Jean-Marie Exbrayat

Fonctions analytiques dans un ouvert connexe du plan, II

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, nº 2 (1966-1967), exp. nº 16, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A5_0>

FONCTIONS ANALYTIQUES DANS UN OUVERT CONNEXE DU PLAN, II

par Jean-Marie EXBRAYAT

Les notations et résultats utilisés dans cet exposé sont ceux de l'exposé précédent de ce Séminaire [4].

1. Ensembles dominants, universels, fortement universels.

DÉFINITIONS. -

1° $S \subset G$ est dit dominant, si

$$\sup_S |f(z)| = \sup_G |f(z)| = \|f\|_\infty , \qquad \forall f \in B_H(G) .$$

2° $S \subset G$ est dit universel, si

$$\forall \mu \in M(G) , \qquad \exists \nu \in M(S) \quad \text{telle que} \quad \nu \sim \mu .$$

3° $S \subset G$ est dit fortement universel, si

$$\forall \mu \in M(G) \text{ et } \forall \varepsilon > 0 , \qquad \exists \nu \in M(S) \quad \text{telle que} \quad \nu \sim \mu \quad \text{et} \quad \|\nu\| \leq (1 + \varepsilon) \|\mu\| .$$

THÉORÈME. - *Soit* $S \subset G$. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes* :

1° S *est fortement universel* ;

2° S *est universel* ;

3° S *est dominant*.

Il est trivial que 1° $\Rightarrow$ 2° . Pour démontrer que 2° $\Rightarrow$ 3° , raisonnons par l'absurde. $\exists \zeta \in G - S$ et $f \in B_H(G)$ tels que

$$f(\zeta) = 1 \qquad \text{et} \qquad |f(z)| \leq r < 1 \quad \text{pour } z \text{ dans } S .$$

Soit $\nu \in M(S)$ équivalente à ε_ζ . On a donc

$$1 = (f(\zeta))^n = \int f^n \, d\varepsilon_\zeta = \int f^n \, d\nu ,$$

de sorte que

$$1 \leq r^n \|\nu\| , \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N} ,$$

ce qui est impossible.

Il reste à prouver :

$$S \text{ dominant} \Rightarrow S \text{ fortement universel.}$$

(a) On peut supposer S dénombrable ($S = \{s_n\}$) , car tout sous-ensemble partout dense d'un ensemble dominant est dominant, et tout sur-ensemble d'un ensemble fortement universel est fortement universel. En ce cas, $M(S)$ peut être identifié à ℓ^1 .

On considère l'application linéaire

$$T : B_H(G) \longmapsto \ell^\infty : f \longmapsto T(f) : n \longmapsto f(s_n) = T(f)(n) .$$

Puisque S est dominant, T est une isométrie de $H_\infty(G)$ sur $T(H_\infty(G)) = E$ qui est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ .

(b) E <u>est fermé dans</u> ℓ^∞ <u>pour la weak-☆ topologie</u> $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$. Ce résultat est, bien entendu, meilleur que : E est fermé dans ℓ^∞ pour la topologie de la norme. Comme ℓ^1 est un Banach séparable, il suffit de prouver ([1]) que E est séquentiellement fermé dans ℓ^∞ pour $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$. De façon générale, une suite $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$-convergente est bornée en norme $\| \|_\infty$ (Banach-Steinhaus), et converge ponctuellement. Supposons donc que Tf_n converge $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$ vers g dans ℓ^∞ . On a

$$\|Tf_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty \leq M < + \infty .$$

En passant éventuellement à une sous-suite, on voit qu'il existe f dans $B_H(G)$ limite uniforme des f_n sur tout compact, en particulier, limite ponctuelle. Donc (m étant fixé),

$$T(f)(m) = f(s_m) = \lim_n f_n(s_m) = \lim_n T(f_n)(m) = g(m) ,$$

soit

$$T(f) = g .$$

(c) Considérons maintenant N le sous-espace de ℓ^1 orthogonal à E .

1° N <u>est fermé dans</u> ℓ^1 (la topologie de la norme $\| \|_1$ est plus fine que la topologie faible $\sigma(\ell^1 , \ell^\infty)$).

2° <u>On a</u> $E \subset N^\perp$, <u>et comme</u> E <u>est weak-☆ fermé</u>, $E = N^\perp$.

3° E <u>s'identifie au dual de l'espace de Banach</u> $\frac{\ell^1}{N}$.

En effet, si $\varphi \in E$, φ est une forme linéaire continue sur ℓ^1 , qui se factorise à travers $\frac{\ell^1}{N}$, en une forme linéaire continue $\mathring{\varphi}$ sur $\frac{\ell^1}{N}$,

$$\begin{tikzcd} \ell^1 \arrow[r, "\cdot"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \frac{\ell^1}{N} \arrow[d, "\mathring{\varphi}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$\varphi \longmapsto \mathring{\varphi}$ est la bijection cherchée entre E et $(\frac{\ell^1}{N})'$. Mieux, cette bijection est une isométrie. Par suite, tout élément de $\frac{\ell^1}{N}$, qui s'identifie, par l'injection canonique, à un élément de $((\frac{\ell^1}{N})')'$, donc de E' , définit une forme linéaire continue sur E , et nous avons donc l'égalité des normes dans $\frac{\ell^1}{N}$ et dans E' .

(d) Choisissons $\mu \in M(G)$: $\mu \in (H_\infty(G))'$, et donc $\mu \circ T^{-1}$ est un élément

$$\begin{tikzcd} H_\infty(G) \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{C} \\ E \arrow[u, "T^{-1}"] \arrow[ur, "\mu \circ T^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

de E' , avec :

$$\|\mu\|_{(H_\infty(G))'} = \|\mu \circ T^{-1}\|_{E'} .$$

En fait, <u>nous voulons prouver que</u> $\mu \circ T^{-1}$ <u>est non seulement dans</u> E' , <u>mais encore dans</u> $\frac{\ell^1}{N}$. Pour cela, il suffit de prouver que $\mu \circ T^{-1}$ est weak-* continue

$$(\sigma(\ell^\infty , \ell^1)\Big|_{(\frac{\ell^1}{N})'} = \sigma((\frac{\ell^1}{N})' , \frac{\ell^1}{N})) ,$$

ou encore que

$$E_\mu = \{Tf \in E \text{ tel que } \int f \, d\mu = 0\}$$

est un sous-espace weak-* fermé de E , ou enfin que E_μ est séquentiellement fermé pour $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$.

Soit donc, dans E_μ , une suite Tf_n weak-* convergente vers $g = Tf$. Comme dans (b), $\|Tf_n\|_\infty \leq M < +\infty$, et l'on peut toujours supposer que f_n tend vers

$f_0 \in B_H(G)$ uniformément sur tout compact, en particulier ponctuellement. Si donc $m \in \underset{\sim}{N}$, on a

$$f(s_m) = T(f)(m) = \lim_n T(f_n)(m) = \lim_n f_n(s_m) = f_0(s_m) ,$$

soit

$$f = f_0 \quad \text{sur} \quad S , \qquad \text{ou} \quad f - f_0 = 0 \quad \text{sur} \quad S .$$

Comme S est dominant,

$$f - f_0 = 0 \quad \text{partout,} \qquad \text{ou} \quad f = f_0 .$$

Mais f_n tend vers f_0 au sens de $\alpha(G)$, et $\mu \in (\alpha(G))'$. Donc,

$$\int f_n \, d\mu = 0 \rightarrow \int f_0 \, d\mu .$$

Il s'ensuit que

$$\int f_0 \, d\mu = 0 , \qquad \text{ou} \int f \, d\mu = 0 , \qquad \text{ou} \quad Tf \in E_\mu .$$

C. Q. F. D.

Par suite, en négligeant l'injection de $\frac{\ell^1}{N}$ dans son bidual, nous pouvons identifier $\mu \circ T^{-1}$ à un élément σ de $\frac{\ell^1}{N}$ et, d'après les remarques faites,

$$\|\mu\|_{(H_\infty(G))'} = \|\mu \circ T^{-1}\|_{E'} = \|\sigma\|_{\frac{\ell^1}{N}} .$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists \ \nu \in \ell^1(M(S)) \qquad \text{telle que} \quad \begin{cases} \|\nu\| \leqslant (1 + \varepsilon) \ \|\mu\|_{(H_\infty(G))'} \\ \nu \in \sigma \end{cases}$$

($\nu \in \sigma$ signifie :

$$\int f \, d\mu = \langle \mu , f \rangle = \langle \mu \circ T^{-1} , Tf \rangle = \langle \sigma , Tf \rangle = \int f \, d\nu , \qquad \text{pour} \quad f \in B_H(G) ,$$

ou $\nu \sim \mu$). De plus

$$\|\mu\|_{(H_\infty(G))'} = \sup_{\substack{f \in B_H(G) \\ \|f\|_\infty \leqslant 1}} \left|\int f \, d\mu\right| ,$$

et comme $H_\infty(G)$ est le dual de $M'(G)$, cette dernière expression est égale à $\|[\mu]\|$, et donc majorée par $\|\mu\|$. Ceci complète la démonstration.

Remarque. - Soient toujours G un ouvert connexe relativement compact non vide de $\underset{\sim}{C}$, et $B(G)$ l'algèbre des fonctions continues bornées sur G. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace vectoriel de $B(G)$. Etablissons la dualité :

$$\langle f , \mu \rangle = \int f \, d\mu \qquad \text{entre } \mathfrak{a} \text{ et } M(G) ,$$

et sur $M(G)$ la relation d'équivalence :

$$\mu \sim_{\mathfrak{a}} \nu \quad \text{si} \quad f \in \mathfrak{a} \Rightarrow \int f \, d\mu = \int f \, d\nu .$$

Définissons enfin :

$S \subset G$ $\mathfrak{a}$-dominant par :

$$\forall f \in \mathfrak{a} , \qquad \|f\|_\infty = \sup_S |f| .$$

$S \subset G$ $\mathfrak{a}$-universel par :

$$\forall \mu \in M(G) , \qquad \exists \nu , \quad \nu \in M(S) \text{ et } \nu \sim_{\mathfrak{a}} \mu .$$

$S \subset G$ $\mathfrak{a}$-fortement universel par :

$$\forall \mu \in M(G) , \ \forall \varepsilon > 0 , \qquad \exists \nu , \quad \nu \in M(S) , \ \nu \sim_{\mathfrak{a}} \mu \ \text{ et } \ \|\nu\| \leq (1 + \varepsilon)\|\mu\| .$$

Si tout borné de $\mathfrak{a}$ est séquentiellement relativement compact pour $\sigma(\mathfrak{a} , M(G))$, on peut alors adapter la démonstration et démontrer le théorème :

$$S \ \mathfrak{a}\text{-dominant} \Rightarrow S \ \mathfrak{a}\text{-fortement universel.}$$

PROPOSITION.

1° Il existe un sous-ensemble de G, dominant, dénombrable, sans point d'accumulation dans G.

2° Soit $S \subset G$ dominant. Alors S contient un ensemble dominant dénombrable sans point d'accumulation dans G.

1° On peut écrire G sous la forme $\bigcup_{n \geq 0} F_n$, où les F_n sont ouverts relativement compacts,

$$F_0 = \emptyset , \qquad F_n \subset \overline{F}_n \subset F_{n+1} \quad \text{pour } n \geq 1 ;$$

on pose

$$C_n = \overline{F}_n - F_{n-1}$$

Si $f \in B_H(G)$, la suite

$$M_n = \sup_{C_n} |f| = \sup_{F_n} |f| \quad \text{croît vers} \quad \|f\|_\infty , \qquad \text{lorsque} \quad n \to +\infty .$$

Soient U la boule unité de $H_\infty(G)$, ε_n une suite $\downarrow$ vers 0 . Les fonctions de U sont uniformément équicontinues :

$\forall\, n$, $\exists\, \delta_n > 0$ tel que $z , w \in C_n$ et $|z - w| < \delta_n \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon_n$

ceci pour toute f dans U . Pour tout n , choisissons un ensemble fini $E_n \subset C_n$ tel que tout point de C_n soit à une distance de $E_n < \frac{\delta_n}{2}$. On a

$$M_n \leqslant \sup_{E_n} |f| + \varepsilon_n , \qquad \text{si} \quad f \in U .$$

Donc

$$S = \bigcup_n E_n$$

est un ensemble convenable.

2° Il se démontre comme le 1°.

PROPOSITION. - <u>Soit</u> $S = \{z_n\}$ <u>un ensemble dénombrable</u> $\subset G$, <u>sans point d'accumulation dans</u> G . <u>Alors</u>

$$S \ \underline{\text{dominant}} \iff \exists\, \mu , \quad \mu \in M(S) , \quad \mu \neq 0 , \quad \mu \sim 0 .$$

1° Si S est dominant, S est fortement universel. Si S ne portait aucune mesure $\nu \neq 0$ et ~ 0 , on aurait $\|\mu\| = \|[\mu]\|$ pour toute $\mu \in M(S)$, ce qui est impossible.

2° Soit $\mu \in M(S)$, $\mu \sim 0$, $\mu \neq 0$, $\exists\, (a_n) \in \ell^1(\underset{\sim}{N})$, suite $\neq 0$, telle que

$$\sum a_n f(z_n) = \int f \, d\mu = 0 , \qquad \text{pour} \quad f \in B_H(G) .$$

Considérons la fonction

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z_n - z} = \int \frac{d\mu(t)}{t - z} \qquad (z \in G - S) .$$

A est analytique dans $G - S$, et a un pôle simple en tout z_n tel que $a_n \neq 0$;
$A \not\equiv 0$;
Les zéros de A sont isolés.

$$t \longmapsto \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

est, en tant que fonction de t, dans $B_H(G)$. Donc

$$\int \frac{f(t) - f(z)}{t - z} \, d\mu(t) = 0 \ ,$$

d'où

(1) $$A(z) \, f(z) = \int \frac{f(t)}{t - z} \, d\mu(t) \qquad (z \notin S) \ .$$

Supposons maintenant S non dominant. $\exists \ f \in B_H(G)$ et $z_0 \notin S$ tels que

$$f(z_0) = 1 \ , \qquad |f(z_n)| \leqslant r < 1 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \ .$$

On peut supposer de plus $A(z_0) \neq 0$ (sinon on remplace z_0 par z'_0, très voisin de z_0, et on renormalise f). Appliquons (1) à f^n. Il vient :

$$A(z_0)(f(z_0))^n = A(z_0) = \int \frac{[f(t)]^n}{t - z} \, d\mu(t) \ ,$$

et l'on aboutit à une contradiction en faisant tendre n vers $+\infty$.

2. Ensembles de fausses singularités et balayage.

NOTATIONS.

G' ouvert connexe $\neq \emptyset$ de $\mathbb{C}$.

E compact $\subset G'$, non vide

$G = G' - E$.

Si $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$E_\varepsilon = \{z \in G \ \text{ tel que } \ d(z \, , E) > \varepsilon\} \ .$$

DEFINITIONS.

1° E est un <u>ensemble de fausses singularités</u> (pour $B_H(G)$), si

$$\forall \ f \in B_H(G) \ , \qquad \exists \ \text{un prolongement de } f \ : \ F \in B_H(G') \ .$$

2° $\mu \in M(G)$ est <u>holomorphiquement libre par rapport à</u> E, si

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \text{ assez petit}, \qquad \exists \ \nu \ , \quad \nu \ \text{portée par} \ E_\varepsilon \ , \quad \nu \sim \mu \ .$$

PROPOSITION. - "<u>Toute</u> $\mu \in M(G)$ <u>est holomorphiquement libre par rapport à</u> E" <u>équivaut à</u> " $\forall \ \varepsilon$ <u>assez petit</u> $(\varepsilon > 0)$, E_ε <u>est un ensemble dominant (pour</u> G)".

Seul **est** à démontrer le fait que la première proposition entraîne la seconde. La démonstration (par l'absurde) est laissée aux soins du lecteur.

THÉORÈME. - " E <u>ensemble de fausses singularités" équivaut à</u> " $\forall\ \mu \in M(G)$, μ <u>est holomorphiquement libre par rapport à</u> E ".

1° Si E est un ensemble de fausses singularités, soit ε tel que $0 < \varepsilon < d(E, \partial G')$. Alors E_ε est dominant pour G . Soient, en effet, $f \in B_H(G)$, et F un prolongement analytique borné de f à G' . On a

$$\sup_{G'} |F| = \sup_{G} |f| = \sup_{E_\varepsilon} |f| ,$$

et la conclusion.

2° Si E n'est pas un ensemble de fausses singularités, prenons f fonction analytique bornée non constante sur $\complement E$. On a

$$\sup_{G} |f| = \sup_{\complement E} |f| \qquad \text{et} \qquad \sup_{E_\varepsilon} |f| < \sup_{\complement E} |f| .$$

Donc E_ε n'est pas dominant, pour tout ε assez petit.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> D <u>le disque unité (ouvert). Si</u> $f \in B_H(D)$, <u>on note</u> $f(e^{i\theta})$ <u>les limites radiales de</u> f <u>qui existent presque partout sur le cercle unité.</u>

<u>Posons</u>

$$N^1 = \{h \in L^1(-\pi \,;\, \pi) \quad \text{telle que} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, h(\theta)\, d\theta = 0 , \quad \forall\ f \in B_H(D)\} .$$

$M'(D)$ <u>est isométrique à</u> $\dfrac{L^1(-\pi \,;\, \pi)}{N^1}$.

Ce résultat améliore, dans le cas du disque, le résultat général :

$$M'(G) \approx \frac{L^1(G)}{N_\lambda(G)} .$$

Donnons l'essentiel de la démonstration :

(a) Soit $h \in L^1(-\pi \,;\, \pi)$. On considère l'application

$$f \longmapsto L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, h(\theta)\, d\theta ,$$

qui est une forme linéaire sur $B_H(D)$. Montrons que L est α-continue, ou encore que

$$L^{-1}(0) = \{f \in B_H(D) \quad \text{telle que} \quad L(f) = 0\}$$

est séquentiellement α-fermé. Supposons donc que f_n α-converge vers f avec $L(f_n) = 0$ pour tout n . Les f_n peuvent être supposées uniformément bornées par 1 . Elles convergent ponctuellement vers f . Les $f_n(e^{i\theta})$ peuvent, par ailleurs, être considérées comme éléments de la boule unité du dual de $\dfrac{L^1(-\pi\ ;\ \pi)}{N'^1}$. On peut en extraire une sous-suite, notée encore (f_n) , convergeant faiblement vers F , i. e. telle que

$$\int f_n(e^{i\theta})\ H(\theta)\ d\theta \to \int F(e^{i\theta})\ H(\theta)\ d\theta \qquad \text{pour tout} \quad H \in L^1(-\pi\ ;\ \pi)\ .$$

Soit alors

$$z_0 \in D \qquad \text{et} \qquad H_{z_0}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_0}\ .$$

La formule de Cauchy entraîne

$$F(z_0) = \lim f_n(z_0) = f(z_0)\ .$$

Donc $F = f$; par suite

$$L(F) = L(f) = 0\ .$$

On peut trouver

$$\mu \in M(D) = (\alpha(D))' \qquad \text{telle que} \qquad L(f) = \langle \mu\ ,\ f\rangle\ ,\quad \forall\ f \in B_H(D)\ .$$

(b) Réciproquement : Soient $\mu \in M(D)$, et L l'application :

$$f \longmapsto L(f) = \int f\ d\mu \qquad (f \in B_H(D))\ .$$

On prouve de même que si $f_n \to f$ pour la topologie $\star$-faible de $H_\infty(D)$, et si $L(f_n) = 0$, $\forall\ n$, alors $L(f) = 0$, ce qui permet de conclure.

3. Etude des idéaux de $\beta(D)$.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas $G = D$ (disque unité ouvert). Certains problèmes concernant les idéaux de $B_H(D)$ ont une solution simple, lorsqu'on munit $B_H(D)$ de la topologie β , et peuvent ainsi se généraliser, éventuellement, à $B_H(G)$, pour G quelconque. En effet, β est assez faible pour avoir

$$M'(G) = (\alpha(G))'$$

pour dual, et pourtant assez forte.

Rappelons maintenant un certain nombre de définitions et propriétés ([2]) :

Si $f \in B_H(D)$, les valeurs radiales bornées de f existent presque partout sur le cercle, et sont notées $f(e^{i\theta})$.

Toute fonction analytique bornée dans D admet une représentation unique comme produit d'une fonction intérieure et d'une fonction extérieure.

Les fonctions intérieures f sont caractérisées par le fait que $g \longrightarrow f \times g$ est une isométrie de $H_\infty(D)$, ou encore que

$$|f(e^{i\theta})| = 1 \text{ presque partout.}$$

Une fonction intérieure f admet une représentation du type $f = B \times S$, où B est un produit de Blaschke :

$$B(z) = z^P \prod_n \left(\frac{-\overline{z}_n(z - z_n)}{|z_n|(1 - z\overline{z}_n)}\right) ,$$

et S est une fonction singulière :

$$S(z) = \exp\left[- \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta)\right] ,$$

avec μ mesure positive, singulière par rapport à la mesure de Lebesque.

Une fonction extérieure Ω est une fonction du type :

$$\Omega(z) = \exp\left[- \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, h(\theta)\, d\theta\right] , \qquad \text{où } h \in L^1(-\pi\ ;\ \pi) .$$

Nous notons (f) l'idéal principal $f.B_H(D)$. R. C. BUCK avait pensé que l'on avait :

$$\text{" } (f) \text{ dense dans } \beta(D) \text{ "} \iff \text{" } f \text{ sans zéros".}$$

En fait, on a le résultat :

$$\text{" } (f) \text{ dense dans } \beta(D) \text{ "} \iff \text{" } f \text{ sans facteur intérieur".}$$

En d'autres termes, les unités topologiques de $\beta(D)$ sont les fonctions extérieures.

THÉORÈME 1. - " (f) <u>dense dans</u> $\beta(D)$ " $\iff$ " f <u>est une fonction extérieure</u>".

(a) <u>Supposons</u> f <u>extérieure</u> : On peut toujours supposer $\|f\|_\infty = 1$. A-t-on $1 \in \overline{(f)}$?

Ecrivons

$$f(z) = \exp[\int \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} h(\theta)\, d\theta] ,$$

où $h(\theta) = \log|f(e^{i\theta})|$ est une fonction intégrale $\leqslant 0$.

Posons

$$h_n(\theta) = \sup(- n ; h(\theta)) , \qquad (n \in \underset{\sim}{N}) ,$$

$$g_n(\theta) = h(\theta) - h_n(\theta) .$$

$$F_n(z) = \exp[- \int \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} h_n(\theta)\, d\theta] .$$

On a

$$f(z).F_n(z) = \exp[\int \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} g_n(\theta)\, d\theta] \in (f) .$$

Un calcul simple prouve que $|F_n(z)| \leqslant 1$, donc que $\|f.F_n\|_\infty \leqslant 1$. D'autre part, $g_n \to 0$ dans L^1 , donc $f.F_n \to 1$ ponctuellement. Par suite, $f.F_n$ β-converge vers 1 .

C. Q. F. D.

(b) Supposons que f admette un facteur intérieur non trivial φ . Alors

$$(f) \subset (\varphi) \neq \beta(D) ,$$

et, d'après le théorème qui suit,

$$(\overline{\varphi}) = (\varphi) .$$

On a donc le théorème.

THÉORÈME 2. - φ <u>intérieure</u> $\Rightarrow$ $(\varphi) = (\overline{\varphi})$.

(φ) est un sous-espace vectoriel. Il suffit donc de prouver que φ est séquentiellement fermé. Si donc $\varphi.f_n \to g$ dans $\beta(D)$, les φf_n sont uniformément bornés, comme $\|\varphi.f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty$, il en est de même pour les f_n . Extrayons une sous-suite f_n uniformément convergente sur tout compact vers f . Alors f_n β-converge vers f , et $\varphi.f_n$ β-converge vers $\varphi.f$. Donc

$$g = \varphi.f \qquad \text{ou} \qquad g \in (\varphi) .$$

THÉORÈME 3.

$$\left.\begin{cases} f \in \beta(D) \\ \varphi \ \underline{\text{facteur intérieur de}} \ f \end{cases}\right\} \Rightarrow (\varphi) = (\overline{f}) .$$

Remarquons que $(f) \subset (\varphi)$, donc $(\overline{f}) \subset (\varphi)$, d'après le théorème précédent. Par ailleurs, soit g le facteur extérieur de f : $f = \varphi g$. D'après la démonstration du théorème 1, $\exists\, g_n \in H_\infty(D)$ tel que $g.g_n$ β-converge vers 1 . Donc, si

$$\varphi.h \in (\varphi) ,$$

φh est limite pour β de la suite

$$\varphi g g_n\, h \in (\varphi g) = (f) .$$

THÉORÈME 4. - $f \in \beta(D)$, g <u>facteur extérieur de</u> f (φ <u>facteur intérieur de</u> f). <u>Alors</u>,

$$" (f) = (\overline{f}) " \iff " g \ \underline{\text{inversible dans}} \ B_H(D) ".$$

(a) Si g est inversible dans $B_H(D)$, on a

$$(f) = (\varphi) = (\overline{\varphi}) = (\overline{f}) .$$

(b) Si g n'est pas inversible dans $B_H(D)$, alors

$$\varphi \notin (f) \qquad \text{et} \qquad \varphi \in (\overline{f}) ,$$

donc

$$(f) \neq (\overline{f}) .$$

THÉORÈME 5. - <u>Tout idéal fermé dans</u> $\beta(D)$ <u>est un idéal principal (engendré par une fonction intérieure</u>).

Soit I un idéal β-fermé de $B_H(D)$. Si $f \in I$, de facteur intérieur φ , alors $\varphi \in I$, d'après le théorème 3. Il suffit donc de prouver que I contient une fonction intérieure φ_0 qui divise (dans $B_H(D)$) toutes les fonctions intérieures de I .

Soit J la fermeture de I dans $H_2(D)$. J est un sous-espace fermé de H_2 , invariant par multiplication par z . D'arpès BEURLING [2], il existe φ_0 intérieure telle que $J = \varphi_0\, H_2$. Par suite, φ_0 divise, dans $B_H(D)$, toutes les fonctions intérieures de I . Il reste à prouver que $\varphi_0 \in I$. Or $\varphi_0 \in J$, donc

$$\exists\, f_n \in I \to \varphi_0 \quad \text{dans } H_2 .$$

Ecrivons $f_n = \varphi_n g_n$ (φ_n intérieure, g_n extérieure). <u>On peut toujours supposer</u> φ_n β-<u>convergente</u> ($\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$) <u>vers</u> φ . Comme $f_n \in I$, $\varphi_n \in I$, donc

$$\varphi \in I .$$

Par ailleurs, $\|g_n\|_2 = \|f_n\|_2$. On peut encore supposer que g_n converge faiblement vers g dans H_2 . En particulier, $g_n(z) \to g(z)$, $\forall z \in D$, car l'évaluation ponctuelle est, d'après CAUCHY, une forme linéaire continue sur H_2 . Ceci entraîne

$$\varphi_0 = \varphi . g \qquad \text{(le voir en chaque point).}$$

D'après le lemme suivant (avec $g_0 = 1$), il en résulte que φ est intérieure , donc

$$g \in H_\infty(D) , \qquad \text{et} \qquad \varphi_0 \in I . H_\infty(D) = I .$$

C. Q. F. D.

LEMME. - <u>Soit</u> $f_n = \varphi_n g_n$ (φ_n <u>intérieure</u>, g_n <u>extérieure</u>) H_2-<u>convergente vers</u> $f_0 = \varphi_0 g_0$ (φ_0 <u>intérieure</u>, g_0 <u>extérieure</u>). $f_0 \neq 0$, f_n <u>et</u> f_0 <u>dans</u> H_2 .

<u>Supposons que</u> φ_n β-<u>converge vers</u> φ , <u>et</u> g_n <u>converge faiblement dans</u> H_2 <u>vers</u> g .

<u>Alors</u>, φ <u>est intérieure, et</u> $g_n \to g$ <u>dans</u> H_2 (g <u>n'est pas forcément extérieure</u>).

On a

$$|\varphi(z)| \leq 1 \quad \text{dans } D ,$$

donc

$$|\varphi(e^{i\theta})| \leq 1 \quad \text{presque partout.}$$

Pour montrer que φ est intérieure, raisonnons par l'absurde. Supposons que l'on ait $|\varphi(e^{i\theta})| < 1$ sur un ensemble de mesure > 0 . Alors,

$$\forall\, h \in H_2 , \quad h \neq 0 , \qquad \|\varphi h\|_2 < \|h\|_2 .$$

On a : g_n converge faiblement vers g . Donc,

$$\|g\|_2 \leq \underline{\lim}\|g_n\|_2 = \underline{\lim}\|f_n\|_2 = \lim\|f_n\|_2 = \|\varphi_0\, g_0\|_2 = \|g_0\|_2 = \|\varphi g\|_2 \leq \|g\|_2 ,$$

car

$$\varphi(z)\, g(z) = f_0(z) = \varphi_0(z)\, g_0(z) .$$

D'où

$$\|\varphi g\|_2 = \|g\|_2 \ ,$$

et la contradiction. Par suite, φ est bien intérieure, et comme $\|g\|_2 = \lim\|g_n\|_2$, g_n tend dans H_2 métrique vers g .

Note. - On peut rapprocher le théorème 5 **du suivant, relatif** à $\mathcal{H}(\underset{\sim}{C})$.

$\mathfrak{I}$ de type fini $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{I}$ principal $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{I}$ fermé dans $\mathcal{H}(\underset{\sim}{C})$.

Ici, on a par contre le résultat suivant :

THÉORÈME 6. - Il existe, dans $\beta(D)$, un idéal de type fini non fermé.

On veut donc construire un idéal de type fini qui ne soit pas principal.

Soient (z_n) et (w_n) deux suites de D sans point commun telles que

$$\sum (1 - |z_n|) < + \infty \qquad \text{et} \qquad |z_n - w_n| \downarrow 0 \quad \text{très vite.}$$

Soient B_1 le produit de Blaschke associé aux z_n , B_2 le produit de Blaschke associé aux w_n , $\mathfrak{I}$ l'idéal $\mathfrak{I}(B_1 \ ; B_2)$.

Supposons $\mathfrak{I} = (f)$. Alors f est sans zéros, car B_1 et B_2 sont sans zéros communs. Comme $\frac{1}{f}$ est alors une fonction analytique de caractéristique bornée (du type $g = \frac{f_1}{f_2}$ où f_1 et $f_2 \in B_H(D)$, ce qui signifie encore

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(re^{i\theta})| \, d\theta \leq m < + \infty \ , \qquad \forall \ r < 1 \quad [(2)] \ ),$$

on a, pour un certain $C > 0$,

$$|f(z)| \geq \exp\left[\frac{- C}{1 - |z|}\right] \quad \text{dans } D \ .$$

D'autre part,

$$f = g_1 \, B_1 + g_2 \, B_2 \qquad (g_1 \ , \ g_2 \in B_H(D)) \ .$$

Donc,

$$|f(z_n)| = |B_2(z_n)| \, |g_2(z_n)| \geq \exp\left[\frac{- C}{1 - |z_n|}\right] \ ,$$

ce qui est impossible, car $|g_2(z_n)|$ est borné et $|B_2(z_n)|$ tend vers 0 très vite.

THÉORÈME 7. - Il existe dans $\beta(D)$ un idéal maximal non fermé.

Si un idéal maximal est fermé, il est principal, engendré par une fonction intérieure φ. Alors, nécessairement, φ a un seul facteur de Blaschke. [Sinon, $\varphi = B.S = b_1 . b_2\, S$, et $\psi = b_1\, S$ est intérieure avec $(\varphi) \subset (\psi)$, $(\varphi) \neq (\psi)$, et $(\psi) \neq B_H(D)$. D'où la contradiction.] D'autre part, si φ n'avait pas de zéro (φ singulière), alors $\exists\ \psi = \sqrt{\varphi}$ qui est intérieure et telle que $(\varphi) \subset (\psi)$, $(\varphi) \neq (\psi)$, d'où la contradiction.

En définitive, si I maximal est fermé, les fonctions de I ont un zéro en commun. Prenons donc

$$I' = \{f \in B_H(D) \quad \text{telle que} \quad f(x) \to 0 , \qquad \text{lorsque } x \text{ réel tend vers } 1^-\} ,$$

et

$$J \text{ maximal} \supset I' .$$

J ne peut être fermé, car les fonctions de I sont sans zéro commun.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (Stefan). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, Semin. Matem. Univ. Warsz., 1932 (Monografje Matematyczne, 1).

[2] HOFFMAN (Kenneth). - Banach spaces of analytic functions. - Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1962 (Prentice-Hall Series in modern Analysis).

[3] RUBEL (L. A.) and SHIELDS (A. L.). - The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 235-277.

[4] SAINT-LOUP (Bernard). - Fonctions analytiques dans un ouvert connexe du plan, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 6e année, 1966/67, n° 15, 9 p.