Henri Skoda
François Rouvière

Opérateurs singuliers de convolution

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A4, p. A1-A9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
7e année, 1967/68, n° A.4

16 novembre 1967

OPÉRATEURS SINGULIERS DE CONVOLUTION

par Henri SKODA et François ROUVIÈRE

1. Introduction.

On se propose d'étudier ici quelques propriétés d'une classe particulière d'opérateurs de convolution de L^2 dans L^2 ($L^2 = L^2(R^n)$, pour la mesure de Lebesgue). Nous commençons par quelques résultats généraux.

LEMME. - Une fonction mesurable g opère par multiplication dans L^2 (i. e. $\forall\ f \in L^2$, $g.f \in L^2$ et $\|g.f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$) si, et seulement si, g appartient à L^∞. Alors sa norme d'opérateur est $\|g\|_\infty$.

Démonstration.

Il est évident que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire :

Soit $A_M = \{x \in R^n \mid |g(x)| > M\}$; A_M est mesurable. Si mes $A_M > 0$, il existe un compact $K_M \subset A_M$ de mesure > 0 . Soit

$$f_M = \frac{1}{\sqrt{\text{mes } K_M}}\, \varphi_{K_M} ,$$

où φ_{K_M} est la fonction caractéristique de K_M . On a

$$\|f_M\|_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad M \leqslant \|g.f_M\|_2 \leqslant C .$$

Donc

$$\text{mes } A_M > 0 \implies M \leqslant C .$$

Par suite, $g \in L^\infty$

Evidemment, la norme d'opérateur $|||g|||$ est inférieure à $\|g\|_\infty$. Enfin, soit $\varepsilon > 0$; prenons $M = \|g\|_\infty - \varepsilon$. Alors mes $A_M > 0$, par définition de $\|g\|_\infty$, donc

$$M = \|g\|_\infty - \varepsilon \leqslant \|g.f_M\|_2 ;$$

par suite, $|||g||| = \|g\|_\infty$.

PROPOSITION (1). - Soit S une distribution tempérée. La convolution par S opère dans L^2 si, et seulement si, $\hat{S} \in L^\infty$. La norme d'opérateur est alors $\|\hat{S}\|_\infty$.

("opère dans L^2" veut dire "se prolonge en un opérateur continu de L^2 dans L^2", c'est-à-dire

$$\forall f \in \mathcal{D} , \qquad S \star f \in L^2 \quad \text{et} \quad \|S \star f\|_2 \leqslant C\|f\|_2 \text{ .)}$$

Démonstration. - Si la convolution par S opère dans L^2, on a

$$\forall g \in \hat{\mathcal{D}} , \qquad \hat{S}.g \in L^2 \quad \text{et} \quad \|\hat{S}.g\|_2 \leqslant C\|g\|_2 .$$

Donc $\hat{S}$ est une fonction mesurable (elle est en effet mesurable au voisinage de tout point, car, pour tout x_0, il existe une fonction $g \in \hat{\mathcal{D}}$ ne s'annulant pas au voisinage de x_0). $\hat{\mathcal{D}}$ étant dense dans L^2, on est ramené à la situation du lemme

2. Noyaux de Calderón-Zygmund.

DÉFINITION. - On appelle noyau de Calderón-Zygmund, une fonction $k : R^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ positivement homogène de degré $-n$, dont la restriction à la sphère unité Σ est dans $L^2(\Sigma)$, avec $\int_\Sigma k \, d\sigma = 0$.

Nous reprenons ici les notations de l'exposé 2 : Si E est un espace de fonctions sur Σ, et s un nombre réel, on note G_E^s l'espace des fonctions complexes sur $R^n \setminus \{0\}$, positivement homogènes de degré s, et dont la restriction à Σ appartient à E ; si $E \subset L^1(\Sigma)$, on note $\overset{\circ}{G}{}_E^s$ le sous-espace de G_E^s formé des fonctions d'intégrale nulle sur Σ.

On note donc $\overset{\circ}{G}{}_{L^2}^{-n}$ l'espace des noyaux de Calderón-Zygmund. Soit

$$k_{\varepsilon,\eta}(x) = \begin{cases} k(x) , & \text{si } \varepsilon \leqslant |x| < \eta , \\ 0 , & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle les résultats suivants (exposé n° 2) :

THÉORÈME 1.

1° $\hat{k}_{\varepsilon,\eta}$ converge simplement sur $R^n \setminus \{0\}$ vers une fonction $\hat{k}$, lorsque

---

(1) On prend ici la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} f(x) \, dx .$$

$\varepsilon \to 0$ et $\eta \to \infty$.

2° Il existe $C > 0$ tel que $|\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(\xi)| \leqslant C$, si $\xi \neq 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \eta$.

3° $|\hat{k}(\xi)| \leqslant C$ pour $\xi \neq 0$, et $\hat{k} \in \overset{\circ}{G}{}^{0}_{L^\infty}$.

THÉORÈME 2.

1° Soit $f \in \mathcal{S}$;

$$\lim_{\substack{\eta\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int k_{\varepsilon,\eta} . f \, dx$$

existe ;

2° Cette limite définit une distribution tempérée vpk ,

$$\forall f \in \mathcal{S} , \qquad \langle \mathrm{vpk} , f \rangle = \lim_{\substack{\eta\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int k_{\varepsilon,\eta} . f \, dx ;$$

3° $\widehat{\mathrm{vpk}} = \hat{k}$ (égalité dans $\mathcal{S}'$).

THÉORÈME 3. - L'application $k \longmapsto \hat{k}$ est une bijection ;

$$\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^\infty} \to \overset{\circ}{G}{}^{0}_{C^\infty} .$$

3. Opérateurs singuliers de convolution.

THÉORÈME. - Soit $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{L^2}$. Pour tout $f \in L^2$, $k_{\varepsilon,\eta} \star f$ converge dans L^2 , lorsque $\eta \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$. Soit $\underline{K}f$ la limite ; $\underline{K}$ est un opérateur continu de L^2 , et

$$\widehat{\underline{K}f} = \hat{k} . \hat{f} .$$

Démonstration. - Comme $k_{\varepsilon,\eta} \in L^1$, on a

$$k_{\varepsilon,\eta} \star f \in L^2 \qquad \text{et} \qquad \widehat{k_{\varepsilon,\eta} \star f} = \hat{k}_{\varepsilon,\eta} . \hat{f} .$$

Par ailleurs $\hat{k} \in L^\infty$, donc $\hat{k}.\hat{f} \in L^2$; soit $g \in L^2$ telle que $\hat{g} = \hat{k}.\hat{f}$. On a

$$\|g - k_{\varepsilon,\eta} \star f\|_2 = \int |\hat{k} - \hat{k}_{\varepsilon,\eta}| . |\hat{f}|^2 \, dx ;$$

les fonctions à intégrer sont majorées par Cte $|\hat{f}|^2$ et convergent vers 0 simplement presque-partout. Le théorème de Lebesgue donne donc

$$\lim_{\substack{\eta\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} k_{\varepsilon,\eta} \star f = g \quad \text{dans} \quad L^2 , \qquad \text{avec} \quad \hat{g} = \hat{k}.\hat{f} .$$

Enfin $\|\underline{K}f\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = \|\hat{k}.\hat{f}\|_2 \leqslant \|\hat{k}\|_\infty \|f\|_2$; et il résulte du lemme du paragraphe 1 que $|||\underline{K}||| = \|\hat{k}\|_\infty$.

<u>Lien avec</u> vpk . - Si $f \in \mathcal{D}(R^n)$, <u>on a</u> $\underline{K}f = \text{vpk} \star f$.

En effet, $\text{vpk} \star f \in \mathcal{S}'$ et $\widehat{\text{vpk} \star f} = \widehat{\text{vpk}}.\hat{f} = \hat{k}.\hat{f} = \widehat{\underline{K}f}$ (théorème 2). On peut aussi remarquer que

$$\text{vpk} \star f(x) = \langle \text{vpk}_y , f(x-y) \rangle = \lim_{\varepsilon,\eta} k_{\varepsilon,\eta} \star f(x)$$

en tout point x ; or les seconds membres convergent dans L^2 vers $\underline{K}f$, donc

$$\text{vpk} \star f \in L^2 \quad \text{et} \quad \text{vpk} \star f = \underline{K}f .$$

DÉFINITION. - <u>On appelle opérateur singulier de convolution, un opérateur de</u> L^2 <u>dans</u> L^2 <u>de la forme</u>

$$Hf(x) = a.f(x) + \underline{K}f(x) \qquad \underline{\text{avec}} \quad a \in \underset{\sim}{C} , \quad k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{L^2} .$$

On a donc $\widehat{Hf} = (a + \hat{k}).\hat{f}$, et on appelle <u>symbole</u> de H la fonction $\sigma(H) = a + \hat{k} \in G^0_{L^\infty}$;

$$\widehat{Hf} = \sigma(H).\hat{f} .$$

Evidemment, $\sigma(H) = 0$ entraîne $H = 0$; et, d'après le lemme du paragraphe 1, on a $|||H||| = \|\sigma(H)\|_\infty$.

4. Propriétés des opérateurs singuliers de convolution.

THÉORÈME. - <u>Les opérateurs singuliers de convolution à symboles</u> C^∞ <u>forment une sous-algèbre</u> $\mathfrak{a}$ <u>commutative, unitaire, involutive de</u> $\mathcal{L}(L^2)$. <u>L'application</u> σ <u>est un isomorphisme isométrique d'algèbres normées, unitaires, involutives de</u> $\mathfrak{a}$ <u>sur</u> $G^0_{C^\infty}$.

(Dans $G^0_{C^\infty}$, on prend la multiplication habituelle et la norme $\| \ \|_\infty$.)

En particulier :

$\sigma(H_1 \circ H_2) = \sigma(H_1)\,\sigma(H_2)$, pour $H_1 , H_2 \in \mathfrak{a}$;

$\sigma(H^*) = \overline{\sigma(H)}$, pour $H \in \mathfrak{a}$, H^* désignant l'adjoint dans L^2 ;

Si $\sigma(H)$ ne s'annule pas, H est inversible dans $\mathfrak{a}$ et $\sigma(H^{-1}) = \dfrac{1}{\sigma(H)}$.

<u>Démonstration</u>. - σ est bijective, d'après le théorème 3 : Si $f \in G^0_{C^\infty}$, il existe $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^\infty}$ et $a \in \underset{\sim}{C}$, uniques, tels que $a + \hat{k} = f$ (on doit prendre

$a = \int_\Sigma f \, d\sigma$).

Si $H_1 \in \mathfrak{a}$ et $H_2 \in \mathfrak{a}$, on a, pour $f \in L^2$,

$$\widehat{H_1 \circ H_2 f} = \sigma(H_1)\, \sigma(H_2)\, \hat{f} \; .$$

Par suite, $\mathfrak{a}$ est une algèbre, et σ un homomorphisme.

Enfin, si $H \in \mathfrak{a}$, $f \in L^2$, $g \in L^2$,

$$(\widehat{H^* f} \, , \hat{g}) = (H^* f \, , g) = (f \, , Hg) = (\hat{f} \, , \widehat{Hg}) = (\overline{\sigma(H)}\, \hat{f} \, , \hat{g}) \; ,$$

donc $\widehat{H^* f} = \overline{\sigma(H)}\, \hat{f}$. Par suite, $\mathfrak{a}$ est involutive, et $\sigma(H^*) = \overline{\sigma(H)}$.

COROLLAIRE. - La fermeture de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{L}(L^2)$ est une C^*-algèbre isomorphe à $C(\Sigma)$.

En effet, $C(\Sigma)$ est l'adhérence de $C^\infty(\Sigma)$ dans $L^\infty(\Sigma)$, d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

Dans la suite de ce paragraphe, H désigne un opérateur singulier de convolution ($\sigma(H) \in G^0_{L^\infty}$) .

PROPOSITION. - Pour $s \geqslant 0$, H est un opérateur continu de H^s dans H^s (²), et pour $f \in H^s$, $\alpha \in N^n$, $|\alpha| \leqslant s$, $HD^\alpha f = D^\alpha Hf$ (³).

Démonstration. - Si $f \in H^s$, on a immédiatement

$$\|Hf\|_{H^s} \leqslant \|\sigma(H)\|_\infty \, \|f\|_{H^s} \; .$$

De plus

$$\widehat{HD^\alpha f} = \sigma(H)\xi^\alpha \hat{f} = \widehat{D^\alpha Hf} \; .$$

PROPOSITION. - Si H applique L^2 dans H^s , pour un $s > 0$, H est nul.

Démonstration. - Comme H est un opérateur continu de L^2 dans L^2 , ce serait alors un opérateur continu de L^2 dans H^s (théorème du graphe fermé), d'où

$$\|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \sigma(H).f\|_2 \leqslant C\|f\|_2 \; , \qquad \text{pour } f \in L^2 \; .$$

(²) $H^s = \{u \in \mathcal{S}' \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2\}$; $\|u\|_{H^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}\|_2$.

(³) $D_j = - i\partial/\partial x_j$.

Par la lemme du paragraphe 1, il en résulterait que

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2}\,\sigma(H) \in L^\infty \;;$$

d'où $\sigma(H)$ est nul, puisque homogène de degré 0 .

PROPOSITION. - Si H est un opérateur compact de L^2 dans L^2 , il est nul.

La proposition résulte, par transformation de Fourier, du lemme suivant :

LEMME. - Soit $g \in L^\infty$. Si l'application

$$f \longmapsto g.f \;,$$

$$L^2 \to L^2 \;,$$

est compacte, $g = 0$.

Démonstration. - Soient $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon = \{x \mid |g(x)| > \varepsilon\}$, φ_ε sa fonction caractéristique, et $L^2_\varepsilon = \{f \in L^2 \mid f = 0 \text{ sur } \complement A_\varepsilon\}$, muni de la topologie induite par L^2 .

La composée des applications

$$f \longmapsto g.f \longmapsto g\varphi_\varepsilon.f \;,$$

$$L^2 \to L^2 \to L^2 \;,$$

respectivement compacte et continue, est compacte ; donc aussi l'application

$$f \longmapsto g\varphi_\varepsilon.f = g.f \;,$$

$$L^2_\varepsilon \to L^2_\varepsilon \;.$$

Or, cette dernière est inversible dans $\mathcal{L}(L^2_\varepsilon)$, car $\left|\frac{1}{g(x)}\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ pour $x \in A_\varepsilon$. Par suite, L^2_ε est de dimension finie (4), donc mes $A_\varepsilon = 0$. En effet, si mes $A_\varepsilon > 0$, il existe une suite infinie de compacts disjoints de mesure > 0 , contenus dans A_ε , et leurs fonctions caractéristiques sont indépendantes.

5. Opérateurs de Riesz.

On applique ici la théorie précédente aux noyaux $\gamma_n \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}$, qui sont dans $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^\infty}$. La constante γ_n ne dépend que de n et sera précisée plus loin. Soit R_j

---

(4) Cf. Exposé n° 1.

$(1 \leq j \leq n)$ l'opérateur singulier de convolution obtenu (opérateur de Riesz) :

$$R_j f(x) = \gamma_n \lim_{\varepsilon,\eta} \int_{\varepsilon \leq |x-y| < \eta} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \qquad (f \in L^2) .$$

On a $\sigma(R_j) = \frac{\xi_j}{|\xi|} \in \overset{\circ}{G}{}^0_{C^\infty}$, et

$$\widehat{R_j f}(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \qquad (f \in L^2) .$$

Démonstration. - Cela résulte d'une formule signalée à propos des polynômes harmoniques (exposé n° 3), mais on peut aussi le déduire de l'expression de $\hat{k}$ donnée dans le théorème 4 (exposé n° 2),

$$\hat{k}(\theta) = \int_\Sigma \left(\log \frac{1}{|\langle\theta , \theta'\rangle|} - i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\langle\theta , \theta'\rangle\right) k(\theta')\, d\sigma(\theta') .$$

Or k est impair,

$$\hat{k}(\theta) = - i \frac{\pi}{2} \int_\Sigma (\operatorname{sgn}\langle\theta , \theta'\rangle)\, k(\theta')\, d\sigma(\theta') .$$

$$= - i\pi \int_{\Sigma^+(\theta)} k(\theta')\, d\sigma(\theta') ,$$

où $\Sigma^+(\theta) = \{\theta' \in \Sigma \mid \langle\theta , \theta'\rangle \geq 0\}$.

Soit e_j le j-ième vecteur de la base canonique de R^n . Ici $k(\theta') = \gamma_n \langle e_j , \theta'\rangle$ donc

$$\hat{k}(\theta) = - i\pi\gamma_n \int_{\Sigma^+(\theta)} \langle e_j , \theta'\rangle\, d\sigma(\theta') .$$

Soit $\{z_1 , \ldots , z_n\}$ une base orthonormée de R^n , avec $z_1 = \theta$. Comme

$$\langle e_j , \theta'\rangle = \sum_\ell \langle e_j , z_\ell\rangle\langle z_\ell , \theta'\rangle ,$$

on a

$$\hat{k}(\theta) = - i\pi\gamma_n \sum_\ell \langle e_j , z_\ell\rangle \int_{\Sigma^+(z_1)} \langle z_\ell , \theta'\rangle\, d\sigma(\theta') .$$

Si $\ell \neq 1$, l'intégrale est nulle par symétrie par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à z_ℓ (qui conserve $\Sigma^+(z_1)$). Il reste

$$\hat{k}(\theta) = - i\pi\gamma_n \langle e_j , z_1\rangle \int_{\Sigma^+(z_1)} \langle z_1 , \theta'\rangle\, d\sigma(\theta')$$

$$= C_n \langle e_j , \theta\rangle .$$

Donc

$$\hat{k}(\xi) = C_n \frac{\xi_j}{|\xi|} ;$$

le calcul donne $C_n = - i\pi v_{n-1} \gamma_n$ (v_{n-1} = volume de la sphère unité de R^{n-1}) ; on prend donc $\gamma_n = \frac{1}{- i\pi v_{n-1}}$, dans la définition des opérateurs de Riesz.

PROPRIÉTÉS (vérification immédiate par transformation de Fourier).

1° R_j est auto-adjoint dans L^2 .

2° $\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = Id_{L^2}$.

3° Les R_j commutent entre eux.

4° $D_j R_k = R_k D_j = D_k R_j : H^1 \to L^2$.

5° Soit $\Lambda = \sum_{j=1}^{n} D_j R_j = \sum_{j=1}^{n} R_j D_j : H^1 \to L^2$. On a $\widehat{\Lambda f}(\xi) = |\xi| \hat{f}(\xi)$ pour $f \in H^1$, d'où $\widehat{\Lambda^2 f}(\xi) = |\xi|^2 \hat{f}(\xi)$ pour $f \in H^2$, c'est-à-dire

$$\Lambda^2 = - \Delta : H^2 \to L^2 .$$

6° $D_j = R_j \Lambda : H^1 \to L^2$.

7° Λ commute aux R_j , donc

$$D_j D_k = R_j R_k \Delta : H^2 \to L^2 .$$

Si $f \in \mathcal{S}'$ et $\Delta f \in H^s$ $(s \geq 0)$, alors toutes les dérivées secondes de f sont dans H^s (en effet, les R_j opèrent dans H^s).

6. Application.

THÉORÈME. - Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants, homogène d'ordre m . Il existe un opérateur singulier de convolution H tel que

$$P = H\Lambda^m : H^m \to L^2 .$$

Démonstration. - Comme $D_j = R_j \Lambda$, on a

$$P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha R^\alpha \Lambda^m ,$$

d'où le théorème, avec

$$\sigma(H) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\xi^\alpha}{|\xi|^m} = \frac{P(\xi)}{|\xi|^m} .$$

<u>En particulier</u>, si P est <u>elliptique</u> ($P(\xi) \neq 0$ pour ξ réel $\neq 0$), $\sigma(H)$ ne s'annule pas, donc H est inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$.

L'équation $Pf = g$, $g \in L^2$, $f \in H^m$, équivaut à $\Lambda^m f = H^{-1} g$. Si m est pair, $m = 2p$, on se ramène à $\Delta^p f = (-1)^p H^{-1} g$, c'est-à-dire à résoudre l'équation de Laplace.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. - Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).

[2] CALDERÓN (Alberto P.) and ZYGMUND (Antoni). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.