec $\Phi(t)$ convexe fermé non vide, il existe une sélection continue de Φ.

Démonstration. - On a vu que d est une métrique convexe et que, si C est faiblement complet, il est complet pour d ; par suite Π, qui est fermé pour d, est complet.

COROLLAIRE 5. - Si $C = \mathfrak{M}_+(X)$, où X est localement compact, $\Phi : T \to \Pi$ vérifiant les hypothèses du corollaire 4, alors il existe une sélection continue de Φ, soit f, avec $f(t) = g_t\, \mu$, où l'application $t \to g_t$ est continue de T dans $L^\infty(\mu)$.

Démonstration. - Elle résulte du corollaire 4 et de l'étude des parts de $\mathfrak{M}^+(X)$.

Remarque. - Soient X un espace compact, et B un sous-espace vectoriel de $C_R(X)$; on suppose que B sépare les points de X et contient les constantes. Soit $T_B = \{F \in B' : F \geqslant 0 , F(1) = 1\}$. T_B est un convexe compact pour $\sigma(B', B)$, X peut être plongé dans T_B ; les parts de X seront les traces des parts de T_B sur X ; par suite, pour $x, y \in X$, on a $x \sim y$ si, et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha^{-1} u(y) \leqslant u(x) \leqslant \alpha u(y)$ pour tout $u \geqslant 0$, $u \in B$.

THÉORÈME 2. - Soient B un espace de fonctions du type précédent, Δ une part de X, et supposons qu'il existe une part $\Pi_\mu \subset \mathfrak{M}_+^1(X)$ telle que $\mathfrak{M}_x^1 \cap \Pi_\mu \neq \emptyset$ pour tout $x \in \Delta$. Si l'application $x \to \mathfrak{M}_x \cap \Pi_\mu$ est s. c. i. par rapport aux distances sur les parts Δ et Π_μ, alors il existe une application continue : $\Delta \to \Pi_\mu$, $x \to g_n$, $\mu = \mu_x$ telle que $\mu_x \in \mathfrak{M}_x$; par suite, $x \to g_n$ est continue de Δ dans $L^\infty(\mu)$.

Démonstration. - Il est clair que (Δ, d) est paracompact, et que $\mathfrak{M}_x \cap \Pi_\mu$ est convexe fermé pour (Π_μ, d'), d'où le théorème.

On peut ajouter que l'hypothèse de l'existence de μ telle que $\mathfrak{M}_x \cap \Pi_\mu \neq \emptyset$, pour tout $x \in \Delta$, est vérifiée si l'espace des mesures réelles, orthogonales à B, est de dimension finie ; il est cependant facile de construire des exemples où $\mathfrak{M}_x \cap \Pi_\mu$ est non vide et où cependant l'application $x \to \mathfrak{M}_x \cap \Pi_\mu$ n'est pas s. c. i.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.) and BEAR (H. S.). - The part metric in convex sets (à paraître).

[2] BEAR (H. S.) and WEISS (M. L.). - An intrinsic metric for parts, Proc. Amer. math. Soc., t. 18, 1967, p. 812-817.

[3] MICHAEL (E.). - Continuous selections, I, Annals of Math., t. 63, 1956, p. 361-382.

(Texte reçu le 15 septembre 1969)

Nessim SIBONY
Ass. Fac. Sc. Orsay
20 rue de la Glacière
75 - PARIS 13