Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

GABRIEL MOKOBODZKI

Cônes normaux et espaces nucléaires. Cônes semi-complets

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, nº 2 (1967-1968), exp. nº B6, p. B1-B14
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_2_A3_0>

CÔNES NORMAUX ET ESPACES NUCLÉAIRES. CÔNES SEMI-COMPLETS

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction. - Le point de départ de ce travail se trouve dans le problème de la représentation intégrale des fonctions surharmoniques en théorie axiomatique du potentiel ([1]). Il est remarquable que, si l'espace vectoriel des fonctions harmoniques est nucléaire pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, on sache établir une représentation intégrale des fonctions harmoniques positives par des mesures portées par l'ensemble des fonctions harmoniques positives extrémales.

Nous tenterons ici de montrer le lien qui existe entre les espaces nucléaires et les cônes convexes de ces espaces dans lesquels on sait faire la représentation intégrale.

I. Cônes normaux et espaces nucléaires.

Tous les espaces vectoriels considérés seront définis sur le corps $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1. - Soit E un espace localement convexe séparé (e. l. c. s.). On dit qu'un cône convexe saillant $C \subset E$ est normal, s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(a) La topologie de E peut être définie par une famille (p_i) de semi-normes croissantes sur C , c'est-à-dire

$$(a , b \in C , \quad a \leqslant b) \implies (p_i(a) \leqslant p_i(b)) \quad ,$$

où $\leqslant$ désigne la relation d'ordre définie par C .

(b) Désignons par E' le dual de E , et par C' le polaire de $(- C)$. Pour toute partie équicontinue A de E' , il existe une partie équicontinue $B \subset C'$ telle que $A \subset B - B$.

(c) Il existe un système fondamental (V_α) de voisinages de 0 dans E tels que, pour $x , y , z \in E$,

$$(x , y \in V_\alpha \quad \text{et} \quad x \leqslant z \leqslant y) \implies (z \in V_\alpha) \quad .$$

Pour la démonstration de ces équivalences, voir SCHAEFER [5].

On suppose maintenant que E est nucléaire. Parmi les diverses définitions de la nucléarité, nous choisirons la suivante.

DÉFINITION 2. - On dira que E est *nucléaire* si, pour toute semi-norme continue p sur E, il existe une suite (z_n) équicontinue de E', une suite $(\lambda_n) \subset \ell_1^+$, telles que, pour tout $x \in E$,

$$p(x) \leqslant \sum_n \lambda_n |\langle x , z_n \rangle| \quad .$$

Si C est un cône convexe normal dans E, et $C' \subset E'$ le polaire de $(-C)$, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - *Pour toute semi-norme continue* p *sur* E, *espace nucléaire, il existe une suite équicontinue* $(t_n) \subset C'$, *une suite* $(\mu_n) \in \ell_1^+$, *telles que, pour tout* $x \in E$,

$$p(x) \leqslant \sum_n \mu_n |\langle x , t_n \rangle| \quad .$$

Démonstration. - Reprenons les familles (z_n) et (λ_n) de la définition 2. Il existe une partie B équicontinue de C', et deux suites (z_n), $(s_n) \subset B$ telles que $z_n = z_n - s_n$. Par suite, en posant $\mu_{2n} = \mu_{2n+1} = \lambda_n$ et $t_{2n} = r_n$, $t_{2n+1} = s_n$, on a bien

$$p(x) \leqslant \sum_n \lambda_n |\langle x , z_n \rangle| \leqslant \sum_n \mu_n |\langle x , t_n \rangle| \quad ,$$

pour tout $x \in E$.

Dans ce qui suit, on supposera que E est nucléaire, et que $C \subset E$ est un cône convexe saillant normal de E.

LEMME 4. - *Pour tout ensemble équicontinu* $B \subset C'$, *il existe* $z(B) \in C'$ *tel que* $(z(B) - z) \in C'$ *pour tout* $z \in B$. (*Si* C' *était saillant,* B *serait borné pour l'ordre défini par* C'.)

Démonstration. - Considérons la semi-norme continue sur E, croissante sur C, définie par

$$p(x) = \sup_{f \in B} \langle x , f \rangle \quad .$$

D'après le théorème 3, il existe une suite $(\lambda_n) \subset \ell_1^+$, une suite équicontinue $(z_n) \subset C'$, telles que

$$p(x) \leqslant \sum_n \lambda_n |\langle x , z_n \rangle| \quad , \qquad \forall\, x \in E \quad .$$

En particulier, si $x \in C$, $\langle x , z_n \rangle \geqslant 0$, et

$$p(x) = \sup_{f \in B} \langle x , f \rangle \leqslant \langle x , \sum_n \lambda_n z_n \rangle .$$

Il suffit de prendre $z(B) = \sum_n \lambda_n z_n$.

LEMME 5. - Pour toute semi-norme continue p sur E , il existe $y \in C'$ tel que l'ensemble

$$A(y) = \{x \in C ; \langle x , y \rangle \leqslant 1\}$$

soit précompact pour la semi-norme p .

Démonstration. - Soient $(z_n) \subset C'$, $(\lambda_n) \in \ell_1^+$, telles que

$$p(x) \leqslant \sum_n \lambda_n |\langle x , z_n \rangle| , \qquad \forall x \in E ,$$

la suite (z_n) étant équicontinue. D'après le lemme 4, il existe $y \in C'$ tel que, pour tout n , $(y - z_n) \in C'$. Montrons que, pour un tel $y \in C'$, l'ensemble $A(y) = \{x \in C ; \langle x , y \rangle \leqslant 1\}$ est précompact pour p . Il suffit pour cela de montrer que toute suite (x_p) , extraite de $A(y)$, est précompacte pour p . En prenant une sous-suite $(x'_p) \subset (x_p)$, on peut supposer que $\lim_p \langle x_p , z_n \rangle$ existe pour tout n , et $\langle x'_p , z_n \rangle \leqslant \langle x'_p , y \rangle \leqslant 1$. Si l'on tient compte de la majoration, valable pour tout $x \in E$,

$$p(x) \leqslant \sum_n \lambda_n |\langle x , z_n \rangle| ,$$

on en déduit que la suite (x'_p) est précompacte pour la semi-norme p , et finalement que $A(y)$ est précompact pour p .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 6. - Soient E un espace nucléaire, C un cône convexe saillant normal de E .

Tout filtre $\mathfrak{F}$ sur C , qui est filtre de Cauchy pour la topologie faible, est aussi un filtre de Cauchy pour la topologie donnée.

A fortiori, la topologie faible sur C est identique à la topologie donnée.

Le théorème résulte du lemme classique suivant.

LEMME 7. - Soient p une semi-norme continue sur E , A une partie de E , précompacte pour p . Tout filtre de Cauchy $\mathfrak{F}$ sur A , pour la topologie faible de E , est un filtre de Cauchy pour p .

Démonstration du théorème 6. - Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur C pour la topologie faible. Pour toute semi-norme continue p sur E, il existe $y \in C'$ tel que l'ensemble

$$A(y) = \{x \in C \; ; \; \langle x , y \rangle \leqslant 1\}$$

soit précompact pour p, et il existe $M \in \mathfrak{F}$ tel que

$$\sup_{x \in M} \langle x , y \rangle < +\infty \; ,$$

de sorte que M est précompact pour p, et que $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy pour p.

COROLLAIRE 8. - *Soient* E *un espace nucléaire,* C *un cône convexe saillant normal de* E.

Si C *est complet pour la topologie donnée,* C *est complet pour la topologie faible.*

Si 0 *dans* C *possède un système fondamental dénombrable de voisinages pour la topologie donnée, alors* 0 *a, dans* C, *un système fondamental dénombrable de voisinages faibles.*

Rappelons enfin les définitions suivantes :

Soient F un espace localement convexe séparé, A une partie convexe de F.

On dit que $K \subset A$ est un *chapeau* de A, si K est convexe compact, et si $A \setminus K$ est convexe.

On dit qu'un cône convexe C est *bien coiffé*, s'il est réunion de ses chapeaux.

Si C est un cône convexe, et si K est un chapeau de C, tout point extrémal de K se trouve sur une génératrice extrémale de C.

Rappelons le théorème de Choquet : Si un cône convexe saillant $C \subset F$ est faiblement complet, et si 0 possède un système fondamental dénombrable de voisinages faibles dans C, alors C est un cône bien coiffé.

Les résultats précédents nous permettent d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 9. - *Soient* E *un espace nucléaire,* C *un cône convexe saillant normal de* E. *Si, pour la topologie donnée de* E, C *est complet, et si* 0 *possède un système fondamental dénombrable de voisinages dans* C, *alors* C *est un cône convexe bien coiffé.*

Si, de plus, C *est métrisable, tout point de* C *est barycentre d'une mesure portée par un chapeau de* C *et par l'ensemble des génératrices extrémales de* C.

Etant donné l'intérêt des cônes convexes C dont le sommet possède un système fondamental dénombrable de voisinages faibles dans C, nous allons donner des critères permettant de les reconnaître.

DÉFINITION 10. - Soient F un e. l. c. s., C un cône convexe de F, (f_n) une suite de formes linéaires positives sur C. On dira que C est <u>semi-complet</u> pour la suite (f_n) si, pour toute suite $(x_p) \subset C$, telle que $\sum_p \langle x_p , f_n \rangle < +\infty$ pour tout n,

$$\sum_p x_p = x \in C \quad .$$

PROPOSITION 11. - <u>Soient</u> F <u>un e. l. c. s.,</u> C <u>un convexe saillant normal,</u> (f_n) <u>une suite de formes linéaires positives sur</u> C <u>pour laquelle</u> C <u>est semi-complet. Pour toute semi-norme continue</u> p <u>sur</u> F, <u>il existe</u> n <u>tel que</u>

$$p(x) \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x) \ , \qquad \forall\, x \in C \ ,$$

<u>de sorte que</u> 0 <u>a un système fondamental dénombrable de voisinages dans</u> C <u>pour la topologie donnée.</u>

Nous ne démontrerons pas directement cette proposition car il est possible de l'établir dans un cadre plus général, utile pour la théorie du potentiel.

Soient Ω un ensemble, C un ensemble de fonctions numériques sur Ω, à valeurs dans $[0 , +\infty]$, stable par addition, contenant la fonction 0.

Soit (μ_n) une suite d'applications de C dans $\mathbb{R}$. On suppose que C et la suite (μ_n) sont reliés par la propriété suivante (" C est semi-complet") :

(SC) Pour toute suite (v_p) d'éléments de C telle que, pour tout n,

$$\sup_p \Big(\sum_{q \leqslant p} \mu_n(v_q) \Big) < +\infty \ ,$$

alors $\sum_{p=1}^{\infty} v_p = v$ appartient à C.

DÉFINITION 12. - On dira qu'une application h de C dans $\mathbb{R}$ est <u>relativement bornée</u> si, pour tout $v \in C$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, si $u , w \in C$, $u + w = v$, alors

$$h(u) \leqslant M \quad .$$

PROPOSITION 13. - <u>Soit</u> h <u>une application relativement bornée de</u> C <u>dans</u> $\mathbb{R}$.
<u>Il existe</u> $M > 0$, $\varepsilon > 0$, <u>et un entier</u> p, <u>tels que</u>

$$(v \in C \; ; \; \mu_q(v) \leqslant \varepsilon \; , \; \forall \, q \leqslant p) \implies (h(v) \leqslant M) \; .$$

<u>Démonstration</u>. - Si l'ensemble $B_{\varepsilon,p} = \{v \in C \; ; \; \mu_q(v) \leqslant \varepsilon \; , \; \forall \, q \leqslant p\}$ est vide, on admettra que la proposition est vérifiée.

Supposons donc $B_{\varepsilon,p} \neq \emptyset$ pour tout p et tout $\varepsilon > 0$. Si la proposition n'était pas vérifiée, pour tout entier p, il existerait $v_p \in C$, vérifiant les inégalités

$$h(v_p) \geqslant p \qquad \text{et} \qquad \sup_{q \leqslant p} \mu_q(v_p) \leqslant \frac{1}{2^p} \; .$$

Pour $p \geqslant n$, on a donc $\mu_n(v_p) \leqslant \frac{1}{2^p}$, de sorte que, si $p > n$,

$$\sum_{q \leqslant p} \mu_n(v_q) = \sum_{q \leqslant n} \mu_n(v_q) + \sum_{n < q \leqslant p} \mu_n(v_q) \; ,$$

d'où

$$\sum_{q \leqslant p} \mu_n(v_q) \leqslant \sum_{q \leqslant n} \mu_n(v_q) + 1 \; .$$

D'après la condition (SC),

$$u_n = \sum_{p \neq n} v_p \qquad \text{et} \qquad u = \sum_{p \geqslant 1} v_p$$

appartiennent à C, et $u = u_n + v_n$. Par construction, $h(v_n) \geqslant n$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que h est relativement bornée.

On suppose maintenant que $\lambda v \in C$ pour tout $\lambda > 0$, tout $v \in C$, et que :

1° $h(\lambda v) = \lambda h(v)$, pour tout $\lambda \geqslant 0$ et tout $v \in C$,
2° $\mu_n(\lambda v) = \lambda \mu_n(v)$, pour tous $\lambda \geqslant 0$, $v \in C$, $n \geqslant 1$,
3° $\mu_n(v) \geqslant 0$, pour tout n, et tout $v \in C$.

On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 14. - <u>Soit</u> h <u>une application positivement homogène, relativement bornée, de</u> C <u>dans</u> $\mathbb{R}$. <u>Il existe alors</u> $k > 0$, <u>et un entier</u> p, <u>tels que, pour tout</u> $v \in C$,

$$h(v) \leqslant k \sup_{q \leqslant p} \mu_q(v) \; .$$

<u>Démonstration</u>. - D'après la proposition précédente, il existe $M > 0$, $\varepsilon > 0$, et un entier p, tels que

$$(v \in C \; ; \; \sup_{q \leqslant p} \mu_q(v) \leqslant \varepsilon) \implies (h(v) \leqslant M) \; .$$

Posons $N_p(v) = \sup_{q \leqslant p} \mu_q(v)$, et prenons $k = \frac{M}{\varepsilon}$:

(a) $N_p(v) = 0$, alors pour tout $\lambda \geqslant 0$, $N_p(\lambda v) \leqslant 0 \leqslant \varepsilon$ et $h(\lambda v) \leqslant M$, d'où $h(v) = 0$, par conséquent $h(v) \leqslant kN_p(v)$;

(b) $N_p(v) = \alpha > 0$, alors $N_p(\frac{\varepsilon}{\alpha} v) = \varepsilon$, et par suite $h(\frac{\varepsilon}{\alpha} v) \leqslant M$, ou encore $h(v) \leqslant \frac{M}{\varepsilon} \alpha = \frac{M}{\varepsilon} N_p(v)$.

II. Cônes semi-complets.

Soient E un espace localement convexe séparé, ℓ_1^+ le cône convexe des suites sommables de nombres réels positifs, M^1 la partie de ℓ_1^+ formée des suites (α_n) telles que $\sum_n \alpha_n = 1$.

On rappelle qu'une suite $(x_n) \subset E$, qui est faiblement sommable dans E , est aussi sommable pour la topologie donnée de E , et que la suite (y_p) , définie par $y_p = \sum_{n \leqslant p} x_n$ pour tout p , est bornée dans E .

DÉFINITION 15. - On dira qu'une partie convexe G de E est semi-complète, si, pour toute suite bornée $(x_n) \subset G$ et toute suite $(\alpha_n) \in M^1$, la suite $(\alpha_n x_n)$ est sommable, et $(\sum_n \alpha_n x_n) \in G$.

REMARQUE 16. - Soit $(x_n) \subset E$ une suite ayant la propriété suivante : pour toute suite $(\alpha_n) \in \ell_1^+$, la suite $(\alpha_n x_n)$ est sommable dans E ; alors la suite (x_n) est bornée dans E .

Désignons par $SC(F)$ la famille des parties convexes bornées et semi-complètes d'un espace localement convexe séparé F .

Propriétés élémentaires des familles $SC(F)$.

(a) Si π est une application linéaire continue de E dans F ,

$$(A \in SC(E)) \implies (\pi(A) \in SC(E)) .$$

(b) Si $A_i \in SC(E_i)$, $(\prod_{i \in I} A_i) \in SC(\prod_i E_i)$.

(c) Si $(A_i) \subset SC(E)$, $(\bigcap_i A_i) \in SC(E)$.

(d) En combinant (a) et (b), si $A , B \in SC(E)$, $(A + B) \in SC(E)$.

(e) Si $A \in SC(E)$, et si B est une partie convexe de A , fermée dans A , alors $B \in SC(E)$.

(f) Si $A \in SC(E)$, l'enveloppe équilibrée A_0 de A appartient à $SC(E)$.

(g) Si A , $B \in SC(E)$, il existe un plus petit ensemble $C \in SC(E)$ tel que A , $B \subset C$. En effet, l'enveloppe convexe de A et B est contenue dans l'ensemble convexe semi-complet $A_0 + B_0$.

LEMME 17. - Soit $A \in SC(E)$. L'enveloppe convexe disquée fermée $\tilde{A}$ de A , pour la topologie localement convexe la plus fine sur E , appartient à $SC(E)$, et l'on a

$$\tilde{A} = \bigcap_n (1 + n^{-1})(A_0 - A_0) \quad .$$

L'espace vectoriel $E_{\tilde{A}}$ engendré par A , muni de la norme jauge p de $\tilde{A}$, est complet.

Démonstration. - Pour tout $x \in E_{\tilde{A}}$, posons

$$p(x) = \{\inf \lambda \ ; \quad \lambda \geqslant 0 \ , \quad x \in \lambda(A_0 - A_0)\} \quad .$$

On a bien $\tilde{A} = \{p \leqslant 1\}$, et p est une norme sur $E_{\tilde{A}}$. Montrons que $E_{\tilde{A}}$ est complet. Soit $(x_n) \subset E_{\tilde{A}}$ telle que $\sum_n p(x_n) < +\infty$. Il existe alors une suite $(\lambda_n) \in \ell_1^+$ telle que $p(x_n) < \lambda_n$ pour tout n , de sorte que $x_n \in \lambda_n(A_0 - A_0)$. Il existe deux suites (y_n) et (z_n) dans A_0 telles que $x_n = \lambda_n(y_n - z_n)$. Comme A_0 est semi-complet,

$$\sum \lambda_n y_n = y \in E_{\tilde{A}} \ , \qquad \sum \lambda_n z_n = z \in E_{\tilde{A}} \ , \qquad \text{et} \qquad \sum_n x_n = (y - z) \in E \quad .$$

Posons $t_p = \sum_{n \leqslant p} \lambda_n y_n$, $r_p = \sum_{n > p} \lambda_n y_n$. Comme A_0 est semi-complet,

$$r_p \in (\sum_{n>p} \lambda_n) A_0 \quad ,$$

de sorte que

$$p(y - t_p) \leqslant \sum_{n>p} \lambda_n \quad .$$

La suite $s_p = \sum_{n \leqslant p} \lambda_n(y_n - z_n)$ converge donc bien vers $x = \sum_n x_n$ dans $E_{\tilde{A}}$. Le fait que $\tilde{A} \in SC(E)$ résulte des propriétés (c), (d), (f) de la famille $SC(E)$.

Le lemme suivant généralise simplement le lemme 1 de BOURBAKI ([3], chap. III, § 3, n° 4), où l'on remplace complet par semi-complet.

LEMME 18. - Soient E un espace localement convexe séparé, B un tonneau de E ; B absorbe toute partie bornée semi-complète de E .

Démonstration. - Soit $A \in SC(E)$. On peut supposer que $A = \widetilde{A}$. L'espace $E_{\widetilde{A}}$ est tonnelé, et comme $\widetilde{A}$ est borné, $B \cap E_{\widetilde{A}}$ est fermé dans $E_{\widetilde{A}}$, donc absorbe A .

Ce lemme pourra être de quelque utilité : il est plus facile de vérifier qu'un ensemble est semi-complet, ce qui requiert des opérations sur des suites, que de montrer qu'il est complet, ce qui nécessite l'emploi de filtres et implique qu'il soit fermé.

Nous avons maintenant deux notions de cônes semi-complets, les propositions suivantes explicitent le lien qui existe entre elles.

PROPOSITION 19. - Soient E un espace localement convexe séparé, C un cône convexe semi-complet de E . S'il existe une suite (f_n) d'applications positivement homogènes de C dans $\underset{\sim}{R}$, ayant la propriété suivante : toute partie A de C , absorbée par chacun des ensembles $\{f_n \leqslant 1\}$, est bornée dans E , alors C est semi-complet pour la suite (f_n) .

Démonstration. - On peut supposer pour simplifier que $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$, $\forall\ x \in C$ et $\forall\ n$.

Soit $(x_p) \subset C$ telle que, pour tout n ,

$$\sum_p f_n(x_p) < +\infty \quad .$$

Il existe alors une suite croissante d'entiers $n(q)$ telle que

$$\sum_{p \geqslant n(q)} f_q(x_p) \leqslant \frac{1}{2^q} \quad .$$

La suite (t_p) , définie par $t_p = f_q(x_p)$ si $n(q) < p \leqslant n(q+1)$, est une suite sommable, et, pour tout n ,

$$\limsup_{p \to \infty} \frac{f_n(x_p)}{t_p + 2^{-p}} \leqslant 1 \quad .$$

Posons $r_p = t_p + 2^{-p}$, $y_p = r_p^{-1}\, x_p$. La suite $(y_p) \subset C$ est bornée puisque, pour tout n , $\sup_p f_n(y_p) < +\infty$. Comme C est semi-complet,

$$\sum r_p\, y_p = (\sum x_p) \in C \quad .$$

PROPOSITION 20. - Soient un espace localement convexe séparé, C un cône convexe de E , semi-complet pour une suite (f_n) d'applications de C dans $\underset{\sim}{R}$, vérifiant les propriétés suivantes :

(a) f_n est positivement homogène pour tout n ;

(b) Pour toute partie bornée A de C, et tout n, f_n est bornée supérieurement sur A.

Dans ces conditions, le cône convexe C est semi-complet.

Démonstration. - Soient $(x_n) \subset C$ une suite bornée, et $(\alpha_n) \in M^1$. Comme f_p est bornée supérieurement sur (x_n),

$$\sup_q \Big(\sum_{n \leqslant q} f_p(\alpha_n x_n)\Big) < +\infty \quad ,$$

et ceci pour tout p, par suite $(\sum_n \alpha_n x_n) \in C$, autrement dit, C est semi-complet.

COROLLAIRE 21. - Soient E un espace localement convexe séparé, C un cône convexe de E, semi-complet pour une suite (p_n) de semi-normes continues sur E et relativement bornées sur C. Alors C est semi-complet, et tout tonneau B de E est un voisinage de 0 dans C.

Démonstration. - On sait déjà que C est semi-complet.

Soient $x \in C$, et $(x_n) \subset C$, $x_n \in C \cap \{x - C\}$, $\forall\, n$. Par hypothèse, les semi-normes p_n sont relativement bornées sur C, si l'on prend $(\alpha_n) \in M^1$, on aura, pour tout m,

$$\sum_n f_m(\alpha_n x_n) < +\infty \quad ,$$

par suite $(\sum_n \alpha_n x_n) \in C$. Ceci implique (remarque 16) que la suite (x_n) est bornée dans E, et que l'ensemble $C \cap \{x - C\}$ est borné pour tout $x \in C$ et même semi-complet, puisque

$$(\sum_n \alpha_n x_n) \in C \qquad \text{et} \qquad (\sum_n \alpha_n (x - x_n)) \in C \quad .$$

Soit maintenant B un tonneau de E, qu'on peut supposer symétrique ; désignons par q la jauge de B :

$$q(x) = \{\inf \lambda \ ; \ \lambda \geqslant 0 \ , \ x \in \lambda B\} \ , \qquad \forall\, x \in E \quad .$$

D'après le lemme 18, le tonneau B absorbe les ensembles $C \cap \{x - C\}$, pour tout $x \in C$, c'est-à-dire que q est relativement bornée sur C.

D'après la proposition 14, il existe un entier n tel que

$$q(x) \leqslant n \sum_{k \leqslant n} p_k(x) \ , \qquad \forall\, x \in C \quad .$$

La semi-norme $p = n \sum_{k \leqslant n} p_k$ est continue sur E, et $\{p \leqslant 1\} \subset \{q \leqslant 1\} = B$.

PROPOSITION 22. - Soient E un espace localement convexe séparé, C un cône convexe saillant de E, (f_n) une suite de formes linéaires continues sur E, positives sur C, pour laquelle C est semi-complet.

S'il existe un ensemble borné B qui absorbe C, alors C possède une base bornée, fermée et semi-complète.

Démonstration. - On peut supposer que $E = C - C$, et que B est un tonneau de E. Si q désigne la jauge de B, q est strictement positive sur $C - \{0\}$, puisque B est borné et absorbe C. Si l'on reprend la démonstration du corollaire 21, il existe un entier n tel que $q(x) \leqslant n \sum_{k \leqslant n} f_n(x)$, $\forall x \in C$. Posons $f = \sum_{k \leqslant n} f_n$. L'ensemble $B' = \{f = 1\} \cap C$ est une base de C, fermée dans C, donc semi-complète, enfin $B' \subset B$, donc B' est borné.

COROLLAIRE 23. - Soient E un espace localement convexe séparé, C un cône convexe saillant faiblement complet de E, faiblement normal, dont le sommet possède un système fondamental dénombrable de voisinages faibles.

S'il existe un ensemble borné B de E qui absorbe C, alors C possède une base compacte.

Démonstration. - Si C' désigne le polaire de $(-C)$, dire que C est faiblement normal signifie que $E' = C' - C'$, et l'on se trouve alors dans les conditions de la proposition 22. En gardant les notations de la démonstration de la proposition 22, l'ensemble $B' = \{f = 1\} \cap C$ est borné et faiblement complet, donc compact.

Remarque. - S'il existe une suite B_n d'ensembles bornés, dont la réunion absorbe C, pour une suite (α_n) convenable, $\alpha_n > 0$, $\sum_n \alpha_n B_n = B$ est borné et absorbe C.

La technique que nous allons décrire maintenant permet de ramener l'étude des ensembles convexes semi-complets à celle des cônes convexes semi-complets.

Soient E un espace localement convexe séparé, A une partie convexe de E. On rappelle que, pour un élément $x \in A$, la facette de x dans A est la réunion des segments $[y, z]$ contenus dans A et contenant x.

Nous dirons qu'une application h de A dans $\mathbb{R}$ est relativement bornée sur A si, pour tout $x \in A$, h est bornée sur la facette de x dans A (si A est un cône convexe, on retrouve la première notion de fonction relativement bornée).

PROPOSITION 24. - Soient A une partie convexe bornée semi-complète de E, h une application relativement bornée de A dans $\mathbb{R}$. Alors h est bornée supérieurement sur A.

Démonstration. - Considérons l'espace vectoriel $E \times \mathbb{R}$, le cône convexe Γ engendré par l'ensemble $A \times \{1\}$, la forme linéaire $f : (x, \lambda) \longmapsto \lambda$. Le cône convexe Γ est alors semi-complet pour la forme linéaire f. Si l'on désigne par $\tilde{h}$ la fonction positivement homogène sur Γ dont la trace sur $A \times \{1\}$ est h, la fonction $\tilde{h}$ est relativement bornée sur Γ, et la proposition 13 nous affirme qu'il existe $k > 0$ tel que $\tilde{h} \leqslant kf$ sur Γ, autrement dit $h \leqslant k$ sur A.

III. Application à la théorie du potentiel.

Soit Ω un espace localement compact. Dans de nombreuses théories du potentiel (BAUER, BRELOT, BOBOC-CONSTANTINESCU-CORNEA, MOKOBODZKI-SIBONY), l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ des fonctions harmoniques sur Ω pour la théorie donnée, satisfait aux conditions suivantes :

(a) $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$, et $\mathcal{H}$ est complet pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ;

(b) Tout ensemble $A \subset \mathcal{H}$, uniformément borné sur tout compact de Ω, est équicontinu.

Désignons par $\mathcal{H}^+$ la partie positive de $\mathcal{H}$, et supposons qu'il existe une suite (μ_n) de mesures de Radon positives sur Ω, à support compact, tel que $\mathcal{H}^+$ soit semi-complet pour la suite μ_n. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 25.

1° Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier n tel que, $\forall\, h \in \mathcal{H}^+$,

$$\sup_{x \in K} h(x) \leqslant n \sum_{p \leqslant n} \langle \mu_n , h \rangle .$$

2° $\mathcal{H}^+$ est faiblement complet et bien coiffé.

Démonstration. - La première partie du théorème résulte directement de la proposition 14.

Soit donc $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy faible sur $\mathcal{H}^+$, c'est-à-dire que, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω, à support compact, $\lim\limits_{\mathfrak{F}} \langle \mu , h \rangle$ existe.

Posons $\alpha_n = \lim\limits_{\mathfrak{F}} \langle \mu_n , h \rangle$. Par hypothèse, pour tout $M \in \mathfrak{F}$, il existe une suite $(h_n) \subset M$ telle que

$$|\langle\langle\mu_p , h_n\rangle - \alpha_p\rangle| < \frac{1}{2^n} , \qquad \forall p \leqslant n .$$

La suite (h_n) est bornée sur tout compact, donc relativement compacte dans $\mathcal{H}^+$; désignons par $h_0 \in \mathcal{H}^+$ une valeur d'adhérence de la suite (h_n) . On a alors

$$\langle\mu_n , h_0\rangle = \alpha_n = \lim_{\mathfrak{F}} \langle\mu_n , h\rangle , \qquad \forall n .$$

Le même raisonnement donnerait le lemme suivant.

LEMME 26. - Pour toute suite (ν_p) de mesures à support compact dans Ω , il existe $h_0 \in \mathcal{H}^+$ tel que

$$\langle\nu_p , h_0\rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \langle\nu_p , h\rangle , \qquad \forall p .$$

Pour toute suite infinie $\sigma = (\nu_1 , \ldots , \nu_p , \ldots)$ de mesures de Radon à support compact dans Ω , posons

$$A(\sigma) = \{h \in \mathcal{H}^+ ; \ \langle\nu_p , h\rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \langle\nu_p , g\rangle , \ \forall p\} .$$

La famille $[A(\sigma)]$ est composée d'ensembles fermés non vides et, si

$$\sigma_0 = \{\mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_n , \ldots\} ,$$

alors $A(\sigma_0)$ est borné sur tout compact, donc compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ; enfin on a

$$A(\sigma_1 \cup \sigma_2) \subset A(\sigma_1) \cap A(\sigma_2) .$$

L'intersection de la famille $A(\sigma)$ n'est pas vide, et ne contient qu'un élément h_0 qui n'est autre que la limite de $\mathfrak{F}$.

D'après le 1°, le sommet de $\mathcal{H}^+$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages faibles dans $\mathcal{H}^+$, par suite $\mathcal{H}^+$ est bien coiffé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 22).

[2] BOBOC (N.), CONSTANTINESCU (C.) and CORNEA (A.). - Axiomatic theory of harmonic functions ..., Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, fasc. 1, p. 283-312.

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 3-5. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Bourbaki, 18).

[4] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Principe du minimum et maximalité en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 1, p. 401-442.

[5] SCHAEFER (Helmut H.). - Topological vector spaces. - New York, Macmillan Company, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).

(Texte reçu le 19 mai 1969)

Gabriel MOKOBODZKI
Att. Rech. CNRS
17 rue des Marquettes
75 - PARIS 12