Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Claire Delaroche

Quelques problèmes concernant la structure des $C^{\star}$-algèbres

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, nº 2 (1966-1967), exp. nº 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A6_0>

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LA STRUCTURE DES C^*-ALGÈBRES

par Claire DELAROCHE

Après avoir rappelé le théorème fondamental de structure des C^*-algèbres commutatives, on se propose d'exposer ici une tentative en vue de déterminer la structure des C^*-algèbres non commutatives. On se limitera ici à une classe plus accessible, mais assez vaste, de C^*-algèbres, et on montrera comment on peut reconstituer cette classe de C^*-algèbres à partir d'une classe de C^*-algèbres beaucoup plus simples.

1. C^*-algèbres.

Le corps de base sera toujours $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 1. - On appelle C^*-algèbre une algèbre de Banach A munie d'une involution telle que

$$\begin{cases} \|x\| = \|x^*\| \\ \|xx^*\| = \|x\|^2 \end{cases}$$

pour tout $x \in A$.

EXEMPLES.

1° L'algèbre des fonctions continues complexes, tendant vers 0 à l'infini, sur un espace localement compact, munie de l'involution $f \longmapsto \overline{f}$.

2° L'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des endomorphismes continus d'un espace hilbertien H , munie de l'adjonction usuelle.

2. Structure des C^*-algèbres commutatives.

Rappelons certains résultats relatifs aux algèbres de Banach commutatives ([1], chap. I, § 3).

On appelle caractère d'une algèbre de Banach commutative A un morphisme non nul de A dans $\mathbb{C}$. Tout caractère est continu et de norme $\leqslant 1$.

L'ensemble des caractères, muni de la topologie de la convergence simple, est un espace topologique localement compact contenu dans la boule unité du dual de A , appelé spectre de A, et noté $\hat{A}$.

Les caractères de A sont en bijection avec les idéaux maximaux réguliers de A par l'application qui, à un caractère, fait correspondre son noyau.

On appelle transformation de Gel'fand le morphisme $x \to \mathcal{G}_x$ de A dans l'algèbre des fonctions continues complexes nulles à l'infini, définies sur $\hat{A}$, tel que $\mathcal{G}_x(\chi) = \chi(x)$ pour tout caractère χ de $\hat{A}$. En général, cette transformation n'est ni injective, ni surjective, mais si A est de plus une C^*-algèbre, on a le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 1. - *Soient A une C^*-algèbre commutative, $\hat{A}$ son spectre, B la C^*-algèbre des fonctions continues complexes nulles à l'infini sur $\hat{A}$, alors la transformation de Gel'fand est un isomorphisme de la C^*-algèbre A sur la C^*-algèbre B.*

Pour le voir, on démontre d'abord que dans une C^*-algèbre tout caractère χ satisfait à

$$\chi(x^*) = \overline{\chi(x)} \quad \text{pour tout } x \text{ dans } A \ ,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{G}_{x^*} = \overline{\mathcal{G}_x}$.

Il en résulte facilement que l'ensemble des fonctions $(\mathcal{G}_x)_{x \in A}$ satisfait aux hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass.

On démontre ensuite que la transformation de Gel'fand est une isométrie, d'où il résulte que l'ensemble $(\mathcal{G}_x)_{x \in A}$ est fermé, donc est égal à B tout entier ([1], chap. I, § 6, th. 1).

La structure topologique de $\hat{A}$ donne des renseignements sur la structure de A. Par exemple, les parties fermées de $\hat{A}$ sont en bijection avec les idéaux fermés de A.

3. Spectre d'une C^*-algèbre.

Nous allons généraliser aux C^*-algèbres non commutatives la notion fondamentale de spectre. Le problème est d'associer à une C^*-algèbre un espace topologique qui reflètera assez bien les propriétés de l'algèbre.

DÉFINITION 2. - *Soient A une C^*-algèbre, H un espace hilbertien. On appelle représentation de A dans H tout morphisme de l'algèbre involutive A dans l'algèbre involutive $\mathcal{L}(H)$, et on appelle* dimension *de la représentation la dimension de H.*

DÉFINITION 3. - Soit Π une représentation de A dans H . On dit que Π est topologiquement irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels fermés de H stables par $\Pi(A)$ sont 0 et H .

DÉFINITION 4. - On dit que deux représentations Π et Π' de A dans H et H' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme U de l'espace hilbertien H sur H' qui transforme $\Pi(x)$ en $\Pi'(x)$ pour tout $x \in A$.

EXEMPLE. - Les caractères d'une $C^{\star}$-algèbre commutative sont des représentations irréductibles de dimension 1 , et on démontre que toute représentation irréductible d'une telle $C^{\star}$-algèbre est un caractère.

Dans le cas général, on peut donc penser à définir le spectre à l'aide de l'ensemble $\hat{A}$ des classes d'équivalence des représentations irréductibles de A , ou à l'aide de l'ensemble $\mathrm{Prim}(A)$ de leurs noyaux. Ces noyaux sont des idéaux bilatères fermés appelés idéaux primitifs. On a rappelé que, dans le cas où A est commutative, ces deux ensembles sont canoniquement en bijection, mais en général on a seulement la surjection $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$. Pour toute partie T de $\mathrm{Prim}(A)$, soit $I(T)$ l'idéal bilatère intersection des éléments de T, et $\overline{T}$ l'ensemble des idéaux primitifs contenant $I(T)$. L'application $T \longmapsto \overline{T}$ satisfait aux axiomes de la fermeture, et définit une topologie sur $\mathrm{Prim}(A)$ dite topologie de Jacobson ([2], § 3).

DÉFINITION 5. - On appelle spectre primitif de A l'ensemble $\mathrm{Prim}(A)$ muni de la topologie de Jacobson, et spectre de A l'ensemble $\hat{A}$ muni de la topologie image réciproque par l'application canonique $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$.

Ces espaces topologiques sont localement quasi-compacts mais non séparés en général.

EXEMPLE. - Considérons l'ensemble A des suites $a = (a_1 , \dots , a_n , \dots)$ de matrices à 2 lignes et 2 colonnes qui tendent vers une matrice diagonale lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ an = \begin{pmatrix} a_1^1(n) & a_1^2(n) \\ a_2^1(n) & a_2^2(n) \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \alpha(a) & 0 \\ 0 & \beta(a) \end{pmatrix} .$$

Pour les opérations évidentes et la norme $\|a\| = \sup_n \|a_n\|$, c'est une $C^{\star}$-algèbre.

Pour tout $a \in A$, posons :

$$\rho_n(a) = a_n \ ,$$

$$\alpha(a) = \lim_{n\to\infty} a_1^1(n) \ ,$$

$$\beta(a) = \lim_{n\to\infty} a_2^2(n) \ .$$

Ce sont des représentations irréductibles de A de dim 1 et 2 , et on vérifie qu'il n'y en a pas d'autres

$$\hat{A} = \{\rho_1 \ , \rho_2 \ , \ldots , \rho_n \ , \ldots , \alpha \ , \beta\} \ .$$

Ici, les classes d'équivalence de représentations irréductibles de A sont en bijection avec leurs noyaux.

Par ailleurs, pour toute représentation irréductible Π de A et pour tout $x \in A$, $\Pi(x)$ est un opérateur compact. Les C^*-algèbres qui possèdent cette dernière propriété forment une classe de C^*-algèbres plus accessibles appelées C^*-algèbres <u>liminaires</u>. Les plus simples d'entre elles sont les C^*-algèbres commutatives.

Les idéaux primitifs de A sont maximaux, donc tous les points de $\hat{A}$ sont fermés. Chaque point ρ_n est ouvert, car si un idéal primitif contient

$$\bigcap_{p\neq n} \operatorname{Ker} \rho_p \cap \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta \ ,$$

il est nécessairement distinct de $\operatorname{Ker} \rho_n$. Les ensembles $\{\rho_n \ , \rho_{n+1} \ , \ldots , \alpha\}$ forment un système fondamental de voisinages de α dans $\hat{A}$. En effet, ces ensembles sont ouverts (car ils sont de complémentaire fini, donc fermé).

D'autre part, si V est un voisinage de α dans $\hat{A}$, on ne peut avoir $\rho_n \notin V$ pour des n arbitrairement grands n_1 , n_2 , ... , car

$$\operatorname{Ker} \alpha \supset \bigcap_i \operatorname{Ker} \rho_{n_i} \ ,$$

donc α est adhérent à $\{\rho_{n_1} \ , \rho_{n_2} \ , \ldots\}$.

De même les ensembles $\{\rho_n \ , \rho_{n+1} \ , \ldots , \beta\}$ forment un système fondamental de voisinages de β . $\hat{A}$ est quasi compact, et les points α et β ne sont pas séparés.

L'analogue de la transformation de Gel'fand est la transformation $x \longmapsto \mathcal{G}_x$ telle que, pour tout J dans $\operatorname{Prim}(A)$:

$$\mathcal{G}_x(J) = x(\operatorname{mod} J) \in A/J \ .$$

$\mathcal{S}_x$ est ici une fonction définie sur $\mathrm{Prim}(A)$ telle que $\mathcal{S}_x(J) \in A/J$ pour tout $J \in \mathrm{Prim}(A)$.

On ne peut plus parler de continuité pour de telles fonctions.

4. Champ continu de C^*-algèbres.

Soient T un espace topologique, et $(A(t))_{t\in T}$ une famille de C^*-algèbres. On appelle champ de vecteurs tout élément de $\prod_{t\in T} A(t)$.

DÉFINITION 6. - Soit T un espace topologique. Un champ continu de C^*-algèbres sur T est une famille $(A(t))_{t\in T}$ de C^*-algèbres munie d'un ensemble Γ de champs de vecteurs tel que

(i) Γ est une sous-algèbre involutive de $\prod_{t\in T} A(t)$;

(ii) Pour tout $t \in T$, l'ensemble des $x(t)$, où $x \in \Gamma$, est partout dense dans $A(t)$;

(iii) Pour tout $x \in \Gamma$, la fonction $t \longmapsto \|x(t)\|$ est continue ;

(iv) Soit $x \in \prod_{t\in T} A(t)$ un champ de vecteurs : Si, pour tout $x' \in \Gamma$, la fonction $t \longmapsto \|x(t) - x'(t)\|$ est continue, alors $x \in \Gamma$.

Un tel champ sera noté $\mathfrak{A} = ((A(t))_{t\in T} , \Gamma)$.

EXEMPLE. - Si $A(t) = A$ est indépendant de $t \in T$, soit Γ l'ensemble des applications continues de T dans A . Alors $\mathfrak{A} = (A(t)_{t\in T} , \Gamma)$ est un champ continu de C^*-algèbres.

5. Structure des C^*-algèbres liminaires à spectre séparé.

En général, si $x \in A$, $\mathcal{S}_x$ $(\in \prod_{J\in \mathrm{Prim}(A)} A/J)$ n'appartient pas à un champ continu de C^*-algèbres.

Reprenant l'exemple du § 3, soit $a = (a_1 , \dots , a_n , \dots)$ avec $a_n = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\|a(\mathrm{mod\ Ker}\ \rho_n)\| = 1 \ , \quad \|a(\mathrm{mod\ Ker}\ \alpha)\| = 0 \ \text{ et } \ \|a(\mathrm{mod\ Ker}\ \beta)\| = 1 \ .$$

Donc le champ de vecteurs $\mathrm{Ker}\ \Pi \longmapsto a(\mathrm{mod\ Ker}\ \Pi)$, pour $\mathrm{Ker}\ \Pi \in \mathrm{Prim}(A)$, ne satisfait pas à la condition (iii) de la définition 6.

Mais on démontre ([4], th. 4.1) le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Pour toute C^*-algèbre A , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Prim}(A)$ est séparé ;

(ii) Pour tout $a \in A$, la fonction $J \longmapsto \|a(\mathrm{mod}\ J)\|$ est continue sur $\mathrm{Prim}\ A$.

On va se restreindre à partir de maintenant aux C^*-algèbres à spectre primitif séparé. On vérifie alors sans peine que le champ de C^*-algèbres, $(A/J)_{J\in \mathrm{Prim}(A)}$, muni de l'ensemble θ de champs de vecteurs défini par : $x' \in \theta$ si, et seulement si, pour tout $x \in A$, la fonction

$$J \longmapsto \|x'(J) - x(\mathrm{mod}\ J)\|$$

est continue, est un champ continu de C^*-algèbres.

Réciproquement, à un champ continu de C^*-algèbres, $(A(t)_{t\in T}, \theta)$, sur un espace localement compact T , on peut faire correspondre canoniquement la C^*-algèbre A' des $x \in \theta$ tels que $\|x(t)\|$ tende vers 0 à l'infini sur T , avec pour opérations, les opérations évidentes, et pour norme, la norme

$$\|x\| = \sup_{t\in T} \|x(t)\| \ .$$

Donc, à une C^*-algèbre A à spectre primitif séparé, on peut associer un champ continu de C^*-algèbres sur l'espace localement compact $\mathrm{Prim}\ A$, et à ce champ continu de C^*-algèbres, on peut associer une C^*-algèbre A' .

En général, la C^*-algèbre A' n'est pas isomorphe à la C^*-algèbre A ([2], § 10). Mais si A est de plus liminaire, on a le théorème suivant ([2], § 10, th. 10.5.4) qui généralise le théorème d'isomorphisme de Gel'fand.

THÉORÈME 3. - Soit A une C^*-algèbre liminaire à spectre séparé. Soit

$$\mathfrak{A} = ((A/J)_{J\in \mathrm{Prim} A}, \theta)$$

le champ continu de C^*-algèbres défini par A . Soit A' la C^*-algèbre définie par $\mathfrak{A}$. Pour tout $x \in A$, soit $\mathcal{S}_x$ l'élément de θ défini par x

$$(\mathcal{S}_x(J) = x(\mathrm{mod}\ J) \text{ pour tout } J \in \mathrm{Prim}\ A) \ .$$

Alors $\mathcal{S}_x \in A'$, et $x \longmapsto \mathcal{S}_x$ est un isomorphisme de A sur A' .

REMARQUES

1° Les C^*-algèbres A/J ont une structure très simple. En effet, si Π_J est une représentation irréductible de noyau J , A/J est isomorphe à la C^*-algèbre

$\Pi_J(A)$, qui est la C^*-algèbre des opérateurs compacts de l'espace de la représentation, car A est liminaire ([2], § 4, Cor. 4.1.10).

2° Dans le théorème 3, il n'est pas nécessaire de préciser de quel spectre il s'agit, car $\mathrm{Prim}(A)$ et $\hat{A}$ sont homéomorphes lorsque A est liminaire ([2], § 4, Cor. 4.1.10).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Elément de Mathématique : Théories spectrales. Chap. 1 et 2 : Algèbres normées ; Groupes localement compacts commutatifs. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. et ind., 1332 ; Bourbaki, 32).

[2] DIXMIER (Jacques). - Les C^*-algèbres et leurs représentations. - Paris, Gautier-Villars, 1964 (Cahiers scientifiques, 29).

[3] FELL (J. M. G.). - The structure of algebras of operator fields, Acta Math., Uppsala, t. 106, 1961, p. 233-280.

[4] KAPLANSKY (Irving). - The structure of certain operator algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 233-280.