Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gabriel Mokobodzki

Densité relative de deux potentiels comparables obtenue sans filtres rapides

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 8 (1968-1969), exp. nº 1, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1968-1969__8__A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
8e année, 1968/69, n° 1
7 et 14 novembre 1968

DENSITÉ RELATIVE DE DEUX POTENTIELS COMPARABLES
OBTENUE SANS FILTRES RAPIDES

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction. - Dans un précédent travail, j'avais construit en utilisant des filtres rapides ([2]), la densité d'un potentiel par rapport à un autre, analogue à la densité d'une mesure par rapport à une autre mesure, lorsque cela a un sens. Dans ce travail, je me débarasse des filtres rapides, dont la construction nécessitait l'hypothèse du continu, en montrant qu'un filtre de Fréchet ordinaire suffit.

Je me place dans un cadre limité ; les extensions possibles des résultats obtenus seront indiquées en appendice, ou feront l'objet d'un exposé ultérieur.

Notations et définitions. - On se donne un espace compact Ω , un semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{C}(\Omega)$, fortement continu, c'est-à-dire que

$$\lim_{h\to 0} P_{t+h} f = P_t f , \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(\Omega) , \quad \text{tout } t \geqslant 0 ,$$

et

$$\text{pour } t = 0 , \qquad P_0 f = f ,$$

intégrable, c'est-à-dire que

$$\int_0^\infty P_t f = Vf \in \mathcal{C}(\Omega) , \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(\Omega) ,$$

et sous-markovien, autrement dit que

$$P_t 1 \leqslant 1 , \qquad \forall t \geqslant 0 .$$

Une fonction excessive est une fonction numérique universellement mesurable positive v , telle que

$$P_t v \leqslant v \quad \text{pour tout } t \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} P_t v = v .$$

Pour toute $f \geqslant 0$ universellement mesurable bornée, Vf est excessive.

Nous désignerons respectivement par S^* et S les cônes des fonctions excessives et des fonctions excessives continues.

Le cône convexe S^* définit un ordre sur lui-même que nous appellerons <u>spécifique</u>, et l'on écrira, pour v_1 , $v_2 \in S^*$,

$$(v_1 \prec v_2) \iff ((v_2 - v_1) \in S^*)$$

(lire " v_1 spécifiquement plus petit que v_2 ").

L'exemple le plus simple d'une telle situation s'obtient en prenant des fonctions excessives de la forme Vf_1 et Vf_2 , où f_1 , f_2 sont universellement mesurables bornées et $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$.

Réciproquement, on se propose de montrer que si v_1 , $v_2 \in S^*$, $v_1 \prec v_2$, et $v_2 = Vf_2$ avec f_2 universellement mesurable bornée, positive, alors il existe $f_1 \geqslant 0$, universellement mesurable, $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$, telle que $v_1 = Vf_1$.

On va définir pour cela un opérateur, <u>non nécessairement linéaire</u>, qui sera un inverse du noyau V .

Posons

$$A_t = \frac{1}{t}(I - P_t)$$

et

$$B_t = \frac{1}{t}\int_0^t P_s \, ds \quad .$$

Le pseudo-inverse de V sera défini, pour toute f universellement mesurable bornée, par

$$Af = \liminf_{t \to 0} A_t f \quad .$$

On sait, par la théorie générale des semi-groupes, que pour toute $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $A(Vf) = f$.

Dans une première étape, on va montrer que pour toute $f \geqslant 0$, universellement mesurable bornée,

$$V(A[Vf]) = Vf \quad ,$$

de sorte que A , opérant <u>sur l'image de</u> V , peut être considéré comme inverse de V .

Dans la deuxième et dernière étape, il faudra montrer que les fonctions excessives, spécifiquement majorées par des fonctions de la forme Vf , $f \geqslant 0$, sont dans l'image de V .

(A) <u>Première étape</u>. - Par hypothèse, la fonction $V1$ est strictement positive sur Ω . Soit $f \geqslant 0$ semi-continue supérieurement sur Ω ; la fonction Vf , potentiel de f , est aussi s. c. s., par conséquent il existe $x \in \Omega$ tel que

$$\frac{Vf(x)}{V1(x)} = \lambda = \sup \frac{Vf}{V1} \quad ,$$

et si $Vf \neq 0$, λ est non nul.

Les fonctions Vf et $V1$ sont excessives et $Vf \leqslant \lambda V1$, $Vf(x) = \lambda V1(x)$, de sorte que pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{t}\,(Vf - P_t\, Vf)(x) \geqslant \lambda(V1 - P_t\, V1)(x) \quad ,$$

ou encore

$$(A_t\, Vf)(x) \geqslant \lambda(A_t\, V1)(x) \quad ,$$

et en faisant tendre λ vers 0 ,

$$(AVf)(x) \geqslant \lambda(AV1)(x) = \lambda \quad .$$

<u>Autrement dit, si</u> f <u>est s. c. s. positive et</u> $Vf \neq 0$, <u>alors</u> $AVf \neq 0$.

On va encore améliorer ce résultat.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> K <u>un compact de</u> Ω <u>tel que</u> $V1_K \neq 0$; <u>alors</u> $\sup A(V1_K) = 1$.

<u>Démonstration</u>. - Le noyau V satisfait au principe complet du maximum, c'est-à-dire que, pour tout couple f , g de fonctions boréliennes positives bornées, et toute constante $a \geqslant 0$,

$$(Vg \leqslant Vf + a \;\text{ sur }\; (g > 0)) \implies (Vg \leqslant Vf + a \;\text{ dans tout }\; \Omega) \quad ,$$

de sorte que $V1_K$ atteint sa borne supérieure λ en un point x_0 de K . Soit $\varepsilon > 0$; il existe $g \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, $1 \geqslant g(y) > 0$, $\forall\, y \in \Omega$, et $g(y) \geqslant 1$, $\forall\, y \in K$, telle que $Vg(x_0) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} V1_K(x_0)$, de sorte que $\sup \frac{V1_K}{Vg} \geqslant 1 - \varepsilon$; et il existe $y_0 \in K$ tel que

$$\frac{V1_K(y_0)}{Vg(y_0)} = \alpha = \sup \frac{V1_K}{Vg} \quad ,$$

puisque V satisfait au principe complet du maximum. Comme précédemment, on en déduit que

$$A(V1_K)(y) \geqslant (1 - \varepsilon)\; A(Vg)(y) \geqslant (1 - \varepsilon)\; g(y) = 1 - \varepsilon \quad .$$

On remarque, pour terminer, que $AV1_K \leqslant 1$.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout borélien</u> $B \subset \Omega$ <u>tel que</u> $V1_B \neq 0$, $\sup AV1_B = 1$.

Démonstration. - Si $AV1_B \neq 0$, il existe $x \in \Omega$ tel que $\varepsilon_x V(B) \neq 0$, donc un compact $K \subset B$ tel que $\varepsilon_x V(K) \neq 0$; on termine la démonstration en remarquant que, si f et g sont boréliennes positives, et $f \leqslant g$, alors

$$AVf \leqslant AVg \quad .$$

Nous aurons maintenant besoin de deux lemmes de mesurabilité.

LEMME 3. - *Pour toute fonction excessive bornée* w , *l'application* $t \to P_t w(x)$ *est continue à droite, et décroissante pour tout* $x \in \Omega$.

Démonstration. - Pour $s , u \geqslant 0$, on a

$$P_{s+u} w - P_s w = P_s(P_u w - w) \quad .$$

Lorsque $u \to 0$, $P_u w$ tend en croissant vers w , et comme P_s est un noyau,

$$\lim_{u \to 0} P_s(P_u w - w) = \sup_{u \geqslant 0} P_s(P_u w - w) = 0 \quad .$$

LEMME 4. - *Pour toute fonction excessive bornée* w , *les fonctions* $\liminf_{t \to 0} A_t w$ *et* $\limsup_{t \to 0} A_t w$ *sont universellement mesurables.*

Démonstration. - Pour tout $t > 0$, P_t est un endomorphisme positif de $\mathcal{C}(\Omega)$, par conséquent, pour toute fonction universellement mesurable h , $P_t h$ est universellement mesurable. Soit maintenant D un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathbb{R}^+$. Pour une fonction excessive w , et $x \in \Omega$, l'application $t \to A_t(w)(x)$ est continue à droite dans $]0 , \to[$, de sorte que

$$\sup_{0<s<t} A_s w = \sup_{s \in D, 0<s<t} A_s w \quad .$$

Par conséquent

$$\limsup_{t \to 0} A_t w = \limsup_{t \in D ; t \to 0} A_t w \quad ,$$

et le deuxième membre est une fonction universellement mesurable si, pour tout $t \in D$, $A_t w$ l'est aussi.

On peut maintenant énoncer le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5. - *Pour tout borélien* $B \subset \Omega$, *désignons par* $H(B)$ *l'ensemble*

$$H(B) = \{AV1_B < 1\} \cap B \quad ;$$

alors $V1_{H(B)} = 0$.

Démonstration. - Supposons que $V1_{H(B)} \neq 0$; il existe alors un compact $K \subset H(B)$ et $x \in \Omega$ tel que

$$\varepsilon_x V(K) \neq 0 , \qquad \text{et} \qquad \sup_{y \in K} AV1_B(y) < 1 \quad ;$$

mais ceci nous mène à une contradiction, car

$$AV1_K \leqslant AV1_B \qquad \text{et} \qquad AV1_K(y) = 0 \quad \text{si} \quad y \notin K \quad ,$$

de sorte qu'on ne pourrait avoir $\sup AV1_K = 1$.

COROLLAIRE 6. - Pour toute f universellement mesurable, $\geqslant 0$, bornée, $V(AVf) = Vf$.

Démonstration. - Il suffit de se ramener à des fonctions f qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, ce qui permet d'appliquer le corollaire 3.

On peut maintenant introduire utilement les notions suivantes :

Définitions.

1° On dira qu'un ensemble $H \subset \Omega$ est V-négligeable, s'il existe un ensemble borélien B tel que $V1_B \equiv 0$.

2° On dira que deux fonctions f et g sont égales V-presque partout (V-p.p.), si elles diffèrent seulement sur un ensemble V-négligeable.

Le corollaire 5 permet d'énoncer un résultat plus fin :

THÉORÈME 7. - Pour toute $f \geqslant 0$, universellement mesurable bornée, $AVf = f$, V-presque partout.

Soit maintenant $f \geqslant 0$, $0 \leqslant f \leqslant 1$ et $g = 1 - f$; si on applique le théorème 5 aux fonctions f et g , en remarquant que $AV(1 - f) = 1 - \limsup_{t \to 0} A_t f$, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 8. - Pour toute f universellement mesurable sur Ω , $0 \leqslant f \leqslant 1$,

$$\limsup A_t Vf = \liminf A_t Vf = f \quad \text{V-presque partout} \quad ,$$

ou encore, $A_t Vf$ tend simplement V-presque partout vers f lorsque t tend vers 0 .

On a là le résultat fondamental de cette première étape.

<u>Deuxième étape</u>. - Rappelons qu'on a défini un opérateur linéaire positif de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$, $B_t = \frac{1}{t}\int_0^t P_s\, ds$, on a l'identité fondamentale

$$B_t = VA_t = A_t V \quad .$$

Calculons par exemple VA_t ,

$$VA_t f = \int_0^\infty P_s[\frac{1}{t}(f - P_t f)]\, ds$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^\infty P_s f\, ds - \frac{1}{t}\int_0^\infty P_s P_t f\, ds$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^\infty P_s f\, ds - \frac{1}{t}\int_t^\infty P_s\, ds \quad ,$$

$$VA_t f = \frac{1}{t}\int_0^t P_s f\, ds = B_t f \quad .$$

Soit w excessive ; l'application $t \to VA_t w = B_t w$ est décroissante, et

$$w = \sup_{t\to 0} VA_t w = \sup_{t\to 0} B_t w = \sup_{t\to 0} P_t w \quad .$$

Soit maintenant une fonction excessive v , spécifiquement majorée par $V1$, c'est-à-dire que $(V1 - v)$ est aussi excessive. On a alors

$$A_t(v) + A_t(V1 - v) = A_t V1 \quad ,$$

et $A_t f \geqslant 0$ pour toute f excessive, de sorte que pour l'ensemble des $t \leqslant 1$, la famille $(A_t v)$ est bornée et $\limsup_{t\to 0} A_t v \leqslant \limsup_{t\to 0} A_t V1 = 1$.

Soient maintenant $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $]0 , \to[$, σ une mesure positive non nulle sur Ω . Il résulte de ce qui précède que l'application

$$t \to (A_t v)\, \sigma V \quad \text{de }]0 , \to[\text{ dans } L^\infty(\sigma V)$$

possède une limite suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, $L^\infty(\sigma V)$ étant muni de la topologie faible.

Nous désignerons par f un représentant borélien de cette limite, tel que $0 \leqslant f \leqslant 1$.

Soit σ' une mesure positive $\sigma' \leqslant \sigma$; on a donc $\sigma'V \leqslant \sigma V$, de sorte que

$$\langle \sigma'V , f\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \sigma'V , A_t v\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \sigma' , VA_t v\rangle \quad ,$$

mais l'on a $\lim\limits_{t\to 0} VA_t\, v = \sup VA_t\, v = v$, de sorte que

$$\langle \sigma' V \,,\, f \rangle = \langle \sigma' \,,\, v \rangle = \langle \sigma' \,,\, Vf \rangle \quad .$$

Autrement dit, $Vf = v$ σ-presque partout.

On peut maintenant énoncer le deuxième résultat important de ce travail.

LEMME 9. - Pour tout $t > 0$, $A_t\, v = A_t\, Vf$ σV-presque partout.

Démonstration. - Les fonctions numériques $A_t\, v$ et $A_t\, Vf$ sont mesurables, il suffit de montrer que pour toute g continue, $0 \leqslant g \leqslant 1$,

$$\langle \sigma V \,,\, gA_t\, v \rangle = \langle \sigma V \,,\, gA_t\, Vf \rangle \quad .$$

Considérons pour cela l'application ν_g définie sur $\mathcal{C}(\Omega)$ par

$$h \longmapsto \langle \sigma V \,,\, gA_t\, Vh \rangle = \langle \nu_g \,,\, h \rangle \quad .$$

Si $g \geqslant 0$, ν_g est une mesure positive, puisque $A_t\, Vh \geqslant 0$ lorsque $h \geqslant 0$. D'autre part, si $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2$, $\nu_{g_1} \leqslant \nu_{g_2}$.

Montrons que $\nu_1 \leqslant \sigma V$; soit $h \in \mathcal{C}^+(\Omega)$,

$$\langle \nu_1 \,,\, h \rangle = \langle \sigma V \,,\, A_t\, Vh \rangle$$

$$= \langle \sigma \,,\, VA_t\, Vh \rangle = \langle \sigma \,,\, B_t\, Vh \rangle \quad .$$

Or pour $h \geqslant 0$, Vh est excessive, donc $B_t\, Vh \leqslant Vh$, par suite

$$\langle \nu_1 \,,\, h \rangle \leqslant \langle \sigma \,,\, Vh \rangle = \langle \sigma V \,,\, h \rangle \quad .$$

Pour toute $g \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, $0 \leqslant g \leqslant 1$, $\nu_g \leqslant \sigma V$. On peut donc écrire

$$\langle \sigma V \,,\, gA_t\, Vf \rangle = \lim_{s,\mathcal{U}} \langle \sigma V \,,\, gA_t\, VA_s\, v \rangle = \lim_{s,\mathcal{U}} \langle \sigma V \,,\, gA_t\, B_s\, v \rangle \quad .$$

Rappelons que l'application $s \longmapsto B_s\, v$ est décroissante lorsque v est excessive, et que $\lim\limits_{s\to 0} B_s\, v = v$. Par suite

$$\langle \sigma V \,,\, gA_t\, Vf \rangle = \lim_{s\to 0} \langle \sigma V \,,\, gA_t\, B_s\, v \rangle = \langle \sigma V \,,\, gA_t\, v \rangle \quad .$$

COROLLAIRE 10. - Les éléments f et σ étant ceux du lemme précédent, on a

$$\limsup_{t\to 0} A_t\, v = \limsup_{t\to 0} A_t\, Vf \quad \sigma V\text{-p. p.} \quad ,$$

$$\liminf_{t\to 0} A_t\, v = \liminf_{t\to 0} A_t\, Vf \quad \sigma V\text{-p. p.} \quad .$$

Démonstration. - De manière générale, w étant excessive, pour tout $x \in \Omega$, l'application $t \to P_t\, w(x)$ est continue à droite.

Si l'on prend un ensemble dénombrable partout dense D dans $\mathbb{R}^+$, on a, pour tout $t > 0$,

$$\sup_{0<s\leq t} A_s\, w = \sup_{s\in D,\, 0<s\leq t} A_s\, w \ .$$

Si l'on utilise cette remarque pour v et Vf, on a $A_t\, v = A_t\, Vf$ σV-presque partout pour tout $t \in D$, ce qui permet de passer aux limites supérieures et inférieures.

Rappelons que l'on a $v = Vf$ σ-presque partout.

Si l'on fait maintenant varier la mesure σ, on obtient le troisième résultat fondamental :

THÉORÈME 11. - Pour toute v excessive,

$$v < V1 \ , \qquad \limsup_{t\to 0} A_t\, v \equiv \liminf_{t\to 0} A_t\, v \quad V\text{-presque partout} \ ,$$

et pour toute f mesurable, telle que

$$\liminf_{t\to 0} A_t\, v \leq f \leq \limsup_{t\to 0} A_t\, v \ ,$$

on a

$$v = Vf \ .$$

Démonstration. - Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à la famille des mesures (ε_x), x parcourant Ω.

On va dégager dans ce qui suit les grandes lignes de la démonstration de la première étape.

Soient Ω un espace compact, V un noyau positif de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$, (P_n) une suite de noyaux positifs sur $\mathcal{C}(\Omega)$, boréliens au sens suivant : pour toute $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $P_n\, f$ est une fonction borélienne.

On suppose que V et la suite (P_n) sont reliés par les conditions suivantes :

(a) $P_n\, Vf \leq Vf$, pour toute $f \in \mathcal{C}^+(\Omega)$;
(b) $V1(x) - P_n\, V1(x) > 0$, pour tout $x \in \Omega$;
(c) Pour toute $f \in \mathcal{C}(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Vf - P_n\, Vf}{V1 - P_n\, V1} = f$$

(il s'agit de limites simples).

Posons alors

$$A_n : f \longmapsto \frac{Vf - P_n Vf}{V1 - P_n V1} ,$$

et pour toute f borélienne sur Ω ,

$$Af = \liminf_{n\to\infty} A_n f ,$$

$$Bf = \limsup_{n\to\infty} A_n f .$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 12. - Pour toute f positive borélienne bornée sur Ω ,

$$AVf = BVf = f \quad V\text{-presque partout} ,$$

et

$$V(AVf) = V(BVf) = Vf .$$

Nous ne démontrerons pas ce théorème, il suffit pour cela de reprendre la première étape de ce travail. Il est plus intéressant de remarquer que cette généralisation ne fait pas sortir de la théorie du potentiel. En effet, la condition (b) implique $V1(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$; montrons que V satisfait au principe de domination, c'est-à-dire que pour $f , g \in C^+(\Omega)$, $Vg \leqslant Vf$ sur l'ensemble $(g > 0)$ implique $Vg \leqslant Vf$ dans Ω tout entier. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $x \in \Omega$ tel que

$$\frac{Vg}{V(f+\varepsilon)}(x) = \sup_{x\in\Omega} \frac{Vg}{V(f+\varepsilon)} = \lambda > 0 .$$

On en déduit que $\frac{A_n V_g}{A_n V(f+\varepsilon)}(x) \geqslant \lambda$, de sorte que

$$AVg(x) \geqslant \lambda AV(f+\varepsilon)(x) ,$$

c'est-à-dire

$$g(x) \geqslant \lambda(f+\varepsilon)(x) .$$

Si l'on a supposé $Vg \leqslant Vf$ sur l'ensemble $(g > 0)$, et s'il existait $x \notin (g > 0)$ tel que $Vg(x) > Vf(x)$, en choisissant convenablement $\varepsilon > 0$, on aurait $\sup \frac{Vg}{V(f+\varepsilon)} > 1$, et la borne supérieure de $\frac{Vg}{V(f+\varepsilon)}$ serait atteinte en un point $y \in \Omega$ tel que $g(y) = 0$, ce qui aboutirait à une contradiction.

Citons deux exemples où ces méthodes s'appliquent moyennant quelques complications.

1° Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et v est une fonction surharmonique, dont le laplacien Δv au sens des distributions est une mesure ν de base la mesure de Lebesgue μ sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \Omega$, soit ρ_x^n la mesure normalisée de la sphère de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$. On définit les opérateurs P_n de la manière suivante, pour $f \in \mathcal{C}_K(\Omega)$:

$P_n f(x) = \int f \, d\rho_x^n$ si la boule de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$ est contenue dans Ω, et $P_n f(x) = 0$ dans le cas contraire.

Il existe un noyau V unique défini sur $\mathcal{C}_K(\Omega)$ tel que :

(a) Vf est surharmonique continue pour toute f continue positive bornée sur Ω ;

(b) Vf est harmonique dans le complémentaire du support de f ;

(c) Le laplacien de Vf au sens des distributions vaut $(-\mu)$, μ mesure de Lebesgue sur Ω.

Le noyau V et la suite P_n satisfont aux conditions du théorème précédent, de sorte que si l'on pose

$$g = \liminf_{n\to\infty} \frac{v - P_n v}{V1 - P_n V1} ,$$

on a $g.\mu = -\nu = \Delta v$, laplacien pris au sens des distributions.

2° Ω est un espace compact, $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une famille résolvante de noyaux positifs uniformément bornée de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$, qui est sous-markovienne. Dans cet exemple, on prend $V = V_0$, et $P_n = \lambda_n V_{\lambda_n}$ où (λ_n) est une suite croissante de nombres réels tendant vers $+\infty$.

L'extension de ces résultats lorsque l'on remplace le compact Ω, par un espace mesurable $(X, \mathfrak{F})$, fera l'objet d'un exposé ultérieur.

Appendice

Application à la théorie des martingales

Soient X un espace compact, $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de noyaux positifs sur $\mathcal{C}(X)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $\|E_n\| \leq 1$, pour tout n ;

(b) $E_n E_p = E_p E_n = E_{\inf(n,p)}$;

(c) Pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - E_n f\| = 0 \quad .$$

Par application des résultats précédents, on obtient dans un cas particulier un théorème de convergence :

THÉORÈME 1.

(a) Le noyau $E = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} E_n$ satisfait au principe de domination.

(b) Pour toute f borélienne sur X , la suite $E_n f$ converge simplement E-presque partout vers f .

Démonstration. - Introduisons les noyaux positifs

$$S_n = \sum_{p\leqslant n} \frac{1}{2^p} E_p \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{p\geqslant n+1} \frac{1}{2^p} E_p \quad .$$

On a évidemment $E = S_n + R_n$, et pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, $\lim_{n\to\infty} \|2^n R_n f - f\| = 0$.

Définissons par récurrence la suite K_n de noyaux positifs par

$$K_1 = \frac{1}{2} E_1 \qquad \text{et} \qquad K_{n+1} = \frac{1}{2} (K_n + E_{n+1}) \quad .$$

On va montrer par récurrence que $K_n E = S_n$.

Supposons que, pour un indice n fixé, $K_n E = S_n$, et calculons $K_{n+1} E$. On a de manière générale, pour $m \leqslant n$, $E_m R_n = \sum_{p\geqslant n+1} \frac{1}{2^n} E_m E_p = \frac{1}{2^n} E_m$. On a alors

$$K_{n+1} E = \frac{1}{2} (K_n E + E_{n+1} E) = \frac{1}{2} (S_n + S_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} E_{n+1}) \quad .$$

On a précisément $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} E_{n+1}$, on vérifie ensuite aisément que $K_1 E = S_1 = E_1$.

Une première propriété est obtenue : Pour tout n , toute $f \in \mathcal{C}(X)$, $K_n Ef \leqslant Ef$.

On définit une suite A_n d'opérateurs sur l'ensemble des fonctions boréliennes f par

$$A_n f = \frac{f - K_n f}{E1 - K_n E1} \quad .$$

On va montrer que, pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, $\lim_{n\to\infty} \|A_n Ef - f\| = 0$. En effet,

$$A_n \, Ef = \frac{Ef - K_n \, Ef}{E1 - K_n \, E1} = \frac{R_n \, f}{R_n \, 1} \quad ,$$

et l'on a déjà remarqué que, pour tout $g \in \mathcal{C}(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} \|2^n \, R_n \, g - g\| = 0 \quad .$$

Introduisons les opérateurs A et B définis, pour toute fonction borélienne h , par

$$Ah = \liminf_{n\to\infty} A_n \, h \qquad \text{et} \qquad Bh = \limsup_{n\to\infty} A_n \, h \quad .$$

On peut déjà annoncer le résultat suivant :

<u>Pour toute</u> f <u>borélienne bornée sur</u> X ,

$$AEf = BEf \quad E\text{-presque partout} \quad ,$$

<u>et le noyau</u> E <u>satisfait au principe de domination</u>.

Il ne reste plus qu'à exprimer E_n en fonction de A_n . On a déjà $R_n f = R_n 1 . A_n Ef$ et $E_n \, f = 2^n(R_{n-1} - R_n)f$, d'où finalement

$$E_n \, f = 2.2^{n-1} \, R_{n-1} \, 1.A_{n-1} \, Ef - 2^n \, R_n \, 1.A_n \, Ef \quad .$$

On remarque encore que

$$\lim_{p\to\infty} \|2^p \, R_p \, 1 - 1\| = 0 \quad ,$$

de sorte que, pour tous les $x \in X$ tels que

$$AEf(x) = BEf(x) = \hat{f}(x) \quad ,$$

on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} E_n \, f(x) = \hat{f}(x) \quad .$$

Soit maintenant $(\Omega , \mathfrak{F} , \mu)$ un espace mesuré, $\mu(\Omega) = 1$.

<u>Définition</u>. - On dit qu'une suite $(\dot{f}_n)$ d'éléments de $L^\infty(\Omega , \mathfrak{F} , \mu)$ converge pour l'ordre, si l'on a

$$\sup_m \, (\inf_{n \geq m} \dot{f}_n) = \inf_m \, (\sup_{n \geq m} \dot{f}_n) \quad ;$$

il revient au même de dire que, pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega , \mathfrak{F} , \mu)$ telle que f_n soit un représentant de $\dot{f}_n$ pour tout n , on a

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{-presque partout} \quad .$$

LEMME 2. - *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* $\mu(\Omega) = 1$, *et* B *une sous-algèbre contenant les constantes, fermée pour la norme uniforme, de fonctions mesurables bornées.*

Il existe alors un espace compact K , *une mesure* ν *sur* K , *un opérateur linéaire* ρ *de* B *sur* $\mathcal{C}(K)$, *tels que* :

(a) $\rho(1) = 1$, $\rho(\sup f, g) = \sup \rho(f), \rho(g)$;

(b) $(\int |f| \, d\mu = 0) \implies \rho(f) = 0$;

(c) $\langle f, \mu \rangle = \int \rho(f) \, d\nu$, $\forall f \in B$.

Démonstration. - Soient H le spectre de l'algèbre B , et θ l'isomorphisme canonique de B sur $\mathcal{C}(H)$. L'application $f \longmapsto \langle \theta^{-1} f, \mu \rangle$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(H)$, c'est-à-dire une mesure ν sur H ; désignons par K le support de ν , et posons pour toute $f \in B$,

$$\rho(f) = \theta(f)_{|K} .$$

L'opérateur ρ ainsi défini satisfait bien les conditions (a), (b), (c).

On se donne maintenant une suite croissante $(\mathcal{F}_n)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, et l'on désigne par B l'algèbre des fonctions mesurables bornées qui sont limites d'une suite (f_n) , où f_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout n . On obtient ainsi une sous-algèbre contenant les constantes, et fermée pour la topologie de la convergence uniforme.

On suppose que l'on s'est donné un triplet (K, ν, ρ) remplissant les conditions du lemme précédent.

On va maintenant utiliser le fait que $(\int |f| \, d\mu = 0) \implies (\rho(f) = 0)$, pour transporter sur $\mathcal{C}(K)$ les opérateurs $E(\cdot \mid \mathcal{F}_n)$, espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$. Plus précisément, soient $f \in \mathcal{C}(K)$, $g \in B$ telle que $\rho(g) = f$, on peut définir $E_n f = \rho(E(g \mid \mathcal{F}_n))$, car cela ne dépend que de la classe de g dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

PROPOSITION 3. - *La suite* (E_n) *d'opérateurs linéaires positifs ainsi définie sur* $\mathcal{C}(K)$ *possède les propriétés suivantes* :

(a) $E_n 1 = 1$;

(b) $E_n E_p = E_n E_p = E_{mf(n,p)}$;

(c) *Pour toute* $f \in \mathcal{C}(K)$,

$$\lim_{n \to \infty} \|E_n f - f\| = 0 .$$

Démonstration. - (a) et (b) sont immédiats ; pour (c), il faut remarquer que l'espace vectoriel $F = \bigcup_n E_n(\mathcal{C}(K))$ est partout dense dans $\mathcal{C}(K)$.

Pour obtenir les théorèmes de convergence classiques (dans des cas particuliers!), nous aurons encore besoin des lemmes suivants :

LEMME 4. - Soit $\mathcal{S}$ la tribu engendrée par la suite $(\mathcal{F}_n)$, et soit g une fonction $\mathcal{S}$-mesurable bornée. Il existe alors une fonction numérique borélienne f sur K , telle que

$$\langle g.h , \mu\rangle = \int \rho(h).f \, d\nu , \qquad \text{pour tout } h \in B .$$

Démonstration. - En effet, considérons l'application définie sur $\mathcal{C}(K)$ par $\langle v , \sigma\rangle = \langle g.h , \mu\rangle$, où h est un élément quelconque de B tel que $\rho(h) = v$; on voit ainsi que σ est une mesure de base ν , et l'on conclut avec le théorème de Lebesgue.

LEMME 5. - Soit $(f_n) \subset B$ une suite de fonctions. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) La suite (f_n) converge simplement μ-presque partout ;
(b) La suite $\rho(f_n)$ converge simplement ν-presque partout.

Enfin, il faut remarquer que, pour toute f borélienne sur K , $E_n f \in \mathcal{C}(K)$, $\forall n$.

Après tous ces détours, on retrouve enfin le théorème classique de convergence :

THÉORÈME 6. - Soit $g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega , \mathcal{S} , \mu)$, et soit (f_n) une suite d'éléments de B , f_n $\mathcal{F}_n$-mesurable telle que $f_n = E(g \mid \mathcal{F}_n)$.

Alors la suite (f_n) converge simplement μ-presque partout vers g .

Démonstration. - On peut toujours supposer que la tribu $\mathcal{F}_1 = \{\Omega , \emptyset\}$, de sorte que $E_1 \rho(g)$ est une fonction constante qui vaut $\langle g , \mu\rangle$, et la suite $E_n \rho(g)$ converge simplement E_1-presque partout, c'est-à-dire ν-presque partout, par conséquent la suite f_n converge simplement μ-presque partout.

Remarque. - En gardant les données qui figurent au début de cet appendice, on pourrait montrer que le noyau $V = \sum_{n\geq 1} \alpha_n E_n$ satisfait au principe de domination, pour toute série sommable (α_n) à termes positifs. On construirait pour cela une suite (K_n) de noyaux positifs, telle que $K_n V = \sum_{p\leq n} \alpha_p E_p$, chaque noyau K_n s'écrivant $K_n = \sum_{n\geq p\geq 1} a_p^n E_p$, avec $a_p^n \geq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENY (Jacques). - Notions sur les semi-groupes d'opérateurs linéaires. Orsay, 1963 (multigraphie épuisée).

[2] MOKOBODZKI (Gabriel). - Ultrafiltres rapides sur $\underset{\sim}{N}$, Séminaire Brelot-Choquet -Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 12, 22 p.

(Texte remis le 21 janvier 1969)

Gabriel MOKOBODZKI
17 rue des Marquettes
75 - PARIS 12