Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

BERNARD SAINT-LOUP

Fonctions analytiques dans un ouvert connexe du plan

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, nº 2 (1966-1967), exp. nº 15, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A4_0>

FONCTIONS ANALYTIQUES DANS UN OUVERT CONNEXE DU PLAN

par Bernard SAINT-LOUP

Introduction.

Cet exposé s'inspire essentiellement d'un article de RUBEL et SHIELDS [2]. Il s'agit d'établir un certain nombre de propriétés concernant l'algèbre des fonctions analytiques dans un ouvert connexe du plan. Dans une première partie, on étudie deux topologies sur cette algèbre, dites α et β . Dans une deuxième partie, on applique les résultats obtenus au balayage des mesures bornées. Dans une troisième partie, on étudie les idéaux de la même algèbre munie de la topologie β .

1. Définitions et notations.

Soient G un ouvert connexe non vide relativement compact du plan, $\overline{G}$ et ∂G son adhérence et sa frontière. On suppose qu'il existe sur G une fonction analytique bornée non constante, de sorte que les fonctions analytiques bornées sur G séparent les points de G .

Soit $B_H(G)$ l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur G . Muni de la norme

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{z\in G} |f(z)| ,$$

cet ensemble est un espace de Banach, noté $H_\infty(G)$.

On note $M(G)$ l'ensemble des mesures boréliennes complexes bornées portées par G . Muni de la norme

$$\mu \longmapsto \|\mu\| = \int d|\mu| ,$$

cet ensemble est un Banach.

$B_H(G)$ et $M(G)$ sont mis en dualité par

$$(f , \mu) \longmapsto \langle f , \mu\rangle = \int f \, d\mu .$$

Notons que, si $\mu \in M(G)$, alors $\|\mu\|$ est la norme de μ en tant que forme linéaire continue sur $H_\infty(G)$.

Introduisons sur $M(G)$ la relation d'équivalence associée à la dualité $\mu \sim \nu$ si, et seulement si, $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu$, pour tout f dans $B_H(G)$.

$$N(G) = \{\mu \ , \quad \mu \in M(G) \quad \text{et} \quad \mu \sim 0\} \ ,$$

qui est l'ensemble des mesures orthogonales à $B_H(G)$, est un sous-espace vectoriel fermé de $H_\infty(G)$, de sorte que

$$M'(G) = \frac{M(G)}{N(G)} \ ,$$

muni de la norme quotient, est un Banach.

Nous notons enfin $K(G)$ l'espace des fonctions continues positives sur $\overline{G}$, nulles sur ∂G .

Si $\mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_n \in M(G)$, alors il existe $k \in K(G)$ tel que

$$\int \frac{1}{k} \, d|\mu_i| < +\infty \ , \qquad \text{pour} \quad 1 < i < n \ .$$

2. Topologies α et β .

DÉFINITION 1. - On appelle topologie α sur $B_H(G)$, la topologie $\sigma(B_H(G) , M'(G))$, où $B_H(G)$ et $M'(G)$ sont en dualité par

$$\langle f \ , [\mu]\rangle = \langle f \ , \mu\rangle = \int f \, d\mu \ .$$

On note $\alpha(G)$ l'ensemble $B_H(G)$ muni de la topologie α .

Un système fondamental de α-voisinages de 0 est constitué par les ensembles de la forme :

$$N(\mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_n , \varepsilon) = \{f \in B_H(G) : \ \left|\int f \, d\mu_i\right| < \varepsilon \ , \quad i = 1 , 2 , \ldots , n\} \ .$$

DÉFINITION 2. - On appelle topologie β sur $B_H(G)$, la topologie associée à la famille saturée de semi-normes :

$$f \longmapsto \|f\|_k = \|f.k\|_\infty \ , \qquad \text{pour} \quad k \in K(G) \ .$$

On note de même $\beta(G)$ l'ensemble $B_H(G)$ muni de la topologie β .

Un système fondamental de β-voisinages de 0 est constitué par les ensembles

$$E_{k,\varepsilon} = \{f \in B_H(G) : \ \|f\|_k < \varepsilon\} \ , \qquad (k \in K(G) : \ \varepsilon > 0) \ .$$

Notons qu'un filtre α-convergent converge ponctuellement, qu'un filtre β-convergent converge uniformément sur tout compact de G . Les réciproques sont fausses.

THÉORÈME 1.

α <u>est moins fine que</u> β .

β <u>est moins fine que la topologie de la norme</u> $\| \|_\infty$.

Soit $N(\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n , \varepsilon)$ un α-voisinage de 0 . Il existe $k \in K(G)$ tel que

$$\int \frac{1}{k} \, d|\mu_i| \leqslant 1 , \qquad \text{pour } i = 1 , 2 , \dots , n .$$

Donc, si $f \in E_{k,\varepsilon}$, on a

$$\left|\int f \, d\mu_i\right| \leqslant \int |kf| \, \frac{1}{k} \, d|\mu_i| < \varepsilon .$$

Donc

$$E_{k,\varepsilon} \subset N(\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n , \varepsilon) .$$

Par ailleurs, soit $E_{k,\varepsilon}$ un β-voisinage de 0 ;

$$d = \sup_{z \in G} k(z) + 1 .$$

On a manifestement

$$\{f \in B_H(G) : \|f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{d}\} \subset E_{k,\varepsilon} .$$

D'où le théorème.

THÉORÈME 2. - $(\alpha(G))' = (\beta(G))' = M'(G)$.

Par définition de la topologie α , $M'(G)$ est le dual de $\alpha(G)$. Comme β est plus fine que α , il suffit que toute forme linéaire β-continue sur $B_H(G)$ soit α-continue. Donc, soit

$$\ell \in (\beta(G))' .$$

On sait qu'il existe $k \in K(G)$ tel que ℓ soit continue pour $\| \|_k$. Soit

$$A = \{kf , \quad \text{pour } f \in B_H(G)\} .$$

A est un sous-espace de $C_0(G)$. Posons encore

$$L(kf) = \ell(f) .$$

L est une forme linéaire bornée sur A , que l'on peut prolonger, d'après le théorème de Hahn-Banach, en une forme linéaire bornée sur $C_0(G)$. D'après le théorème de Riesz, on a alors :

$$\exists\ \mu \in M(G) \qquad \text{telle que} \quad L(kf) = \ell(f) = \int kf\, d\mu = \int f(k\, d\mu) \ ,$$

soit

$$\ell(f) = \int f(k\, d\mu) \ .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

$\alpha(G)$ <u>et</u> $\beta(G)$ <u>ont mêmes convexes fermés</u>.

$\alpha(G)$ <u>et</u> $\beta(G)$ <u>ont mêmes bornés (ce sont les bornés en norme</u> $\| \ \|_\infty$).

La première assertion est triviale.

Rappelons que, dans un e. v. t., une partie S est dite bornée si, pour tout voisinage U de 0 , il existe $\lambda \neq 0$ avec $\lambda S \subset U$. Un ensemble, borné pour une topologie, est borné pour toute topologie moins fine. Il est donc suffisant de prouver que toute partie α-bornée S est bornée en norme. Pour $\mu \in M(G)$ et U de la forme $\{f$, telle que $|\int f\, d\mu| < 1\}$,

$$\exists\ \lambda \neq 0 \quad \text{tel que} \quad f \in S \quad \Longrightarrow \quad \left|\int f\, d\mu\right| = |\langle f , \mu\rangle| < \frac{1}{\lambda} \ .$$

En considérant les éléments de S comme formes linéaires continues sur $M(G)$, et en appliquant le théorème de Banach-Steinhaus, on obtient le résultat cherché :

$$(\|f\|_{(M(G))'} \geq \|f\|_\infty) \ .$$

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> $(f_i)_{i\in I}$ <u>un filtre uniformément borné dans</u> $B_H(G)$ $(\|f_i\|_\infty < m < +\infty \ , \ \forall\ i \in I)$. <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

1° f_i β-<u>converge vers</u> 0 ;

2° f_i α-<u>converge vers</u> 0 ;

3° f_i <u>converge ponctuellement vers</u> 0 ;

4° f_i <u>converge vers</u> 0 <u>uniformément sur tout compact</u>.

1° $\Rightarrow$ 2° et 2° $\Rightarrow$ 3° . 3° $\Rightarrow$ 4° est bien connu (la seule valeur d'adhérence possible est 0). Pour 4° $\Rightarrow$ 1° , donnons-nous $k \in K(G)$, $\varepsilon > 0$. On peut supposer de plus $k(z) \leq m$ dans G . Il existe C compact $\subset G$ tel que

$$k(z) < \frac{\varepsilon}{m} \ , \qquad \text{pour} \quad z \in G - C \ .$$

D'après l'hypothèse 4°, il existe un élément du filtre pour lequel on a

$$|f_i(z)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{dans} \quad C \ ,$$

d'où

$$k(z)|f_i(z)| < \varepsilon \quad \text{partout.}$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Les topologies α et β ont même trace sur les bornés. Ces traces sont métriques.

COROLLAIRE 2. - Les topologies α et β ont mêmes compacts, à savoir les fermés bornés.

Dans un e. v. t. s., tout compact est fermé borné. Réciproquement, si S est α-borné, ou β-borné, S est une famille normale. De toute suite dans S, on peut donc extraire une sous-suite α-convergente ou β-convergente (théorème 3). D'après le corollaire 1, ceci assure que $\overline{S}$ est compact.

COROLLAIRE 3. - $\alpha(G)$ et $\beta(G)$ ont mêmes suites convergentes, à savoir les suites bornées qui convergent ponctuellement.

Toute suite bornée convergeant ponctuellement est α-convergente et β-convergente. Toute suite β-convergente est α-convergente. Toute suite α-convergente converge pontuellement (mesures ponctuelles) et est bornée (corollaire du théorème 2).

PROPOSITION. - Ni α, ni β, ne satisfont au premier axiome de dénombrabilité ($\alpha(G)$ et $\beta(G)$ ne sont pas des espaces métriques).

La démonstration est due à R. C. BUCK.

Soit $f \in B_H(G)$, $\|f\|_\infty = 1$, f non constante. La suite f^n converge vers 0 dans $\alpha(G)$ et $\beta(G)$. Considérons l'ensemble

$$S = \{f^n + nf^m \ ; \ m , n = 1 , 2 , 3 , \ldots\} .$$

$0 \in \overline{S}$: En effet, soient U voisinage de 0 et V voisinage de 0, tels que

$$V + V \subset U .$$

Prenons n tel que $f^n \in V$; prenons alors m tel que $nf^m \in V$. on a

$$f^n + nf^m \in U ,$$

donc $0 \in \overline{S}$.

Supposons maintenant qu'une sous-suite $(s_k)_{k\geq 1}$, $s_k = f^{n_k} + n_k f^{m_k}$, de S , converge vers 0 . Les s_k sont uniformément bornés. On a donc

$$\big| \|f^{n_k}\|_\infty - n_k \|f^{m_k}\|_\infty \big| \leq A < +\infty \ ;$$

les n_k sont donc bornés, et en passant à une sous-suite, on peut donc supposer n_k constant $= n$, soit

$$s_k = f^n + nf^{m_k} \ .$$

Si $m_k \to +\infty$ avec k , alors $s_k \to f^n \neq 0$, ce qui est impossible.

Si m_k est borné, m_k prend une infinité de fois une valeur m , donc

$$f^n + nf^m = 0 \ ,$$

ce qui entraîne f constante ; d'où l'impossibilité.

PROPOSITION. - $\alpha(G)$ <u>et</u> $\beta(G)$ <u>ne sont ni tonnelés, ni bornologiques</u>.

La boule unité fermée U de $H_\infty(G)$ est un tonneau pour $\alpha(G)$ et $\beta(G)$. Cependant, cet ensemble n'est, ni un α-voisinage de 0 , ni un β-voisinage de 0 . En effet, si $f \in B_H(G)$, $\|f\|_\infty = 1$, f non constante, la suite $2f^n$ α-converge et β-converge vers 0 . Pourtant, $\forall\, n$, $2f^n \notin U$. D'où la proposition.

Ceci complète la liste des propriétés communes à $\alpha(G)$ et $\beta(G)$. Toutefois, $\alpha \neq \beta$.

PROPOSITION. - <u>Les topologies</u> α <u>et</u> β <u>sont distinctes</u>.

Soient C un compact de G , d'intérieur non vide, et $k \in K(G)$, positif sur C. Soit

$$E = E_{k,1} = \{f \in B_H(G) \ \text{ telle que } \ \|f\|_k < 1\} \ .$$

Les $f \in E$ sont uniformément bornées sur C . <u>Mais aucun</u> α-<u>voisinage de</u> 0 <u>ne possède cette propriété</u>. En effet, étant donné un ensemble fini de mesures $\{\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n\}$, il existe $f \neq 0$ dans $B_H(G)$ orthogonale aux μ_i , $i = 1 , 2 , \dots , n$ (dimension de $B_H(G)$ infinie). Si m est un entier quelconque, $mf \in N(\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n , \varepsilon)$. Pourtant les mf ne sont pas uniformément bornées sur C , car f ne peut être nulle en tout point de C qui a un intérieur non vide.

PROPOSITION. - <u>L'espace</u> $\beta(G)$ <u>est topologiquement complet alors que</u> $\alpha(G)$ <u>ne l'est pas</u>.

$\alpha(G)$ n'est pas complet, car il est le dual d'un espace de Banach de dimension infinie muni de la topologie weak star.

$\beta(G)$ est complet. Soit (F_γ) un filtre de Cauchy dans $\beta(G)$. Pour tout k de $K(G)$, $(F_\gamma\, k)$ est un filtre de Cauchy pour la convergence uniforme et, par suite, est uniformément convergent. Il en résulte que (F_γ) est uniformément convergent sur tout compact de G. La limite F est analytique et de plus elle est bornée car, pour tout k de $K(G)$, on a

$$\sup(|F(z)\, k(z)| \ : \ z \in G) < +\infty .$$

PROPOSITION. - $\beta(G)$ <u>est une algèbre topologique</u>.

En effet, si $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ β-convergent vers 0, et si $k \in K(G)$, alors

$$|f_i\, g_i\, k| = |f_i \sqrt{k}|\ |g_i \sqrt{k}| ,$$

et donc $(f_i\, g_i)_{i\in I}$ β-converge vers 0. On conclut de façon classique.

3. Balayage.

DÉFINITIONS. NOTATIONS. - Soient λ la mesure de Lebesque du plan, et $L^1(G)$ le sous-espace de $M(G)$ des mesures absolument continues par rapport à λ.

THÉORÈME. - $\forall\, \mu \in M(G)$, $\exists\, \nu \in L^1(G)$ telle que :

$$\nu \sim \mu \qquad \text{et} \qquad \|\nu\| \leq \|\mu\| .$$

La théorie du potentiel a fourni l'idée de la démonstration.

On balaye d'abord les mesures ponctuelles.

Soient $w \in G$, ε_w la mesure ponctuelle de w, $d = \text{distance}(w , \partial G)$, $d' = \inf(1 , d)$, $a = \frac{d'}{3}$, $b = \frac{2d'}{3}$, E un ensemble borélien $\subset G$ de fonction caractéristique χ_E. Définissons ν_w par

$$\nu_w(E) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta-w|=t} \chi_E(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - w}\right) dt$$

(cf. formule de Cauchy pour un couronne), on a bien

$$f(w) = \int f\, d\nu_w , \qquad \text{pour } f \in B_H(G) ,$$

de sorte que

$$\nu_w \sim \varepsilon_w \ .$$

Il est clair de plus que

$$\|\nu_w\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \nu_w \in L^1(G) \ .$$

Si maintenant $\mu \in M(G)$, définissons sa balayée par intégration . On pose

$$\nu(E) = \int \nu_w(E)\ d\mu(w) = \int \left(\int \chi_E(z)\ d\nu_w(z)\right) d\mu(w) \ , \qquad \text{pour } E \text{ borélien.}$$

Donc,

$$\int f(z)\ d\nu(z) = \int \left(\int f(z)\ d\nu_w(z)\right) d\mu(w) = \int f(w)\ d\mu(w) \ , \qquad \text{pour } f \in B_H(G) \ ,$$

de sorte que

$$\nu \sim \mu \ .$$

Si $\varphi \in C_0(\overline{G})$, un calcul simple montre que

$$\left|\int \varphi\ d\nu\right| \leq \|\varphi\|_\infty \ \|\mu\| \ ,$$

et donc

$$\|\nu\| \leq \|\mu\| \ .$$

De plus, si $E \subset G$ et $\lambda(E) = 0$, on a

$$\nu_w(E) = 0 \ , \qquad \forall\ w \in G \ ,$$

et donc

$$\nu(E) = 0 \ ,$$

ce qui démontre le théorème.

Posons

$$N_\lambda(G) = \{\mu \in L^1(G) \ , \ \mu \sim 0\} \ ,$$

$N_\lambda(G)$ est un sous-espace fermé de $L^1(G)$. On a la proposition suivante :

PROPOSITION. - $\dfrac{L^1(G)}{N_\lambda(G)}$ <u>est isomorphe isométriquement à</u> $M'(G)$ <u>par l'application canonique. Donc</u> $M'(G)$ <u>est un Banach séparable</u>.

THÉORÈME. - <u>$H_\infty(G)$ est le dual topologique du Banach</u> $M'(G)$.

La démonstration est due à une remarque de G. CHOQUET. Le dual topologique de $M'(G)$ est contenu dans $L^\infty(G)$, et contient $H_\infty(G)$. Montrons donc que, si f appartient au dual de $M'(G)$, alors f est analytique dans G . Soit D un disque fermé de rayon non nul inclus dans G , de frontière C . Soit $w \in \overset{\circ}{D}$. On a

$$\varepsilon_w \sim \frac{1}{2i\pi} \chi_C(z) \frac{dz}{z - w} .$$

Donc

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\, dz}{z - w} ,$$

ce qui prouve que f est analytique dans $\overset{\circ}{D}$, donc en définitive dans G .

COROLLAIRE 1. - <u>La topologie α sur $B_H(G)$ est donc la weak-⋆ topologie de $H_\infty(G)$ comme dual de</u> $M'(G)$.

COROLLAIRE 2. - <u>Un sous-espace vectoriel de $\alpha(G)$ est fermé si, et seulement si, il est séquentiellement fermé</u>.

COROLLAIRE 3. - <u>Un sous-espace vectoriel de $\beta(G)$ est fermé si, et seulement si, il est séquentiellement fermé</u>.

COROLLAIRE 4. - <u>$\alpha(G)$ et $\beta(G)$ aussi sont séparables</u>.

Le corollaire 2 provient du fait que $M'(G)$ est un Banach séparable ([1], chapitre 8, théorème 5). Le corollaire 3 provient du fait que α et β ont mêmes convexes fermés et mêmes suites convergentes. Le corollaire 4 provient encore de [1] (chapitre 8, théorème 4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (Stefan). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, Seminar. Matem. Univ. Warsz., 1932 (Monografje Matematyczne, 1).

[2] RUBEL (L. A.) and SHIELDS (A. L.). - The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 235-277.