Philippe Courrège

Énoncé de quelques résultats sur les opérateurs intégraux singuliers dans $L^2(R^n)$ et dans $H^m(R^n)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, nº 1 (1967-1968), exp. nº A0, p. A1-A7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A1_0>

ÉNONCÉ DE QUELQUES RÉSULTATS SUR LES OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS DANS $L^2(R^n)$ ET DANS $H^m(R^n)$

par Philippe COURRÈGE

L'objectif des exposés A.1 à A.9 du présent séminaire sera de présenter des démonstrations (en restant au niveau le plus élémentaire possible) pour les résultats énoncés ci-dessous (voir la remarque finale de l'exposé).

1. Notations. Noyaux de classe C^∞_β .

Pour chaque k entier ≤ 0 et β réel ≥ 0 , on désignera par G^k_β l'ensemble des fonctions h définies sur $R^n \times (R^n \setminus \{0\})$ et à valeurs complexes telles que:

(i) Pour tout $x \in R^n$, $h(x\ ,\ .)$ est de classe C^∞ sur $R^n \setminus \{0\}$ et positivement homogène de degré k ;

(ii) Pour chaque indice de dérivation $\alpha \in N^n$, la fonction

$$(x\ ,\ z) \to \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} h(x\ ,\ z)$$

est de classe C^β_b (1) sur

$$R^n \times \{z \mid z \in R^n \text{ et } |z| > \rho\}$$

pour tout $\rho > 0$.

On note que G^k_β est une algèbre sur le corps des complexes pour les opérations naturelles.

On désignera par $\overset{\circ}{G}{}^k_\beta$ le sous-espace de G^k_β formé des fonctions $h \in G^k_\beta$ telles que, pour chaque $x \in R^n$,

$$(1) \qquad \int_{\Sigma_n} h(x\ ,\ \theta)\ \sigma_n(d\theta) = 0\ ,$$

où σ_n désigne la mesure superficielle euclidienne sur la sphère unité Σ_n de R^n.

---

(1) Si Ω est un ouvert de R^p , on notera $C^\beta_b(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes sur Ω de classe $C^{[\beta]}$ ($[\beta]$ partie entière de β) pour lesquelles toutes les dérivées d'ordre $\leq [\beta]$ sont bornées, et les dérivées d'ordre $[\beta]$ satisfont une condition de Hölder d'exposant $\beta - [\beta]$ uniforme sur Ω .

DÉFINITION 1. - Les noyaux-fonction sur R^n de la forme,

$$N(x, y) = h(x, x - y) \qquad (x \neq y) \qquad \text{où } h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta} ,$$

seront appelés noyaux singuliers de classe C^{∞}_{β} sur R^n .

($\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}$ est la classe C^{∞}_{β} introduite par CALDERÓN-ZYGMUND dans [4], p. 902, et par SEELEY dans [8], p. 660 ; voir aussi CALDERÓN [3], p. 68, et le Séminaire Cartan-Schwartz [9], exposé n° 9.)

2. Transformation de Fourier pour les fonctions de $\overset{\circ}{H}{}^{-n}_{\beta}$ (voir exp. A.2 et A.3).

LEMME 1.

1° Soit h une fonction de $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}$ (§ 1). Pour chaque $\xi \in R^n$, $\xi \neq 0$,

$$(2) \qquad \hat{h}(x, \xi) = \lim_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ A \uparrow +\infty}} \int_{\varepsilon \leqslant |z| \leqslant A} e^{-i\langle z, \xi\rangle} h(x, z)\, dz$$

existe dans $\underset{\sim}{C}$; et la fonction $\hat{h}$, ainsi définie, appartient à $\overset{\circ\circ}{G}{}^{0}_{\beta}$.

2° Inversement, pour toute fonction $\sigma \in \overset{\circ\circ}{G}{}^{0}_{\beta}$, il existe une fonction $h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}$ et une seule telle que :

$$\hat{h} = \sigma .$$

(Voir AGMON [1], lemme 11.2, p. 153, et CALDERÓN [3], p. 27, pour le cas où h ne dépend pas de x , et CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 3, p. 913, pour le cas général.)

3. Noyaux singuliers de classe C^{∞}_{β} opérant en valeur principale dans L^2 et dans H^m (voir exp. A.4, A.5 et A.6).

THÉORÈME 1. - Soient β réel $\geqslant 0$, a une fonction complexe de classe C^{β}_{b} sur R^n , et $h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}$ (§ 1).

Pour $\varepsilon > 0$, $x \in R^n$ et $f \in L^2 = L^2(R^n)$, on pose :

$$(3) \qquad H_{\varepsilon} f(x) = a(x) f(x) + \int_{|z| \geqslant \varepsilon} h(x, z) f(x - z)\, dz \qquad (^2).$$

Alors,

(a) Pour chaque $f \in L^2$, $H_{\varepsilon} f \in L^2$ pour tout $\varepsilon > 0$, et $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} H_{\varepsilon} f$ existe

---

(2) Cette intégrale est absolument convergente, en vertu de l'inégalité de Schwartz.

dans L^2 , on désigne par Hf cette limite.

(b) $f \to Hf$ est un opérateur linéaire borné de L^2 dans L^2 ; plus précisément, il existe un nombre $A > 0$ (ne dépendant que de n) tel que, pour $f \in L^2$,

$$\|Hf\|_2 \leq \|f\|_2 \, A \sup_{\substack{|z|=1 \\ x\in R^n}} (|a(x)| + |h(x , z)|) . \tag{4}$$

(c) L'opérateur H applique continûment $H^m = H^m(R^n)$ dans lui-même pour tout entier $m \geq 0$ tel que :

$$0 \leq m \leq \beta . \tag{5}$$

(d) L'opérateur H applique continûment $L^2 \cap C_b^\beta$ dans $L^2 \cap C_b^\beta$ si $0<\beta<1$, et $H^{[\beta]} \cap C_b^\beta$ dans lui-même si $\beta > 0$ (3).

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 2, p. 909, et aussi CALDERÓN [3], § 8, p. 57, et MIKHLIN [7], § 25, p. 119.)

4. Symbole des opérateurs intégraux singuliers de type C_β^∞ (voir exp. A.4 et A.5).

DÉFINITION 2. - On appellera opérateur intégral singulier de type C_β^∞ , tout opérateur linéaire borné H de L^2 dans L^2 de la forme

$$Hf = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H_\varepsilon f \qquad (f \in L^2) ,$$

où $H_\varepsilon f$ est défini par la relation (3) à partir de $a \in C_b^\beta(R^n)$ et $h \in \overset{\circ}{G}{}_\beta^{-n}$. On notera $CZ_\beta^0(R^n)$ (ou CZ_β^0) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(L^2 , L^2)$ formé de ces opérateurs (4).

On note que a et h sont déterminés de façon unique par l'opérateur H à cause de la relation :

$$Hf(x) = \int_{R^n} h(x , x - y) f(y) \, dy \tag{6}$$

pour tout $x \in R^n$ et tout $f \in L^2 \cap C_b^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ tels que $x \notin \operatorname{Supp} f$.

DÉFINITION 3. - Si H est l'opérateur intégral singulier de type C_β^∞ associé au couple $(a, h) \in C_b^\beta \times \overset{\circ}{G}{}_\beta^{-n}$, on pose,

---

(3) Voir la remarque finale de cet exposé.
(4) CZ_β^0 n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2 , L^2)$; voir le § 6.

(7) $$\sigma_H(x\,,\,\xi) = a(x) + \hat{h}(x\,,\,\xi) \qquad (x \in R^n\,,\ \ \xi \in R^n \setminus \{0\})$$ ([5]).

La fonction σ_H ainsi définie est appelée le <u>symbole de l'opérateur</u> H . (Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], définition 2, p. 913.)

Cela étant, pour chaque $\beta \geqslant 0$:

THÉORÈME 2.

(a) L'application $H \to \sigma_H$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de CZ^0_β sur H^0_β .

(b) Pour tout $H \in CZ^0_\beta$, $x \in R^n$ et $f \in \mathcal{D}$,

(8) $$Hf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, \sigma_H(x\,,\,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$ ([6]).

(c) Pour tout $H \in CZ^0_\beta$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$,

(9) $$\sigma_H(x\,,\,\xi) = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{-i\lambda\langle x,\xi\rangle}\, H(fe^{i\lambda\langle\cdot,\xi\rangle})\,(x)\ ,$$

où $f \in \mathcal{D}$ est telle que $f = 1$ au voisinage de x .

(d) Il existe une constante $A > 0$ (ne dépendant que de n) telle que, pour tout $H \in CZ^0_\beta$ et $f \in L^2$,

(10) $$\|Hf\|_2 \leqslant AM_H\, \|f\|_2\ ,$$

où

$$M_H = \sup_{\substack{x\in R^n,\, |z|\geqslant 1\\ |\alpha|\leqslant 2n}} \left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha}\, \sigma_H(x\,,\,z)\right| .$$

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 3, p. 913, en ce qui concerne les propriétés (a) et (d) ; et HÖRMANDER [5], § 3, en ce qui concerne (b) et (c).)

5. Composé de deux opérateurs intégraux singuliers de type C^∞_β (voir exp. A.7 et A.8).

THÉORÈME 3. - Soient H_1 et H_2 des opérateurs de CZ^0_β avec $\beta > 1$, et H l'unique opérateur de CZ^0_β tel que :

([5]) Voir le lemme 1 (§ 2).

([6]) $\hat{f}$ désignant la transformée de Fourier de f , définie par
$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, fx\, du\ .$$

$$\sigma_H = \sigma_{H_1} \sigma_{H_2} \quad (^7).$$

Alors, l'opérateur $H_1 H_2 - H$ applique (8) H^m dans H^{m+1} pour $0 \leqslant m < [\beta]$; en particulier $H_1 H_2 - H$ applique L^2 dans H^1 .

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 5, p. 914, et CALDERÓN [3], théorème 4, p. 71, ainsi que SEELEY [8], théorème 3, p. 678, et le cours de F. TRÈVES, 1965/66.)

6. Algèbres d'opérateurs intégraux singuliers (voir exp. A.7 et A.8).

LEMME 2. - Soit $H \in CZ^0_\beta$ avec $\beta > 1$. Si H applique L^2 dans H^1 , alors H est nul.

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], lemme, p. 918, et le cours de F. TRÈVES, 1965/66.)

Cela étant, nous avons la définition suivante :

DÉFINITION 4. - Pour chaque entier $m \geqslant 1$, on désignera par CZ_m l'ensemble des opérateurs linéaires bornés S de L^2 dans L^2 de la forme $S = H + K$, où $H \in CZ^0_\beta$ avec $\beta > m$, et où K applique continûment H^r dans H^{r+1} pour $0 \leqslant r < m$.

On a $CZ_m \subset CZ_1$ pour $m \geqslant 1$. Les éléments de CZ_1 seront appelés opérateurs intégraux singuliers.

Il résulte alors des théorèmes 2 et 3, et du lemme 2, le théorème suivant :

THÉORÈME 4.

(a) CZ_m $(m \geqslant 1)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2 , L^2)$, et, pour tout $S \in SZ_1$, la décomposition $S = H + K$ (avec $H \in CZ^0_\beta$, $\beta > 1$, et K appliquant L^2 dans H^1) est unique.

(b) Pour tout $S = H + K \in CZ_1$, on pose

$$\sigma_S = \sigma_H .$$

Alors, l'application $S \longrightarrow \sigma_S$ est un homomorphisme de l'algèbre CZ_1 sur l'algèbre $\Sigma_m = \bigcup_{\beta > m} G^0_\beta$ (§ 1) dont le noyau (9) est constitué par l'ensemble des opérateurs $K \in \mathcal{L}(L^2 , L^2)$ appliquant continûment H^r dans H^{r+1} pour $0 \leqslant r < m$.

---

(7) Théorème 2, propriété (a).

(8) Continûment en vertu du théorème du graphe fermé.

(9) Ensemble des $S \in CZ_1$ tels que $\sigma_S = 0$.

DÉFINITION 5. - Pour chaque $S \in CZ_1$, σ_S est appelé le symbole de l'opérateur S.

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 6, p. 918.)

REMARQUE. - On peut envisager aussi d'autres sous-algèbres de CZ_1 contenant CZ_m^0 $(m \geq 1)$. En particulier,

- la sous-algèbre de CZ_1 engendrée par CZ_β^0 avec $\beta > m$;
- les sous-algèbres de CZ_1 formées des opérateurs S de la forme $S = H + K$, où K est l'opérateur intégral associé à un noyau-fonction $k(x, y)$ appartenant à $L^2_{Loc}(R^n \times R^n)$ et ayant éventuellement certaines propriétés de régularité (continuité, différentiabilité ou caractère höldérien en dehors de la diagonale de $R^n \times R^n$).

7. Régularisation d'un opérateur intégral singulier elliptique (voir exp. A.9).

THÉORÈME 5. - Soit $S \in CZ_1$ un opérateur intégral singulier tel que,

$$\sigma_S(x, \xi) \neq 0 \qquad \text{pour tout } x \in R^n \text{ et } \xi \in R^n \setminus \{0\} .$$

Alors, il existe un opérateur intégral singulier $T \in CZ_1$ inversible de L^2 dans L^2 et tel que,

$$\sigma_T \, \sigma_S = 1 . \tag{11}$$

(Voir CALDERÓN-ZYGMUND [4], théorème 6, p. 918.)

APPLICATION. - Sous l'hypothèse du théorème 5, l'équation

$$Sf = g \qquad (f \in L^2, \; g \in L^2)$$

équivaut à l'équation

$$f + Kf = Tg ,$$

où l'opérateur $K = TS - \underset{\sim}{1}$ applique L^2 dans H^1 ; cette dernière équation étant du type de Fredholm dans L^2, lorsque K est compact de L^2 dans L^2 (voir [6] ; en particulier, le théorème 7, p. 288).

REMARQUE. - Les résultats énoncés ci-dessus sont, en fait, valables lorsqu'on remplace L^2 par L^p, et H^m par L^p_m $(1 < p < +\infty)$. On se limite ici au cas où $p = 2$ qui est nettement plus simple que le cas général, afin de bien mettre en lumière l'objectif du présent séminaire d'initiation :

Extraire de la littérature existante sur ce sujet des démonstrations les plus élémentaires possibles des résultats énoncés ci-dessus dans le cas particulier où $p = 2$.

(Pour les généralisations diverses, en particulier aux opérateurs sur les variétés, voir [2], [5], [8] et [9].)

BIBLIOGRAPHIE ([10])

[1] AGMON (Shmuel). - Lectures on elliptic boundary value problems. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 2).

[2] CALDERÓN (Alberto P.). - Singular integrals, Bull. Amer. math. Soc., t. 72, 1966, p. 427-465.

[3] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbolicas. - Buenos Aires, Facultad de Ciencias exactas y naturales de la Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).

[4] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.

[5] HÖRMANDER (Lars). - Pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 501-517.

[6] KOHN (J. J.) and NIRENBERG (L.). - An algebra of pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 269-305.

[7] MIKHLIN (S. G.). - Multidimensional singular integrals and integral equations. - Oxford, Pergamon Press, 1965 (International Series of Monographs in pure and applied Mathematics, 83).

[8] SEELEY (R. T.). - Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 658-690.

[9] Séminaire Cartan-Schwartz, 16e année, 1963/64 : Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1965.

[10] STEIN (Elias). - Intégrales singulières et fonctions différentiables de plusieurs variables, Cours professé à la Faculté des Sciences d'Orsay en 1966/67, rédigé par MM. Bachvan et Somen.

([10]) On trouvera, dans [2], une bibliographie très complète sur le sujet.