

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GÉRARD DETOURBET

**Algèbre d'opérateurs intégraux singuliers dans le cas  $\beta \geq 0$**

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A8, p. A1-A7

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1967-1968\\_\\_7\\_1\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A9_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRE D'OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS

DANS LE CAS  $\beta \geq 0$

par Gérard DETOURBET

Dans l'exposé précédent, nous avons introduit, dans le cas  $\beta > 1$ , les algèbres  $CZ_{1,\beta}$ . Notre but ici est de trouver, pour le cas général  $\beta \geq 0$ , un plongement de  $CZ_{\beta}^0$  dans une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ .

Dans le cas  $\beta > 1$ , il a été démontré que l'opérateur

$$K : f \rightarrow (H_1 H_2 - H_1 \cdot H_2) f \quad (\text{pour } f \in L^2 \text{ et } H_1, H_2 \in CZ_{\beta}^0)$$

envoyait continuellement  $L^2$  dans  $H^1$ . Le théorème de Rellich ([1] et [2]) affirme alors que l'opérateur  $\psi K$  est compact pour tout élément  $\psi$  de  $L^{\infty}$  à support compact. On s'appliquera, dans cet exposé, à étendre cette propriété au cas général  $\beta \geq 0$ . Le plan suivi sera essentiellement le même que celui suivi par CALDERÓN et ZYGMUND dans le cas particulier  $\beta > 1$ .

(Il ne sera question ici que d'espaces euclidiens de dimension supérieure ou égale à 2.)

Notations

$C_b^{\beta} : \{f \in C^{\beta} ; \|f\|_{\infty} < \infty\} ;$

$C_b^0 : \text{ensemble des fonctions uniformément continues et bornées} ;$

$L_c^{\infty} : \{f \in L^{\infty} ; \text{supp } f = \text{compact}\} ;$

$\underline{h} : \text{opérateur intégral défini par le noyau } h ;$

$\underline{h}_{\varepsilon} : \text{opérateur intégral défini par le noyau } h\varphi_{\varepsilon}, \text{ où } \varphi_{\varepsilon} \text{ est la fonction caractéristique de } [\varepsilon, \infty[ \text{ (ainsi } h\varphi_{\varepsilon}(x) = h(x)\varphi_{\varepsilon}(|x|) \text{)} .$

§ 1. Une propriété de l'ensemble  $C_b^{\beta}$  ( $\beta \geq 0$ )

THÉORÈME 1. - Pour tout  $u$  dans  $C_b^0$ , ou  $u \in C_b^{\beta}$  pour  $\beta \geq 1$ , il existe une suite de fonctions de  $C_b^{\gamma}$  ( $0 < \gamma < 1$ ) qui converge uniformément vers  $u$ .

Démonstration.

1re étape : Si  $\theta \in C_b^\beta$  et si  $(\text{supp } \theta)$  est compact, alors, pour tout  $u$  de  $L^\infty$ , on a  $u \star \theta$  dans  $C_b^\beta$ .

(i)

$$|u \star \theta(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(z) \theta(x-z) dz \right| \leq \|u\|_\infty \|\theta\|_1 ,$$

donc

$$\|u \star \theta\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|\theta\|_1 ;$$

(ii)

$$\begin{aligned} |u \star \theta(x) - u \star \theta(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(z) \{ \theta(x-z) - \theta(y-z) \} dz \right| \\ &\leq \int_{(x+\text{supp } \theta) \cup (y+\text{supp } \theta)} |u(z)| |\theta(x-z) - \theta(y-z)| dz . \end{aligned}$$

Ecrivons maintenant que  $\theta$  est de classe  $C^\beta$ , ce qui donne

$$|u \star \theta(x) - u \star \theta(y)| \leq \|\theta\|_\beta |x-y|^\beta \|u\|_\infty \int_{(x+\text{supp } \theta) \cup (y+\text{supp } \theta)} dz ,$$

soit, en notant  $[\text{supp } \theta]$  la mesure du support de  $\theta$ ,

$$|u \star \theta(x) - u \star \theta(y)| \leq 2\|\theta\|_\beta |x-y|^\beta \|u\|_\infty [\text{supp } \theta] .$$

C. Q. F. D.

2e étape : Convergence uniforme de  $u \star \theta_\varepsilon$  vers  $u$ , quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Notons par  $\theta_\varepsilon(x)$  la fonction  $\varepsilon^{-n} |\theta(\frac{x}{\varepsilon})| \|\theta\|_1^{-1}$  (ainsi choisie parce que d'intégrale égale à 1). Alors le support de  $\theta_\varepsilon$  a un diamètre égal à  $\varepsilon$  fois le diamètre  $\omega$  de  $\text{supp } \theta$ ,

$$(1.1) \quad |u \star \theta_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \int |u(z) - u(x)| \theta_\varepsilon(x-z) dz .$$

(a)  $u \in C_b^0$  : Ecrivons que  $u$  est uniformément continue :

$$\forall \alpha, \exists \beta, \quad |x-y| \leq \beta \implies |u(x) - u(z)| \leq \alpha .$$

Choisissons  $\varepsilon$  tel que  $\varepsilon\omega < \beta$ ; alors (1.1) devient

$$|u \star \theta_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \alpha \int_{x+\text{supp } \theta_\varepsilon} \theta_\varepsilon(x-z) dz = \alpha ,$$

soit

$$(1.2) \quad \|u \star \theta_\varepsilon - u\|_\infty \leq \alpha .$$

(b)  $u \in C_b^\beta$  pour  $\beta \geq 1$  : Alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , nous avons

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_\beta |x - y| ,$$

appliquons à (1.1),

$$|u \star \theta_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \|u\|_\beta \int_{x+\text{supp } \theta_\varepsilon} |x - z| \theta_\varepsilon(x - z) dz ;$$

mais si  $z \in x + \text{supp } \theta_\varepsilon$ , alors  $|z - x| \leq \varepsilon \omega$ , donc nous avons

$$|u \star \theta_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \|u\|_\beta \varepsilon \omega \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(x - z) dz = \|u\|_\beta \varepsilon \omega ,$$

soit

$$(1.3) \quad \|u \star \theta_\varepsilon - u\|_\infty \leq \varepsilon \omega \|u\|_\beta .$$

(c) Approximation par des fonctions de classe  $C_b^\gamma$  avec  $0 < \gamma < 1$  : Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte de l'ordre de grandeur de  $\gamma$ . Fixons donc  $0 < \gamma < 1$ , et prenons  $\theta$  à support compact et  $\theta \in C_b^\gamma$ , alors la première étape assure que  $u \star \theta_\varepsilon \in C_b^\gamma$  si  $u \in C_b^0$  ou si  $u \in C_b^\beta$  pour  $\beta \geq 1$ , puisque la seule condition pour cela est  $\|u\|_\infty < \infty$ . Les lignes (1.2) et (1.3) affirment à leur tour la convergence uniforme, donc le théorème est entièrement démontré.

## § 2. Propriétés du pseudo-produit de deux opérateurs de Calderón-Zygmund

THÉORÈME 2. - Soit  $R \in CZ_\beta^0$  ( $\beta \geq 0$ ) et  $a \in C_b^\beta$ . Alors l'opérateur

$$f \rightarrow \psi(aR - Ra).f$$

est compact de  $L^2$  dans lui-même pour tout  $\psi \in L_c^\infty$ .

Démonstration.

1° Cas  $\beta = 0$  ou  $\beta \geq 1$  : Posons  $R^a f = (aR - Ra)f$ . Pour tout  $\psi \in L_c^\infty$ , nous avons

$$(2.1) \quad \|\psi R^a f\|_2 \leq 2 \|\psi\|_\infty \|a\|_\infty \|R\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \|f\|_2 .$$

Cette relation montre que  $\psi R$  est approchable dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  par des opérateurs  $\psi R^b$  où  $b \in C_b^\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ), puisque, pour  $\beta = 0$  ou  $\beta \geq 1$ , le théorème 1 affirme l'approximation en norme uniforme de  $a$  par de telles fonctions  $b$ . Si nous appliquons le théorème suivant :

Toute limite (dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ ) d'opérateurs compacts est un opérateur compact ; nous pourrions facilement affirmer que  $\psi R^a$  est compact pour tout  $a \in C_b^\beta$  ( $\beta \geq 0$ ).

Nous nous plaçons donc maintenant dans le cas  $a \in C_b^\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ).

2° Il existe  $C$  (fonction de  $H, \psi, a$ ) telle que  $\|\psi R^a f - \psi R_\varepsilon^a f\|_2 \leq C \varepsilon^\beta \|f\|_2$  :  
Posons

$$N_r(x, y) = \begin{cases} \psi(x) h(x, x-y) \{a(x) - a(y)\} , & \text{si } |x-y| \leq r , \\ 0 , & \text{si } |x-y| > r ; \end{cases}$$

$$N^r(x-y) = \begin{cases} \psi(x) h(x, x-y) \{a(x) - a(y)\} , & \text{si } |x-y| \geq r , \\ 0 , & \text{si } |x-y| < r . \end{cases}$$

Nous avons la majoration

$$(2.2) \quad \begin{cases} N^r(x, y) \leq |\psi(x)| |x-y|^{\beta-n} C , \\ N_r(x, y) \leq |\psi(x)| |x-y|^{\beta-n} C , \end{cases}$$

et aussi, du fait que  $\psi \in L_c^\infty$ ,

$$(2.3) \quad \begin{cases} N^r(x, y) \leq C \|\psi\|_\infty |x-y|^{\beta-n} , \\ N_r(x, y) \leq C \|\psi\|_\infty |x-y|^{\beta-n} . \end{cases}$$

Nous avons

$$(2.4) \quad \psi R_\varepsilon^a f = \int_{\varepsilon < |x-y| < 1} N^r(x, y) f(y) dy + \int_{|x-y| \geq 1} N^r(x, y) f(y) dy .$$

Par application de (2.3) et du fait que  $\beta < 1$ , nous voyons que la deuxième intégrale de (2.4) existe (appliquer Cauchy-Schwarz).  $N^0(x, y) f(y) \in L^1(B)$ , où  $B$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ , d'après (2.3). Donc, le théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} N^\varepsilon(x, y) f(y) dy = \int_{|x-y| < 1} N^0(x, y) f(y) dy ,$$

ce qui s'écrit aussi  $\psi R_\varepsilon^a f \rightarrow \psi R^a f$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . D'autre part,

$$|\psi R^a f(x) - \psi R_\varepsilon^a f(x)| \leq \int |N_\varepsilon(x, y)| |f(y)| dy ,$$

utilisons (2.3),

$$|\psi R^a f(x) - \psi R_\varepsilon^a f(x)| \leq C \|\psi\|_\infty \int_{|x-y| < \varepsilon} |x-y|^{\beta-n} |f(y)| dy .$$

Appliquons le théorème de Young :

$$(2.5) \quad \|\psi R_\varepsilon^a f - \psi R_\varepsilon^a f\|_2 \leq C \|\psi\|_\infty \varepsilon^\beta \|f\|_2 .$$

Cette inégalité prouve donc deux choses :

- $\psi R_\varepsilon^a f \in L^2$  ,  $\forall \varepsilon \geq 0$  ;
- Les opérateurs  $\psi R_\varepsilon^a$  convergent vers  $\psi R^a$  dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$  .

3°  $\psi R_\varepsilon^a$  est compact de  $\mathcal{L}^2$  dans  $\mathcal{L}^2$  : De (2.5), on déduit qu'il suffit de démontrer que  $\psi R_\varepsilon^a$  est compact pour que  $\psi R^a$  le soit, en vertu d'un théorème déjà cité.

Pour démontrer que  $\psi R_\varepsilon^a$  est compact, nous allons démontrer que son noyau  $N^\varepsilon(x, y)$  est de carré sommable.

$$\iint |N^\varepsilon(x, y)|^2 dx dy \leq C \int |\psi(x)|^2 dx \int_{|x-y|>\varepsilon} |x-y|^{2(\beta-n)} dy \quad (1) ,$$

ceci en vertu des inégalités (2.2). Mais  $\int_{|x-y|>\varepsilon} |x-y|^{2(\beta-n)} dy$  existe indépendamment de  $x$ , puisque  $2(\beta - n) < -n$ . Donc  $\psi R_\varepsilon^a$  est compact. Le théorème 2 est donc complètement démontré.

**THÉOREME 3.** - Si  $K_1$  et  $K_2$  sont dans  $CZ_\beta^0$  ( $\beta \geq 0$ ), alors l'opérateur

$$f \rightarrow \psi(K_1 \circ K_2 - K_1 K_2).f$$

de  $\mathcal{L}^2$  dans  $\mathcal{L}^2$  est compact pour tout  $\psi \in L_C^\infty$ .

Démonstration.

1° Nous avons démontré, dans l'exposé n° A.7, que

$$(2.6) \quad K_1 \circ K_2 - K_1 K_2 = \sum a_{\ell, m}^1 (R_{\ell, m} a_{\lambda, \mu}^2 - a_{\lambda, \mu}^2 R_{\ell, m}) R_{\lambda, \mu}$$

(pour les notations, se reporter à l'exposé n° A.7 du séminaire Choquet), et que la convergence avait lieu en norme d'opérateurs.

2° Multiplions (2.6) par  $\psi \in L_C^\infty$ ,

$$\psi(K_1 \circ K_2 - K_1 K_2) = \sum a_{\ell, m} \{ \psi(R_{\ell, m} b_{\lambda, \mu} - b_{\lambda, \mu} R_{\ell, m}) \} R_{\lambda, \mu} ;$$

mais  $\psi(R_{\ell, m} b_{\lambda, \mu} - b_{\lambda, \mu} R_{\ell, m})$  est compact, donc chaque élément de la somme est compact (composition d'un opérateur continu avec un opérateur compact). La convergence ayant lieu dans  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ , l'opérateur  $\psi(K_1 \circ K_2 - K_1 K_2)$  est compact.

C. Q. F. D.

---

(1) On remarquera que c'est seulement en cet endroit de la démonstration qu'on utilise que le support de  $\psi$  est compact.

§ 3. Définition et propriétés  
de l'algèbre d'opérateurs  $\mathcal{K}^{\text{loc}}$

DÉFINITION. - Appelons  $\mathcal{K}^{\text{loc}}$ , l'ensemble des opérateurs continus de  $L^2$  dans  $L^2$  tels que leur produit avec un élément de  $L_c^\infty$  soit compact.

THÉORÈME 4. -  $\mathcal{K}^{\text{loc}}$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ .

Démonstration.

1° C'est trivialement un idéal à droite.

2° Démontrons que c'est un idéal à gauche : Soient donc  $H \in CZ_\beta^0$  et  $K \in \mathcal{K}^{\text{loc}}$ .

Nous devons démontrer que  $\psi HK$  est compact dès que  $\psi$  est dans  $L_c^\infty$ . Prenons  $\varphi \in L_c^\infty$ , alors nous avons  $\psi HK = \psi H\varphi K + \psi H(1 - \varphi)K$ .

Puisque  $K \in \mathcal{K}^{\text{loc}}$ , on a  $\varphi K$  est compact, et  $\psi H\varphi K$  est compact.

Prenons  $\varphi$  telle que  $\varphi \equiv 1$  sur un voisinage  $V$  de  $\text{supp } \psi$ . Dans ce cas,  $d(V, \text{supp } \psi) = \varepsilon > 0$  ( $d$ , distance euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ ).

Le noyau de l'opérateur  $\psi H(1 - \varphi)$  est égal à

$$N(x, y) = \psi(x) h(x, x - y)(1 - \varphi(y)) ,$$

démontrons qu'il est de carré sommable.

$$\iint |N(x, y)|^2 dx dy = \int |\psi(x)|^2 dx \int |h(x, x - y)|^2 |1 - \varphi(y)|^2 dy ,$$

mais

$$|h(x, x - y)| < C|x - y|^{-n} ,$$

donc nous avons une majoration par

$$C \int |\psi(x)|^2 dx \int |x - y|^{-2n} |1 - \varphi(y)|^2 dy \\ \leq (1 + \|\varphi\|_\infty) C \int |\psi(x)|^2 dx \int_{|x-y|>\varepsilon} |x - y|^{-2n} dy < \infty ,$$

donc  $\psi H(1 - \varphi)$  est compact, ceci prouve donc que  $\psi HK$  est compact.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 5. - Si  $H$  est un opérateur de Calderón-Zygmund appartenant à  $\mathcal{K}^{\text{loc}}$ , il est nul.

La démonstration de ce théorème est strictement la même que celle du théorème 3 de l'exposé n° A.7.

DÉFINITION. - Appelons  $CZ_{\beta}$ , l'ensemble des opérateurs  $S$  de la forme  $H + K$ , où  $H$  est un opérateur de  $CZ_{\beta}^0$  et  $K$  dans  $\mathcal{K}^{loc}$ .

THÉORÈME 6.

- (a)  $CZ_{\beta}$  est une algèbre.  
 (b) Pour tout  $S \in CZ_{\beta}$ , la décomposition  $S = H + K$  ( $H \in CZ_{\beta}^0$ ,  $K \in \mathcal{K}^{loc}$ ) est unique.  
 (c) L'application  $\theta : S \rightarrow \sigma_H$  est un homomorphisme surjectif d'algèbres (de  $CZ_{\beta}$  sur  $G_{\beta}^0$ ) dont le noyau algébrique est  $\mathcal{K}^{loc}$ .

Démonstration.

- (a) est vraie, moyennant le théorème 4.  
 (b) est vraie, moyennant le théorème 5.  
 (c) se déduit directement des définitions de  $\theta$  et du symbole du pseudo-produit.

THÉORÈME 7. - Le centre de  $CZ_{\beta}$  est l'ensemble des multiples de l'opérateur unité.

La démonstration est celle du théorème 5 de l'exposé n° A.7.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AGMON (Shmuel). - Lectures on elliptic boundary value problems. - Princeton, Van Nostrand Company, 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 2).  
 [2] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).